

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

73. Band, Heft 2

30. April 1960

S. 241—483

Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

Viola, Tullio: Verso nuovi indirizzi nell'insegnamento della matematica. *Archimede* 8, 154—163 (1956).

Critique de la situation actuelle de la pédagogie mathématique en Italie. L'A. se manifeste favorable à un cultif plus intense de l'intuition et à l'essai des méthodes appelées „globales“ en Géométrie. Il souhaite une plus profonde collaboration entre les professeurs de mathématiques, les pédagogues et les psychologues. Il commente les recherches de Mr. Piaget sur la psychogénèse des notions mathématiques élémentaires, et les conséquences que plusieurs mathématiciens en tirent [v. „L'Enseignement des Mathématiques“ pp. 11, 47, 63 *Act. pédag. et psychol.* Délachaux-Niestlé (1955)] en cherchant une amélioration des méthodes d'enseignement mathématique autour des modernes systématisations structurales; l'A. propose de limiter ces conséquences à l'Enseignement primaire. *P. Puig Adam.*

Rimer, D.: Contribution au problème des modèles mathématiques. *An. şti. Univ. „Al. I. Cuza“ Iaşi, n. Ser., Sect. I* 2, 341—353 (1956) [Rumänisch].

Geschichte.

• **Duhem, Pierre:** Le système du monde. Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic. Tome 7. Paris: Hermann & Cie. 1956. II, 664 p. 3,200 francs.

Von dem auf 10 Bände berechneten Riesenwerk sind zu Lebzeiten des Verf. nur fünf erschienen. Nach 40 Jahren sind nun die restlichen fünf Bände herausgegeben worden. Der vorliegende Band VII behandelt die scholastische Physik des 14. Jahrhunderts, und zwar die Vorstellungen vom Unendlichen (groß und klein), von Ort, Bewegung und Zeit, sowie die Entwicklung der Wissenschaft von den „latitudines formarum“, worin Verf. die Quelle der analytischen Geometrie sieht, in Paris und in Oxford. Fast der gesamte Inhalt des Bandes stellt eine mehr oder weniger überarbeitete Wiedergabe der bereits im 2. und 3. Band der „Études sur Léonard de Vinci“ sowie in der „Revue de Philosophie“ veröffentlichten Forschungsergebnisse des Verf. dar. So dankenswert diese Zusammenfassung der von ihm gerade auf diesem Gebiet geleisteten Pionierarbeit ist, so sehr spürt man bei der Lektüre, wie weit dank der Arbeiten von Anneliese Maier u. a. die Erforschung der mittelalterlichen Physik inzwischen über Duhem hinausgeführt hat.

H. Hermelink.

Cimpan, Fl.: La géométrie et la trigonométrie de Gh. Asachi. *An. şti. Univ. „Al. I. Cuza“ Iaşi, n. Ser., Sect. I* 2, 333—340 (1956) [Rumänisch].

Cimpan, Fl.: Cours de mathématiques tenus à l'Academia Mihăileană. *An. şti. Univ. „Al. I. Cuza“ Iaşi, n. Ser., Sect. I* 2, 325—331 (1956) [Rumänisch].

Nevanlinna, Rolf: Gauss and the non-euclidean geometry. *Nordisk mat. Tidskrift* 4, 195—209, engl. Zusammenfassg. 229 (1956) [Schwedisch].

Verf. berichtet über die Arbeiten von Gauß, Saccheri, Lambert, Schweikart, Taurinus, W. und J. Bolyai und Lobačevskij zur nicht-euklidischen Geometrie, schildert die Zusammenhänge der Differentialgeometrie von Gauß mit Fragen der nicht-euklidischen Geometrie und ihre Weiterentwicklung durch Riemann und gibt einen Ausblick auf die Vollendung der Grundlagen der Geometrie durch Hilbert.

H. Gericke.

Depman, I. Ja.: C. F. Gauß und die Universität Dorpat-Jürev. Voprosy Istor. Estestvozn. Techn. 1956, Nr. 1, 241—245 (1956) [Russisch].

Kol'cov, A. V.: Einige Materialien zur Biographie des Akademiemitgliedes A. A. Markov. Voprosy Istor. Estestvozn. Techn. 1956, Nr. 1, 204—207 (1956) [Russisch].

Harant, M. und A. Huta: Akademiker Jur Hronec — 75jährig. Acta Fac. Rer. Natur. Univ. Comenian, Mathematica 1, 145—148, deutsche Zusammenfassg. 3. Umschlagseite (1956) [Polnisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Nagai, Hiroshi: Some aspects of the philosophy of science in Japan. Ann. Japan Assoc. Philos. Sci. 1, 63—90 (1956).

Dies ist eine willkommene Übersicht über die philosophischen Strömungen in Japan etwa während der letzten 70—80 Jahre. Der Verf. macht den Einfluß der deutschen philosophischen Richtungen, insbesondere des Neukantianismus, auf die im Anfang unseres Jahrhunderts aufblühenden Schulen von Nishida und Tanabe deutlich. In neuerer Zeit scheint sich das philosophische Denken stärker den Richtungen zuzuwenden, die durch den Einfluß der Wiener Schule in England und den USA. entstanden sind, eine Entwicklung, die im Hinblick auf die Fortschritte der mathematischen Grundlagenforschung und der Physik durchaus zu begrüßen ist.

Gert H. Müller.

● **Nolfi, Padrot:** Idee und Wahrscheinlichkeit. (Bibliothèque Scientifique, 28.) Neuchâtel: Éditions du Griffon; Bonn: H. Bouvier u. Co. Verlag 1956. 212 S. Brosch. DM 15.—.

Verf. beginnt mit einer allgemeinen Diskussion über die Rolle, welche der Begriff in der Wissenschaft spielt. Nach seiner Auffassung sind die Begriffe nicht eindeutig den Dingen zugeordnet, sondern von ihnen losgelöst und in gewisser Weise frei verwendbar. Je präziser der Versuch zu einer exakten Festlegung ist, um so mehr wird der Anwendungsbereich eingengt („Inhalt-Umfang-Regel“). Auf dieser Grundlage werden verschiedene Definitionen der Wahrscheinlichkeit untersucht (u. a. die klassische Definition, das Cournotsche Prinzip, die Häufigkeitsdefinition, die Auffassung von Koopmann und Vietoris). Verf. hält es für unmöglich, durch Präzisierung zu einer einheitlichen Auffassung zu kommen, die alle Divergenzen beseitigt. Er verspricht sich mehr Erfolg von der Betrachtung der Idee, welche der Wahrscheinlichkeitstheorie zu Grunde liegt. Wünschenswert ist eine „Befreiung vom Glauben an die Notwendigkeit der Auffindung der vermeintlich einzig richtigen, allein gültigen und einzig dastehenden wissenschaftlichen Erkenntnisse, deren Existenz niemand nachweisen kann“ (pag. 65). Dies führt Verf. näher aus in einem Kapitel „Theorie und Erfahrung“, in welchem er insbesondere auf die Bedeutung der Analogiebildung eingeht. Er bespricht eingehend die Idee der Gleichwahrscheinlichkeit, die in der v. Kriesschen Spielraumtheorie genauer ausgelegt wird. Für diese Vorstellungen bricht er eine Lanze. Als einen „Vorrat von Analogiebildungen“, der die v. Kriessche Spielraumtheorie umfaßt, deutet er einen „isonometrischen Kalkül“ auf kombinatorischer Grundlage an. Abschließend diskutiert er eingehend die Einwände, welche v. Mises gegen die klassische Theorie erhoben hat. — Wenn man auch nicht in allen Einzelheiten mit dem Verf. übereinstimmen wird, so muß man doch sagen, daß in dem Buch in gut lesbarer Form eine Reihe von grundlegenden Gedanken entwickelt worden sind, die geeignet sein können, manche allzu doktrinaire Auffassung von der Wahrscheinlichkeit aufzulockern.

H. Hermes.

• Church, Alonzo: *Introduction to mathematical logic*. I. (Princeton Mathematical Series, Vol. 17.) Princeton, N. Y.: Princeton University Press 1956. IX, 376 p. \$ 7.50.

Das vorliegende Buch umfaßt eine „Introduction“ vom Umfang eines Kapitels, je zwei Kap. (I, II, und III, IV) über den Aussagenkalkül und den Prädikatenkalkül erster Stufe (PK^1) und ein Kap. (V) über den PK^2 . Für den zweiten Band ist folgender Inhalt geplant: PK höherer Stufe, Arithmetik auf zweiter Stufe, Gödels Unvollständigkeitssätze, Rekursive Arithmetik, einfache Typentheorie, axiomatische Mengenlehre, mathematischer Intuitionismus. Man ersieht daraus, daß jedenfalls dieser Band vorwiegend der „logischen“ Seite der mathematischen Grundlagenforschung gewidmet ist, während anscheinend die „mathematische“ Seite später zur Sprache kommen soll. Dementsprechend hat Verf. hier auf eine besondere Erörterung der mathematischen Grundlagenprobleme verzichtet und philosophische Diskussionen werden allgemein vermieden. Auch die Fragen der Anwendung der Logik stehen eher im Hintergrund. Das Ziel ist, die mathematische Logik, wie sie als Disziplin heute vorliegt, darzustellen. Dieses Ziel hat Verf. in dem Sinne erreicht, daß mit beispielhafter Genauigkeit und methodischer Klarheit die Aufstellung von Logikkalkülen vorgeführt und die wichtigsten Metatheoreme über diese Kalküle in fein ausgedachter Planung bewiesen werden. Der Inhalt des Buches wird bereichert durch eine große Zahl (316 auf 73 Seiten) von z. T. mehrteiligen Übungen, in denen wesentliche Ergänzungen und Ergebnisse der mathematischen Logik zu erarbeiten sind. Die meisten Übungen sind Aufgaben, bestimmte Behauptungen zu beweisen, womit also das Ergebnis gleich mit ausgesprochen wird. Allerdings muß gesagt werden, daß die überwiegende Zahl der Übungen Anforderungen an Kenntnisse und an Zeit stellen, die weit übersetzt sind. Aufgaben sind z. B., den Gentzenschen Hauptsatz und den Herbrandschen Satz zu beweisen, gewisse Entscheidungsverfahren für „lösbare Fälle“ des PK^1 (auch mit Gleichheit) zu finden, das Eliminationsproblem für gewisse Fälle zu lösen, Sortenkalküle aufzustellen etc. Zu den Übungen treten als weitere wesentliche Ergänzung 590 Fußnoten, in denen, abgesehen von Literaturangaben und wohlfundierten historischen Hinweisen, Beiträge zum Text und Alternativen zu den im Text gebrachten Formulierungen enthalten sind. — Man wird das Buch also nicht als Lehrbuch ansprechen dürfen, sondern als ein Handbuch, das für Hochschullehrer durch seinen Reichtum¹⁾ von großem Wert sein kann. — In der Darstellung ist der Genauigkeit der Vorzug vor „eleganten“ Kurzformulierungen gegeben worden. Verf. hat auch im Kleinen und Kleinsten, ohne Hinweis, Eigenes mit hineingearbeitet, das hier gar nicht herausgehoben werden kann. — Die folgenden Hinweise sollen nur ein ganz ungefähres Bild des Inhalts vermitteln. [Einige kaum wesentliche Korrekturen am Inhalt und ein Verzeichnis von Druckfehlern gibt M. Black in *J. symbolic Logic* 22, 288—289 (1958)]. — 1) In der Introduction wird eine konzise Einführung von Begrifflichkeiten gegeben, die für die Aufstellung logischer und mathematischer Kalküle in der Metasprache und für die Verbindung solcher Kalküle mit der Modelltheorie gebraucht werden. Verf. geht von den natürlichen Sprachen aus und hebt die syntaktischen und die ihnen entsprechenden semantischen Kategorien heraus, die in den logischen Kalkülen auftreten. U. a. werden behandelt: Namen, Konstanten und Variablen, Aussagenformen, Operatoren, die logistische Methode etc. [Dem Ref. erschien es, unabhängig von der Einstellung, die man hinsichtlich des Gebrauchs von Definitionen hat, sinngemäß, in dieser Introduction, die ja auch eine Methodenlehre der Logik darstellt, die Definitionenlehre (mit ihren Varianten), da sie allgemeine Bedeutung für die Logik und Mathematik hat, zu behandeln, und nicht erst in einer (ausgedehnten) Fußnote anlässlich der Einführung von Abkürzungen und Klammerregeln im Aussagenkalkül.] Verf. legt seine eigene Theorie über „Sinn“ und „Bedeutung“ dar und vergleicht sie mit andern Alter-

nativen, insbesondere der Fregeschen Theorie. — 2) Im Kap. I wird ein Aussagenkalkül mit Implikation und der Aussagenkonstanten f (das „Falsche“) als einzigen Grundbegriffen gegeben, und dafür alle wesentlichen Metatheoreme (z. B. Deduktionstheorem, Widerspruchsfreiheit gemäß drei verschiedenen Definitionen dieses Begriffs, Unabhängigkeiten etc.) bewiesen, wobei auf die klare Fixierung aller methodisch wesentlichen Beweisschritte besonders Wert gelegt ist. In Kap. II werden weitere Kalküle für die Aussagenlogik betrachtet mit andern Grundbegriffen oder einem anderen Arrangement von Axiomen und Beweisregeln. U. a. wird auch die „conditioned disjunction“ (vgl. Verf., dies Zbl. 34, 291) besprochen. Auch für diese Kalküle werden einige der wichtigeren Metatheoreme bewiesen. Abschließend wird noch auf Teilsysteme des Aussagenkalküls kurz eingegangen, wobei dem Leser in den Übungen manches selbst zur Erarbeitung überlassen bleibt. Bemerkenswert ist noch ein Paragraph, in dem die Protothetic von Lesniewski dargestellt wird. — 3) In Kap. III und IV wird wiederum zuerst ein Kalkül für die Prädikatenlogik mehr im Detail behandelt und danach mehrere Varianten, z. T. auch in Übungen besprochen. Von dem reichen Inhalt dieser Kapitel sei auf die besonders sorgfältige Formulierung der Einsetzungsregel für Prädikatenvariable, auf die Beweise für die Existenz der pränexen und der Skolemschen Normalform und auf den Beweis des Gödelschen Vollständigkeitsatzes mit Verallgemeinerungen durch Löwenheim und Skolem hingewiesen. Ausführlich werden verschiedene Entscheidungsverfahren für spezielle Formelklassen diskutiert, wie auch das Reduktionsproblem. Auf den PK^2 mit Gleichheit wird abschließend kurz eingegangen. Wie eingangs bemerkt, ist das Hauptgewicht in diesem Band auf die Behandlung der Logik gelegt worden, was wohl das Motiv dafür sein mag, daß nach dem Abschnitt über die Gleichheit nicht auch die Aufnahme von Funktionsvariablen und ι -Termen (descriptions) in einen Kalkül besprochen wird, obwohl dies an dieser Stelle leicht hätte getan werden können. — Die Kap. II und IV werden mit inhaltsreichen Exkursen betreffend die historische Entwicklung der besprochenen Teile der Logik beschlossen. — 4) Kap. V. schließlich bringt eine Form des PK^2 , die bereits zu den PK höherer Stufe hinführt. Besonders erwähnenswert ist hier die ausführliche Darstellung des Henkinschen Beweises für die Art der Vollständigkeit, die auch dem PK^2 zukommt und die eingehende Besprechung der Postulatentheorie in der auch bereits eine Axiomatisierung (mit Varianten) der Arithmetik zweiter Stufe gebracht wird. Daran schließen sich Erörterungen über verschiedene ergänzende Axiome, z. B. Axiom der Wohlordnung des Individuenbereichs, verschiedene Arten des Unendlichkeitsaxioms. Abschließend werden die verzweigte Stufentheorie und die Reduzibilitätsaxiome behandelt.

Gert H. Müller.

Gerstenhaber, Murray: On canonical constructions. II—IV. Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 881—883 (1956); Proc. Amer. math. Soc. 7, 543—550 (1956); 8, 745—749 (1957).

II. Die im ersten Teil (dies. Zbl. 64, 9) versprochene Anwendung der allgemeinen metamathematischen Methode des Verf. — „kanonische Rekonstruktion“ einer Struktur aus einer anderen ursprünglich von ihr „abgeleiteten“ Struktur — auf topologische Probleme wird hier insbesondere durch einen bündigen Beweis des Fine-Schweigertschen Satzes [„die Gruppe der Homöomorphismen des Einheitsintervalls auf sich selber gestattet nur innere Automorphismen“ (dies. Zbl. 66, 413)] belegt. Die Erweiterung dieses Satzes auf die Kreisscheibe, wie auch Anwendungen auf allgemeinere Mannigfaltigkeiten, werden angekündigt. — III. Die metamathematische Methode der kanonischen Rekonstruktionen des Verf. wird hier, ähnlich wie im Teil I, zum Beweis eines neuen Satzes über Permutationsgruppen verwendet, der den in I bewiesenen verallgemeinert. Es bedeute N eine beliebige, endliche oder unendliche Menge, $n = \text{card } N$, $\Sigma(N)$ die Gruppe aller Permutationen von N , $A(N)$ die

„alternierende“ Untergruppe von $\Sigma(N)$, d. h. die von allen 3-Zyklen (genau 3 El. bewegende Permutation) erzeugte, und G eine echte oder unechte Zwischengruppe $A(N) < G < \Sigma(N)$; dann kann jeder Automorphismus von G in einer einzigen Weise zu einem inneren Automorphismus von $\Sigma(N)$ fortgesetzt werden, ausgenommen die Fälle $n = 3$ oder 6 . (Für $n = 3$ ist die Fortsetzung mehrdeutig, für $n = 6$ unmöglich; für endliche N geht dies auf O. Hölder „Bildung zusammengesetzter Gruppen“ [Math. Ann. 46, 321—422 (1895)] zurück.) Zum Beweis zeigt man zunächst, daß $A(N)$ eine von G „ableitbare“ Struktur ist, charakterisiert die 3-Zyklen abstrakt algebraisch in $A(N)$, und rekonstruiert N aus $A(N)$ als eine in $A(N)$ abstrakt algebraisch definierte Klasse von Untermengen $T(p)$ ($T(p)$ bedeutet „konkret“ die Menge der 3-Zyklen mit $p \in N$). In einem Zusatz wird noch eine von W. R. Scott stammende abstrakte Charakterisierung der Transpositionen in $\Sigma(N)$ mitgeteilt, da die in Teil I vom Verf. gegebene für $n = 4$ versagt. — In Teil IV findet man die Durchführung der vorher angekündigten Erweiterung des Fine-Schweigertschen Satzes auf die Kreisscheibe S . Die Punkte von S werden „kanonisch“ als Äquivalenzklassen von Homöomorphismen ungerader Ordnung mit gleichem Fixpunkt [geometrische Charakterisierung unter Berufung auf einen klassischen Satz (siehe B. v. Kerekjarto, Vorlesungen über Topologie I, Berlin 1923, Seite 224)] dargestellt. Der wesentliche Punkt ist die rein algebraische Charakterisierung dieser Äquivalenzklassen (d. h. dieser geometrischen Eigenschaft) in der Gruppe aller Homöomorphismen der Kreisscheibe. In einem Anhang werden diese Gesichtspunkte herangezogen, um den Begriff der „abgeleiteten Struktur“ (im Sinne des Verfassers) am Beispiel der reellen Zahlen (abgeleitet von den natürlichen Zahlen) und der komplexen Zahlen besser zu beleuchten (auch mit Hilfe von Scheinparadoxen).

D. Tamari.

Kalicki, Jan and Dana Scott: *Equational completeness of abstract algebras*. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 650—659 (1955).

Sei $\langle A, O_1, O_2, \dots, O_n \rangle$ eine Algebra, d. h. hier eine Menge, in der die Operationen O_1, O_2, \dots, O_n erklärt sind und die gegenüber diesen Operationen abgeschlossen ist. Eine Klasse von Algebren (mit denselben Operationen) heißt eine Gleichheitsklasse (equational class), wenn sie die Klasse der Modelle einer Menge \mathfrak{G} von Gleichungen ist. Eine Gleichung g heißt aus \mathfrak{G} ableitbar, wenn g durch Einsetzungen oder/und Ersetzungen von Gleichem durch Gleiches aus \mathfrak{G} gewonnen werden kann. \mathfrak{G} heißt konsistent, wenn aus \mathfrak{G} nicht alle Gleichungen abgeleitet werden können. \mathfrak{G} heißt hinsichtlich Gleichheit vollständig (h. G. v.), wenn \mathfrak{G} konsistent ist und jede \mathfrak{G} echt umfassende Menge von Gleichheiten (mit denselben Termbildungen, d. h. denselben Operationen) inkonsistent ist. Offenbar ist \mathfrak{G} hinsichtlich Ableitbarkeit abgeschlossen, wenn \mathfrak{G} h. G. v. ist. Nach G. Birkhoff (dies. Zbl. 13, 1) hat jede konsistente Menge von Gleichungen ein mindestens zweizahliges (m. zw.) Modell, und nach Lindenbaum kann jede konsistente Menge von Gleichungen zu einer solchen h. G. v. Menge erweitert werden. Eine Algebra heißt h. G. v., wenn die Menge der Gleichungen, die in A gelten, h. G. v. ist. Eine Klasse von Algebren heißt h. G. v., wenn die die Klasse definierende Menge von Gleichungen h. G. v. ist. Verf. stellen allgemein die Aufgabe, für gegebene Algebren bzw. Klassen von Algebren festzustellen, durch welche Erweiterungen durch Hinzunahme von Gleichheiten diese h. G. v. gemacht werden können. Sie beweisen, daß die Klasse der assoziativen Algebren $\langle A, + \rangle$, wobei A m. zw. und $+$ eine zweistellige Operation ist, h. G. v. ist, genau dann, wenn $x + y = y + x$ und $x + x = x$ gilt, oder $x + y = x$ gilt, oder $y + x = x$ gilt, oder $x + y = z + w$ gilt, oder es eine Primzahl p gibt, so daß $px + y = y$ und außerdem noch $x + y = y + x$ gilt. — Ferner werden noch einige (z. T. aus der Literatur bekannte) Ergebnisse betreffend Klassen von Algebren, die h. G. v. sind, genannt. Z. B. ein m. zw. Verband ist h. G. v. genau dann, wenn er distributiv ist. Eine m. zw. Relationsalgebra $\langle R, +, \cdot, -, 0, 1, ;, \sim \rangle$ mit den Booleschen Operationen $+, \cdot, -$, den Booleschen Konstan-

ten 0, 1, dem Peirceschen Produkt \cdot , und der Bildung des Konversen \sim , aber ohne die Konstante $1'$ (Identitätsrelation) als Grundkonstante, ist h. G. v. genau dann, wenn für alle a, b aus R $a; b = a \cdot b$ gilt, d. h. wenn R eine Boolesche Relationsalgebra ist. Weitere ähnliche Ergebnisse der Verff. in Bull. Amer. math. Soc. 59, 77—78 (1953). Abschließend weisen die Verff. noch auf den Zusammenhang zwischen Darstellungssätzen für Algebren und dem Begriff der Vollständigkeit hinsichtlich Gleichheit hin, der sich aus dem Satz ergibt, daß wenn eine Klasse von Algebren K h. G. v. ist, K als Klasse aller homomorphen Bilder von Subalgebren von direkten Produkten eines m. zw. Elementes von K darstellbar ist, kurz, daß K (unter der genannten Bedingung) durch eines seiner m. zw. Elemente „generierbar“ ist.

Gert H. Müller.

Kalicki, Jan: The number of equationally complete classes of equations. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 660—662 (1955).

Betreffend die Terminologie vgl. vorstehendes Referat. Verf. beweist: Die Mächtigkeit der Klasse von verschiedenen Mengen \mathfrak{G} von Gleichungen (zwischen Termen gebildet mit einer zweistelligen Operation), die h. G. v. sind, ist die des Kontinuums. Der Satz bleibt richtig 1) wenn in jedem \mathfrak{G} das kommutative Gesetz vorkommt und 2) wenn noch eine einstellige Operation zur Termbildung hinzutritt und das kommutative Gesetz und Idempotenz in jedem \mathfrak{G} vorkommt.

Gert H. Müller.

Scott, Dana: Equationally complete extensions of finite algebras. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 35—38 (1956).

Betreffend die Terminologie vgl. vorstehende Referate. Verf. beweist: Die Menge der Gleichungen, die in einer endlichen Algebra A gelten, hat nur endlich viele h. G. v. Erweiterungen. Der Beweis liefert 1. ein rein algebraisches Kriterium für Vollständigkeit hinsichtlich Gleichheit einer Algebra und 2. im Falle der Endlichkeit von A ein effektives Verfahren festzustellen, ob A h. G. v. ist, bzw. wenn das nicht der Fall ist, die Anzahl der möglichen h. G. v. Erweiterungen festzustellen.

Gert H. Müller.

Tarski, Alfred: Equationally complete rings and relation algebras. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 39—46 (1956).

Betreffend die Terminologie vgl. vorstehende Referate. Verf. gibt Kriterien dafür, daß ein Ring, und dafür, daß eine Relationsalgebra h. G. v. ist: 1. Ein m. zw. Ring R ist h. G. v. genau dann, wenn es eine Primzahl p gibt, so daß R ein p -Ring oder ein p -Nullring ist. — Dabei ist ein Ring ein p -Ring, wenn außer den üblichen Gesetzen für $+$ und \cdot (einschl. des kommutativen Gesetzes für \cdot) die Gleichungen $px + y = y$ und $x^p = x$ gelten. Wird die letzte Gleichung durch $x \cdot y + y = y$ ersetzt, dann erhält man einen p -Nullring. In den Konstanten $+$ und \cdot sind also die Klassen der p -Ringe bzw. p -Nullringe Gleichheitsklassen. 2. Eine Relationsalgebra $\langle R, +, -, ;, \sim, 1' \rangle$ mit Einschluß der Konstanten $1'$ als Grundkonstante ist h. G. v. genau dann, wenn die Gleichung $(*)$ $x; 1; \bar{x}; 1; (x \cdot 1' + \bar{x} \cdot 0') ; 1; (x \cdot 0' + \bar{x} \cdot 1') = 0$ gilt und entweder (a): $0'; 0' = 0$ oder (b): $0'; 0' = 1'$ oder (c): $0'; 0' = 1$ ist. Dabei ist $0' = \bar{1}'$, d. h. $0'$ ist die Verschiedenheitsrelation. Die drei durch die obigen drei Gleichungen (a) (b) (c) definierten Klassen von Relationsalgebren enthalten wechselseitig keine gemeinsame m. zw. Relationsalgebra. Alle drei Klassen sind Gleichheitsklassen. Die erstgenannte Klasse (a) ist die Klasse der Booleschen Algebren; die Gleichung $(*)$ ist in diesem Falle entbehrlich.

Gert H. Müller.

Kemeny, John G.: A new approach to semantics. I, II. J. symbolic Logic 21, 1—27, 149—161 (1956).

Verf. entwickelt ein wohlüberlegtes System der semantischen Begriffe im weiteren Sinne, d. h. unter Einschluß der Anwendungen auf Sprachen, die außer-

logische Konstanten (Kon.) enthalten. Im Teil I (§§ 1—5) werden die Definitionen (Def.) dieser Begriffe inhaltlich motiviert und ausgesprochen und in Teil II (§§ 6—8) wird eine formalisierte Darstellung dieser Def. in einer entsprechend gewählten Meta- bzw. Metametasprache gegeben. Die behandelten Begriffe sind fast alle Gegenstand vieler Diskussionen und Kontroversen; sie sind in verschiedenen Varianten vor allem durch Carnap, Church, Quine und Tarski entwickelt worden. Im Folgenden wird auf diese Zusammenhänge nicht eingegangen. — Als Beispiel einer Sprache L , auf die sich die folgenden Def. beziehen, wird die einfache Stufentheorie gewählt und für diese werden die Begriffe einer Belegung (Semimodell) und eines Modells erklärt. (Vgl. dazu Kemeny, dies. Zbl. 35, 4). Dabei werden hier zusätzlich Ausdrücke von L mit freien Variablen berücksichtigt, was im Folgenden aus Raumgründen unterlassen sei. Durch Angabe eines Modells für L erhält man in einem gewissen Sinne auch eine Übersetzung von L in eine zugehörige Metasprache ML und umgekehrt: z. B. ist „prim (5)“ ein Satz von L , dann ist seine Übersetzung „5 \in Prim hat den Wahrheitswert Null“ in ML , woraus die obige Beziehung leicht ersichtlich ist. — Für die Anwendung seiner Theorie setzt Verf. voraus, daß die betrachtete Sprache L — für das Weitere möge diese den klassischen Prädikatenkalkül der 1. Stufe jedenfalls mitumfassen — in „semantisch determinierter“ Form vorliegt, d. h., daß — abgesehen von der formalen Darstellung von L — 1) ein Modell M , das gleichzeitig zur Übersetzung von L in ML dient, angegeben wird, und 2) festgelegt wird, welche Konstanten von L als logisch (log.) und welche als nicht-log. (= außerlog.) gelten sollen. Für die Festlegung unter 2) wird nur verlangt, daß, wenn eine Kon. in allen Modellen dieselbe Zuordnung hat, sie log. ist, aber nicht ausgeschlossen, daß eine Kon. log. ist, die in zwei Modellen verschiedene Zuordnungen erhält. Eine „Interpretation“ (Int.) von L ist ein Modell von L , das sich von M nur durch Zuordnungen zu den außerlog. Kon. unterscheidet. (Darin ist (Alloperator!) mit eingeschlossen, daß alle Int. _{M} denselben Individuenbereich haben.) Durch die Bezeichnung Int. _{M} wird hier auf die Abhängigkeit von M hingewiesen. Wenn als log. z. B. nur die Konstanten des Prädikalküls 1. Stufe bezeichnet werden, dann sind alle, auch ggf. sogenannte „non-standard“-Modelle, Interpretationen; andernfalls, wenn z. B. Kon., die mathematische Operationen zu definieren gestatten, als log. deklariert werden, kann es je nach Wahl von M verschiedene Klassen von Int. geben. — Alle weiteren Def. des Verf. gehen von dem Grundbegriff Int. _{M} aus: Ein Satz heißt „analytisch wahr“ (a-wahr), bzw. „selbstwidersprechend“, wenn er in jeder Int. _{M} gültig bzw. ungültig ist. Er heißt „analytisch“, wenn er a-wahr oder selbstwidersprechend ist. Er heißt „synthetisch“, wenn es Int. _{M} gibt, in denen er gültig, und solche, in denen er ungültig ist. Die Def. der „Folgerung“ und der „Äquivalenz“ sind die üblichen. Ein Satz heißt „wahr“ bzw. „falsch“, wenn er in M gültig bzw. ungültig ist. Für diesen Wahrheitsbegriff ist das bekannte Adäquatheitsschema von Tarski beweisbar. — Dem Ref. erscheint die Def. 10, derzufolge eine Kon. „log.“ heißt, wenn sie in allen Int. _{M} dieselbe Zuordnung hat, überflüssig, weil der Begriff „log.“ bereits für die Bestimmung, wann eine Sprache semantisch determiniert ist, gebraucht wird, und der Inhalt der Def. 10 dann beweisbar ist. (Dies wird auch in Teil II Def. ML 15, Def. ML 24 und MPI ersichtlich, da ja aus der Kenntnis, welche Kon. außerlog. sind (MPI) genau bestimmt ist, welche Kon. log. sind.) — Ein kon. Ausdruck („phrase“) — ohne freie Variable — heißt log., wenn er nach den Bildungsregeln aus nur log. Kon. aufgebaut ist. In Abweichung vom Verf. (infolge des Wegfalles von Def. 10) ist zu beweisen, daß ein log. kon. Ausdruck in allen Int. _{M} dieselbe Zuordnung hat. (Dem Ref. erschien es wünschenswert, anstelle des Terminus „kon. Ausdruck“ die Unterscheidung von kon. Term und Satz stärker zu betonen, da ja von einer Übersetzbarkeit einer Sprache L_1 in eine Sprache L_2 doch wohl nur dann gesprochen werden kann, wenn kon. Terme bzw. Sätze in kon. Terme bzw.

Sätze übergehen.) — Eine Sprache L heißt „rein log.“, wenn darin nur log. Kon. vorkommen, sonst heißt L „angewandt“. Ist L rein log., dann hat L nur eine Int._M. Zwei kon. Ausdrücke heißen „synonym“, wenn sie in jeder Int._M dieselbe Zuordnung haben. Dies ist eine schwache Forderung, derzufolge z. B. äquivalente Sätze synonym sind. Ist ein Satz „allgemeingültig“ (d. h. in allen Modellen gültig), dann ist er offenbar a-wahr; die Umkehrung gilt nur dann, wenn es nur eine Klasse von Int. gibt, die dann mit der Klasse aller Modelle zusammenfällt. Dies ist für den Prädikatenkalkül 1. Stufe (Gödel) der Fall, aber im allgemeinen nicht, wenn weitere Kon. vorkommen, die als log. deklariert werden. Da wir hinsichtlich dessen, wann wir eine Kon. als log. erklären dürfen, nur schwach eingeschränkt sind, können nicht nur mathematische Kon. sondern eventuell auch im üblichen Sinne außerlog. Kon. als log. erklärt werden, d. h. das Nichtzusammenfallen von Allgemeingültigkeit und analytischer Wahrheit hängt nicht allein von der Existenz von Nonstandardmodellen ab. Davon abgesehen erscheint es dem Ref. als fruchtbar für die Def. der semantischen Begriffe von dem Grundbegriff Int._M auszugehen und dabei den Begriff „log. Kon.“ im obigen Sinne frei verfügbar zu lassen, denn bei einer Axiomatisierung z. B. der Mechanik wird man z. B. die volle Differentialgeometrie als „logisch“ ansehen wollen gegenüber den einzuführenden Grundbegriffen der Mechanik. Um aber eine Konfusion der Begriffe zu vermeiden, erscheint es ratsam den Terminus „logisch“ für die Kon. einer nach dem Gödelschen Satz vollständigen Sprache zu reservieren, und im obigen Falle die für die Formalisierung der Differentialgeometrie erforderlichen mathematischen Kon. als z. B. „relativ-logische“ zu bezeichnen. Eine Int. eines solchen Systems der Mechanik wäre dann jedes Modell, das sich von einem ausgewählten Modell, in dem das System der reellen und natürlichen Zahlen im üblichen Sinne verstanden wird, nur durch Zuordnungen zu den mechanischen Begriffen unterscheidet. — Die formalisierte Darstellung der genannten und weiterer Def. der Teile I und II ist mit Sorgfalt durchdacht und entgegen dem ersten Anschein gut durchsichtig. Für die zu dieser Darstellung benötigte Meta- und Metametasprache werden (§ 7) zwei Forderungen aufgestellt: 1) Ein kon. Ausdruck aus ML soll genau dann als log. erklärt werden, wenn er die Übersetzung (vermöge M) eines log. kon. Ausdruckes aus L ist. 2) Der Individuenbereich (1. Stufe) von L soll so gewählt sein, daß die Übersetzung seines Namens in ML ein log. kon. Ausdruck ist, was praktisch stets erreichbar ist. Unter diesen Voraussetzungen beweist Verf. a) Der Satz „ A ist wahr“ ist a-wahr in ML genau dann, wenn der Satz „ A ist a-wahr“ in ML wahr ist. b) Sätze S_1, S_2, \dots, S_n stehen in einer semantischen Relation in L genau dann, wenn ihre Übersetzungen in ML in derselben semantischen Relation in ML stehen. Abschließend (§ 8) wird noch gezeigt, daß die meisten der eingef. semantischen Begriffe invariant bezüglich „freier“ Übersetzung sind. Dabei heißt ein kon. Ausdruck aus L_1 „frei übersetzbar“ in einen solchen Ausdruck von L_2 , wenn die Übersetzungen dieser Ausdrücke in eine gemeinsame Metasprache synonym sind. (Für die in den §§ 7, 8 behandelten Fragen wäre eine breitere Darstellung, bes. im Hinblick auf die nur scheinbar einfachen Beweise der genannten Theoreme, wünschenswert.)

Gert H. Müller.

Adjukiewicz, Kazimierz: Conditional sentence and material implication. *Studia logica* 4, 117—134 [Polnisch], 135—150 [Englisch] u. russ. Zusammenf. 151—153 (1956).

Es soll gezeigt werden, daß Alternative und materielle Implikation die einzig annehmbaren Präzisierungen der umgangssprachlichen Verknüpfungen „oder“ und „wenn . . . , so . . .“ sind. Dazu wird einerseits auf die Unzuträglichkeiten anderer Möglichkeiten hingewiesen und andererseits ausgeführt, daß das Widerstreben, gewisse Sätze zu bejahen, welche als Alternativen wahr sind (wie: „Dieser Bleistift ist rot oder grün“, falls bekannt, welches der Fall), dadurch erklärt werden kann, daß Aussagen nicht nur etwas behaupten sondern auch etwas ausdrücken (im obigen Fall: unser Nichtwissen, welche der beiden Möglichkeiten zutrifft). E. Specker.

Rose, Alan: Formalisation du calcul propositionnel implicatif à \aleph_0 valeurs de Łukasiewicz. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 1183—1185 (1956).

Ausgehend vom Vollständigkeitssatz des Verf. und J. B. Rosser's für das Łukasiewicz'sche Axiomensystem des \aleph_0 -wertigen Aussagenkalküls [Trans. Amer. math. Soc. 87, 1—53 (1958)] wird gezeigt, daß aus den vier ersten Axiomenschemata (welche mit Implikation allein ausgedrückt werden können) mit modus ponens alle allgemeingültigen Aussagen herleitbar sind, welche die Implikation als einzige Verknüpfung enthalten.

E. Specker.

Rose, Alan: Formalisation du calcul propositionnel implicatif à m valeurs de Łukasiewicz. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 1263—1264 (1956).

Verf. zeigt, daß sein vollständiges Axiomensystem für den \aleph_0 -wertigen Aussagenkalkül mit Implikation als einziger Verknüpfung (vgl. vorstehendes Ref.) durch Hinzufügung eines geeignet gewählten Axiomenschemas in ein solches des entsprechenden m -wertigen Kalküls übergeht.

E. Specker.

Beth, E. W.: Semantic construction of intuitionistic logic. Med. Nederl. Akad. Wet., Afd. Lett., n. R. 19, Nr. 11, 357—388 (1956).

This important paper discusses the completeness of a certain formalization (PC) of intuitionistic predicate logic similar to Gentzen's cut free calculus of sequents (this Zbl. 10; 145, 146). Numerals are used as free variables. Two obvious properties of (PC) are these: (I) A proof is a finitary tree where each node is a sequent $X \vdash Y$ with at most two branches leading to its 'parent(s)' $X_1 \vdash Y_1$ and, possibly, $X_2 \vdash Y_2$, from which $X \vdash Y$ is obtained by elementary inferences of (PC); each branch of a proof tree leads to a node with a 'fundamental' sequent $[K, L, M] \vdash L$, which are the only segments that are proved outright. (II) If $X \vdash Y$ is not provable then, classically speaking, there is an infinite 'counter' tree of unprovable formulae of (PC) whose nodes and parents are related dually to (I): e. g. if in (I) $(A \vee B) \vdash C$ has the two parents $A \vdash C$ and $B \vdash C$, then in a counter tree either $A \vdash C$ or $B \vdash C$ is a parent and not both, since the unprovability of one of them implies that of $(A \vee B) \vdash C$; naturally, fundamental sequents do not occur on a counter tree. The author uses two trees instead, where antecedent and consequent of a sequent occur at homologous positions of the two trees. For each sequent $X \vdash Y$ he constructs a 'universal' pair of trees $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ depending on X and Y such that all candidates for proof trees and counter trees are subsets of $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$: they can be selected from $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ in an obvious way by a recursively bounded function $h(n)$, and are denoted $\mathfrak{M}^h, \mathfrak{N}^h$. — Now the author defines validity of a formula X on a tree \mathfrak{M} ($\mathfrak{M} \vdash X$) recursively: $\mathfrak{M} \vdash X$ means (i) if X is prime, the formula X occurs at some node of each branch of \mathfrak{M} , (ii) if X is $\neg Y$ then, for each subtree \mathfrak{M}' of \mathfrak{M} , not $\mathfrak{M}' \vdash Y$, (iii) if X is $Y \rightarrow Z$ then, for each subtree \mathfrak{M}' of \mathfrak{M} , if $\mathfrak{M}' \vdash Y$ then $\mathfrak{M}' \vdash Z$, (iv) if X is $Y \& Z$ then $\mathfrak{M} \vdash Y$ and $\mathfrak{M} \vdash Z$, (v) if X is $(x) Y(x)$ then for each numeral n , $\mathfrak{M} \vdash Y(n)$, (vi) if X is $Y \vee Z [(E x) Y(x)]$ then \mathfrak{M} is the union of finitely many subtrees \mathfrak{M}_i , such that, for each i , either $\mathfrak{M}_i \vdash Y$ or $\mathfrak{M}_i \vdash Z$ [for suitable k_i , $\mathfrak{M}_i \vdash Y(k_i)$]. This definition is equivalent to the topological treatment of the intuitionistic calculus introduced by Tarski (this Zbl. 20, 337) and extended by Mostowski (this Zbl. 31, 193) if the set of branches of \mathfrak{M} is considered as a topological space and the branches going through a given finite set of nodes are the elementary open neighbourhoods of the space. The author's basic lemma is this: if \mathfrak{M}^h and \mathfrak{N}^h are a pair of counter trees for the sequent $X \vdash Y$, then $\mathfrak{M}^h \vdash X$, but not $\mathfrak{M}^h \vdash Y$ (\mathfrak{N}^h plays an auxiliary role). Completeness with respect to the author's definition of validity follows easily by classical methods. Since the existence of counter trees for an (unprovable) sequent $X \vdash Y$ does not generally hold intuitionistically, the author tries to give a different intuitionistic proof, based on an

alleged generalization of Brouwer's proof of the fan theorem, namely that, intuitionistically, $\mathfrak{M} \vdash X$ can only be established if it can also be established by a computation which uses a finite trunk of \mathfrak{M} only; this is illustrated by the definition of $\mathfrak{M} \vdash X$ when X is $(\exists x) Y(x)$ and Y a prime formula, which is equivalent to: For all paths α on the (finitary) tree \mathfrak{M} , there is a node $\alpha(m)$ and a numeral k such that the formula $Y(k)$ appears at $\alpha(m)$. By the fan theorem there is a bound for m and hence for k . But the assertion is quite implausible for arbitrary X , and certainly not established.

Reviewer's comments. There are several technical defects in the paper. Def. 7.3 (p. 370) is incomplete since it does not deal with the case when the first formula of C is prime, nor when the first formula of D is a prime formula, a negation, an implication, or a generalization. The crucial assertion (B'') on p. 372 in the proof of the basic lemma is false, e. g. if applied to the sequent $\neg \neg A \vdash A$; the words 'on ... of' must be deleted. The induction arguments on p. 373, 374 are not conclusive and more detail is needed, especially for rules (i^a) and (v^a) on p. 362. However, the reviewer has constructed a rough proof of the lemma. — A conceptual defect is that the definition of validity is not justified. If \mathfrak{A} is a formula of (PC), whose predicate symbols are P_1, \dots, P_k , a proof of (full) completeness should provide an intuitionistically acceptable theory T and a domain D of individuals defined in T such that: if \mathfrak{A} holds for all P ranging over predicates of T and individual variables in \mathfrak{A} ranging over D , then \mathfrak{A} is provable in (PC). To justify this definition of validity we take for T the theory of absolutely free choice sequences (a. f. s., not including completely defined functions) which is obtained by adding to Heyting's axioms [S.-Ber. Preuß. Akad. Wiss., Berlin, math.-naturw. Kl. 1930, 158—169 (1930)] which apply to both a. f. s. and completely defined functions, the principle: if α is the only free variable for a. f. s. in $P(\alpha)$, then $P(\alpha) \rightarrow (\exists n)(\beta)\{ (x) [x \leq n \rightarrow \alpha(x) = \beta(x)] \rightarrow P(\beta) \}$. In this case, if the definition of $\mathfrak{M} \vdash X$ is interpreted intuitionistically with 'a. f. s. α taken from $\mathfrak{M} (\alpha \vdash \mathfrak{M})$ ' replacing 'branch', then $\mathfrak{M} \vdash X \leftrightarrow (\alpha \vdash \mathfrak{M}) X^*$ is a theorem of T where X^* is obtained from X by replacing each prime formula $P(x_1, \dots, x_n)$ by the statement: the formula $P(0^{(x_1)}, \dots, 0^{(x_n)})$ occurs at some node of $\alpha \vdash \mathfrak{M}$, and where the individual variables of X range over the positive integers. The (corrected) proof of the basic lemma is intuitionistically valid, and we get a completeness result if a counter tree \mathfrak{M}^h can be effectively constructed, e. g. in decidable subtheories of (PC). Perhaps, if h is taken to range over both a. f. s. and completely defined functions, the weak completeness theorem can be proved intuitionistically: if \mathfrak{A} is not provable in (PC) then $\neg (h)(\alpha \vdash \mathfrak{M}^h) \mathfrak{A}^*$. (Weak completeness is the double negation of full completeness.) The restriction of α to a. f. s. excluding completely defined functions, does not make the completeness proof inconclusive since the theory of a. f. s. is intuitionistically meaningful and logic is intended to apply to all such theories: so, if, for suitable \mathfrak{M} , we have $\neg (\alpha \vdash \mathfrak{M}) X^*$ in T , this is a good enough reason why X should not be provable in (PC).

In conclusion, even weak completeness has not been established intuitionistically, but it seems more likely to follow from a development of the author's classical proof than of his alleged intuitionistic proof. If the (classical) results of the present paper are accepted we have the following technical advances over previous work. On the topological side, an unprovable formula of (PC) is not valid (on Mostowski's interpretation) in some closed subset of Cantor's discontinuum, which is the simplest known class of spaces with this property. On the methodological side it extracts from Gentzen's very transparent cut free formalization of (PC) a completeness proof just as in Schütte's elegant treatment of the classical calculus (this Zbl. 71, 8). In view of the basic and technical interest of the results it is most desirable that a detailed proof be made available.

G. Kreisel.

Mal'cev (Malcev), A. I.: Subdirect unions of models. Doklady Akad. Nauk SSSR 109, 264—266 (1956) [Russisch].

Verf. untersucht Klassen von Modellen $[A; P_1, P_2, \dots]$ im Sinne von Tarski (dies. Zbl. 58, 247). Er beweist zunächst notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine arithmetische Klasse mit einem Modell auch alle zu diesem homomorphen Modelle enthält, sowie dafür, daß eine abstrakte Klasse mit irgendwelchen Modellen auch stets alle deren subdirekte Produkte enthält. Der Hauptsatz der Arbeit ist dann die folgende hinreichende Bedingung für die subdirekte Zerlegbarkeit aller Modelle einer Klasse K in K -subdirekt-unzerlegbare Modelle: K ist charakterisiert durch ein System von Axiomen der Form (1) $(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ und (2) $(x_1) \dots (x_m) \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_m)$, wobei die Q_i beliebige Quantoren sind, $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ aus den Grundrelationen $P_s(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_s}})$ nur durch $\&$ und \vee , $\mathfrak{B}(x_1, \dots, x_m)$ aus den Grundrelationen nur durch $\&$, \vee , $-$ zusammengesetzt sind. — Verf. merkt noch an, daß es bei dieser (und ähnlichen) Frage(n) wichtig ist, welche Relationen als Grundrelationen betrachtet werden, z. B. kann man nicht statt der P_i einfach ihre Negationen als Grundrelationen nehmen. So ist z. B. die Klasse der gerichteten Mengen von der oben genannten Form, wenn man $<$ als Grundrelation nimmt. Nimmt man dagegen \leq als Grundrelation, so gestattet jede gerichtete Menge eine echte subdirekte Zerlegung. E. Burger.

Ribeiro, Hugo: The notion of universal completeness. Portugaliae Math. 15, 83—86 (1956).

Sei Σ eine widerspruchsfreie Menge von Sätzen einer Theorie T eines relationalen Systems (vgl. Tarski, dies. Zbl. 58, 247) in Standard Formalisierung (vgl. Tarski, Mostowski, Robinson, Undecidable Theories, dies. Zbl. 53, 4). Mit a_n sei ein Satz bezeichnet, der besagt, daß es höchstens n verschiedene Elemente gibt. a_n ist bekanntlich schon im Prädikatenkalkül mit Gleichheit — also ohne Benutzung von im allgemeinen in Σ vorkommenden weiteren nicht logischen Konstanten — ausdrückbar. Verf. führt nun den folgenden Vollständigkeitsbegriff ein: Σ heißt hinsichtlich der Hinzufügung von reinen Allsätzen (aus dem Ausdrucksbereich von T) vollständig genau dann, wenn für jeden solchen Satz φ gilt: φ ist aus Σ ableitbar oder es gibt ein $n \geq 0$, so daß die Äquivalenz $\varphi \leftrightarrow a_n$ aus Σ ableitbar ist. Z. B. ist, wie C. H. Langford schon früher auf anderem Wege zeigte, die Theorie der Ketten (chain) im obigen Sinne vollständig. Verf. weist auf einige einfache Sätze über seinen Vollständigkeitsbegriff hin und stellt eine umfangreichere Untersuchung darüber in Aussicht. Gert H. Müller.

Rosser, J. Barkley: The relative strength of Zermelo's set theory and Quine's New Foundations. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 289—294 (1956).

Vergleich von Zermelo's Mengenlehre und Quine's New Foundations, sowie Bericht über Dissertationen, die unter Leitung des Verf. entstanden sind (vgl. nachstehendes Ref.). E. Specker.

Quine, W. V.: Unification of universes in set theory. J. symbolic Logic 21, 267—279 (1956).

Wird die einfache Typentheorie nach dem üblichen Verfahren einsortig dargestellt, so sind Typenprädikate T_0 (zutreffend auf Individuen), T_1, \dots einzuführen. Verf. zeigt, wie diese Prädikate durch die ϵ -Relation definiert werden können. Er definiert dazu zunächst ein Prädikat „ $x P T y$ “ (x hat einen um 1 kleineren Typus als y) durch „ $(Ez) (Ew) (x \in z \& z \in w \& y \in w)$ “; „ $T_0(x)$ “ ergibt sich dann als „ $(y) \sim y P T x$ “ und die weiteren Typenprädikate können leicht rekursiv definiert werden. Darauf wird untersucht, wie sich auf Grund dieses ein möglichst einfaches Axiomensystem aufstellen läßt, und insbesondere auch die Möglichkeit in Betracht

gezogen, die Nullklassen aller Typen zu identifizieren. Den Schluß der Arbeit bildet die kurze Diskussion einer funktionalen Logik. *E. Specker.*

Orey, Steven: On the relative consistency of set theory. *J. symbolic Logic* **21**, 280—290 (1956).

Es sei ML'' das System, welches aus dem System ML (W. V. Quine, *Mathematical Logic*, dies. Zbl. **44**, 247) durch Hinzufügung der beiden folgenden Axiome hervorgeht: A_1 . Die Klasse der endlichen Ordnungszahlen ist eine Menge. (Dies ist darum nicht selbstverständlich, weil diese Klasse imprädikativ mit Hilfe einer Klassenvariablen definiert ist.) A_2 . Steht eine Klasse C von Ordnungszahlen in 1—1-deutiger Beziehung zu einer Menge von Ordnungszahlen, so gibt es eine solche Ordnungszahl α , daß alle Elemente von C kleiner sind als α . Entsprechend der Methode, mit welcher Gödel in dem von ihm betrachteten System Σ die relative Widerspruchsfreiheit des Auswahlaxioms bewiesen hat, wird in ML'' ein Modell von Σ konstruiert. Ähnliche Konstruktionen sind auch in verschärften Versionen von New Foundations und der einfachen Typentheorie möglich. Letzteres ist schon von C. D. Firestone, *Sufficient conditions for the modelling of axiomatic set theory* (Doctoral dissertation, Cornell University, 1947) durchgeführt worden. Eines der Zusatzaxiome widerspricht dabei allerdings dem Auswahlaxiom; Verf. weist darauf hin, daß es durch ein Axiom ersetzt werden kann, welches die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen fordert. *E. Specker.*

Clarke, A. B.: A theorem on simple cardinal algebras. *Michigan math. J.* **3**, 113—116 (1956).

(Hinsichtlich der gebrauchten Begriffe vgl. Tarski, dies. Zbl. **41**, 345.) Sei $\langle A, +, \Sigma \rangle$ eine kardinale Algebra; eine Teilmenge $B \subseteq A$ heißt ein Ideal von A , wenn B gegenüber Σ abgeschlossen ist und für $b \in B$ und $a \leq b$ auch $a \in B$ gilt. Hier ist $a \leq b$ durch $(\exists x) (x \in A \ \& \ b = a + x)$ erklärt. A heißt einfach, wenn es kein nicht-triviales echtes Ideal enthält. Verf. beweist: Wenn A eine einfache kardinale Algebra ist, und $a < \infty \ b \rightarrow (\exists n) (a \leq n b)$ gilt, dann ist A isomorph einer Subalgebra der Algebra der nicht-negativen reellen Zahlen einschließlich ∞ . *Gert H. Müller.*

Sprinkle, H. D.: A development of cardinals in "the consistency of the continuum hypothesis". *Proc. Amer. math. Soc.* **7**, 289—291 (1956).

Verf. entwickelt im Rahmen des Systems der Mengenlehre von K. Gödel (*The consistency of the continuum hypothesis*, dies. Zbl. **51**, 289) die Theorie der Kardinalzahlen ohne Verwendung des Auswahlaxioms. Dies gelingt dadurch, daß als Kardinalzahlen die Ordinalzahlen, die auch Anfangszahlen sind, erklärt werden. *Gert H. Müller.*

Robinson, Raphael M.: Arithmetical representation of recursively enumerable sets. *J. symbolic Logic* **21**, 162—186 (1956).

Davis (this Zbl. **51**, 245) has shown that every recursively enumerable set S can be represented in the form

$$y \in S \leftrightarrow (\exists b) (w) (w \leq b \rightarrow (\exists x_1, \dots, x_k) (P(y, b, w, x_1, \dots, x_k) = 0))$$

where $P(y, b, w, x_1, \dots, x_k)$ is a polynomial with integer coefficients and k is fixed for all r. e. sets. Davis gave no estimate for k . In this paper it is shown that it is possible to take $k = 4$. In the other direction all that the author can show is that it is not possible to take $k = 0$. The author is unable to make use of Davis's result but develops an independent and rather intricate method of converting the definitions of primitive recursive functions into arithmetic form. His final result, theorem G, is

that there is a polynomial $P_0(n, y, b, w, a, r, s, t)$ in eight variables with integer coefficients, such that for every r. e. set S there exists n such that

G a: $y \in S \leftrightarrow (\exists b) (w) (\exists a, r, s, t) (P_0(n, y, b, w, a, r, s, t) = 0)$

G b: $y \in S \leftrightarrow (\exists b) (w) (w \leq b \rightarrow (\exists a, r, s, t) (P_0(n, y, b, w, a, r, s, t) = 0))$

G c: $y \in S \leftrightarrow (\exists b) (w) (w \leq b \rightarrow (\exists a, r, s, t) (a \leq b \& r \leq b \& s \leq b \& t \leq b \& P_0(n, y, b, w, a, r, s, t) = 0))$.

G b is the above mentioned result.

J. C. Shepherdson.

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

Mirsky, L.: The norms of adjugate and inverse matrices. Arch. der Math. 7, 276—277 (1956).

Verf. gibt einen kurzen Beweis eines Satzes, den H. Richter kürzlich bewiesen hat (dies. Zbl. 56, 14). Er zeigt, daß dieser Satz fast unmittelbar aus dem über die polare Zerlegung von Matrizen und einer bekannten Ungleichung für die elementaren symmetrischen Funktionen folgt.

W. Quade.

Marcus, M. and J. L. McGregor: Extremal properties of Hermitian matrices. Canadian J. Math. 8, 524—531 (1956).

Es sei A eine n -reihige, quadratische und positiv definite Hermitesche Matrix mit den Eigenwerten $0 < \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$. Verff. drücken für $1 \leq r \leq k \leq n$ die r -te elementarsymmetrische Funktion E_r von $\alpha_n, \dots, \alpha_{n-k+1}$ und von $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ durch das Maximum bzw. Minimum einer Summe über Determinanten von inneren Produkten der Vektoren x_n und $A x_n$ aus, wobei (x_1, \dots, x_k) alle Orthonormalsysteme des n -dimensionalen unitären Raumes durchläuft. Als Corollaria erhält man u. a. den Satz von A. Ostrowski $\min E_r((A x_1, x_1), \dots, (A x_k, x_k)) = E_r(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ und die Gleichung $\max E_r((A x_1, x_1), \dots, (A x_k, x_k)) = \binom{k}{r} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \alpha_{n-j+1} \right)$. Weiter werden für die elementarsymmetrischen Funktionen von Eigenwerten einer Summenmatrix Abschätzungen angegeben.

H.-J. Kowalsky.

Pines, Samuel: Iteration in semidefinite eigenvalue problems. J. aeronaut. Sci. 23, 380—381 (1956).

Zur Lösung des Eigenwertproblems $(C - w^2 M) x = 0$ mit positiv definiter bzw. semidefiniter Matrix M bzw. C der Ordnung n und des Ranges n bzw. $n - r$, wobei in C die ersten r Zeilen und Spalten Null sind, wird vorgeschlagen, das äquivalente Problem $(C^* - w^2 M) x = 0$ nach einer der üblichen Methoden zu behandeln; die nichtsinguläre Matrix C^* geht aus C hervor, indem die r Nullzeilen von C durch die entsprechenden Zeilen von M ersetzt werden.

J. Weissinger.

Gruppentheorie:

Ljapin, E. S.: Die potentielle Umkehrbarkeit von Elementen in Halbgruppen. Mat. Sbornik, n. Ser. 38 (80), 373—388 (1956) [Russisch].

Das Problem der Einbettung von Halbgruppen in Gruppen wird hier in einem abschwächenden Sinn verallgemeinert. Ein Element X einer Halbgruppe \mathfrak{H} heiße umkehrbar, wenn für jedes $A \in \mathfrak{H}$ Y und Z mit $YX = A = XZ$ existieren, dagegen potentiell umkehrbar, wenn es eine \mathfrak{H} enthaltende Halbgruppe \mathfrak{B} gibt, in der X umkehrbar ist. Man sieht sofort, daß die Menge der umkehrbaren Elemente von \mathfrak{H} entweder leer ist oder eine Gruppe bildet. Potentiell umkehrbare Elemente sind offenbar kürzbare Elemente, d. h.: Für jedes A haben die Gleichungen $XS = A = S'X$ eine oder keine Lösung in \mathfrak{H} . Der wesentliche Inhalt dieser Arbeit ist der Beweis, daß diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist. Dies geschieht durch explizite

und sehr formelle Konstruktion einer Oberhalbgruppe \mathfrak{F} , die in einem gewissen Sinn einzig und minimal ist. Zum Schluß werden noch Beispiele angegeben, deren Elemente unendliche Matrizen sind. Verf. bemerkt, daß aus der potentiellen Umkehrbarkeit aller Elemente einer Halbgruppe (d. h. Halbgruppe mit Kürzungsregeln) nicht die Einbettbarkeit in eine Gruppe folgt, da es nach Mal'cev (dies. Zbl. 15, 388; Ref. verweist noch auf dies. Zbl. 22, 311; 23, 303) solche nicht einbettbare Halbgruppen gibt. [Bem. des Ref.: Das Ergebnis der Arbeit läßt sich ziemlich leicht mit den Methoden der oben zitierten Arbeiten von Mal'cev, oder noch einfacher, denen des Ref. (dies. Zbl. 55, 15) ableiten.] *D. Tamari.*

Fox, Ralph H.: Free differential calculus. III: Subgroups. Ann. of Math., II. Ser. 64, 407—419 (1956).

(Teil II s. dies. Zbl. 55, 17.) Bei der Bestimmung der Erzeugenden und definierenden Relationen einer Untergruppe F der Gruppe G unterscheidet man Relationen erster und zweiter Art. Es wird gezeigt, daß die Relationen erster Art eine Gruppe F^* bestimmen, die das freie Produkt von F mit einer freien Gruppe T ist und daß sich F^* ohne Auswahl eines Repräsentantensystems der Nebengruppen von F in G angeben läßt. Dadurch wird eine elegante Anwendung des freien Differentialcalculus zur Bestimmung von F^* möglich. Die neue Methode wird insbesondere auf die cyclischen Überlagerungen von Knotenaußenräumen und Behandlung des Alexanderpolynoms von Knoten angewendet. *K. Reidemeister.*

Eckmann, Beno: Zur Cohomologietheorie von Räumen und Gruppen. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 170—177 (1956).

The author gives an exposition of that part of homological algebra particularly developed by him in his theory of complexes with operators. Applications, both grouptheoretic and topological, are given. (Cf. this Zbl. 50, 172; 52, 20).

W. H. Cockcroft.

Plotkin, B. I.: Einige Fragen der Theorie der Gruppen ohne Torsion. Ukrain. mat. Žurn. 8, 325—329 (1956) [Russisch].

Eine Untergruppe H einer Gruppe G heißt bekanntlich isoliert, wenn jede zyklische Untergruppe von G entweder ganz in H liegt oder mit H nur das 1-Element gemeinsam hat. Der Durchschnitt aller isolierten Untergruppen, die eine Menge H enthalten, heißt der Isolator $I(H)$ von H in G . In § 1 dieser Arbeit untersucht Verf. die Gruppe $M(G)$, die als Durchschnitt aller maximalen isolierten Untergruppen von G definiert ist. Es erweist sich, daß diese Gruppe eine Reihe von Eigenschaften hat, die denen der Frattini-Untergruppe $\Phi(G)$ (Durchschnitt aller maximalen Untergruppen) analog sind. Bezeichnet man z. B. eine Menge von Elementen $g_\alpha, g_\beta, \dots, g_\gamma$ für die $I(g_\alpha, g_\beta, \dots, g_\gamma) = G$ ist, als eine Basis von G — im Falle einer torsionsfreien abelschen Gruppe stimmt dies mit der üblichen Definition überein —, so zeigt sich, daß eine torsionsfreie Gruppe mit endlicher Basis immer echte maximale isolierte Untergruppen besitzt; daß in einer freien abelschen Gruppe endlichen Ranges $M(G) = 1$ ist; und daß $M(G)$ bei einer beliebigen Gruppe G genau aus denjenigen Elementen von G besteht, die aus jeder Basis, in der sie auftreten, weggelassen werden können. — Eine R -Gruppe ist eine torsionsfreie Gruppe, in der jede abelsche Untergruppe einen abelschen Isolator hat (oder: in der die Ausziehung von Wurzeln, wenn überhaupt möglich, dann eindeutig ist), und eine R^* -Gruppe ist eine R -Gruppe, deren torsionsfreie homomorphe Bilder ebenfalls R -Gruppen sind. Verf. beweist: Wenn eine R^* -Gruppe G echte maximale isolierte Untergruppen besitzt und diese sämtlich Normalteiler sind, dann enthält $M(G)$ die Kommutatorgruppe von G . Wenn eine R^* -Gruppe G eine endliche rationale Reihe besitzt, dann ist $M(G)$ nilpotent. — In § 2 handelt es sich um Verbands-Isomorphismen von torsionsfreien Gruppen. Verf. gibt zunächst eine rein verbandstheoretische Charakterisierung der nilpotenten torsionsfreien Gruppen endlichen Ranges. Hieraus ergibt sich, daß die aufsteigende

und absteigende Zentralreihe und die Klasse einer solchen Gruppe verbandsinvariant sind. Ferner beweist Verf., daß eine endlich erzeugte frei nilpotente Gruppe zu jedem verbandsisomorphen Bild auch gruppenisomorph ist, so daß die endlich erzeugten frei nilpotenten Gruppen, genau wie die freien abelschen und die freien Gruppen, durch ihre Untergruppen-Verbände eindeutig bestimmt sind. Bezüglich des letzteren siehe auch: Sadovschij, dies. Zbl. 79, 253.

K. A. Hirsch.

Groot, J. de: An isomorphism criterion for completely decomposable abelian groups. Math. Ann. 132, 328—332 (1956).

Zwei abelsche Gruppen, deren jede zu einer Untergruppe der anderen isomorph ist, brauchen nicht selbst isomorph zu sein. Verf. beweist aber, daß wenn die fraglichen Gruppen vollständig zerlegbar sind, d. h. direkte Summen von Gruppen des Ranges 1, und die fraglichen Untergruppen Servanz-Untergruppen sind (insbesondere wenn sie direkte Faktoren sind), die Gruppen isomorph sein müssen. Sobald die Bedingung „Rang 1“ durch „Rang ≤ 2 “ ersetzt wird, gilt der Satz nicht mehr. (Ein Gegenbeispiel findet man in einer weiteren Arbeit des Verf., dies. Zbl. 79, 35). Der Beweis des Satzes beruht auf einer Zerlegung der Gruppen in drei direkte Summanden: den torsionsfreien Teil, den Teil, der die Summanden vom Typ (p^∞) umfaßt, und schließlich den Teil, der die endlichen primären zyklischen Summanden umfaßt. Für jeden der drei Teile wird die Isomorphie einzeln bewiesen.

K. A. Hirsch.

Jaffard, Paul: Réalisation des groupes complètement réticulés. Bull. Soc. math. France 84, 295—305 (1956).

Un groupe complètement réticulé G est un groupe abélien réticulé dans lequel tout ensemble A majoré possède un majorant minimum $\sup(A)$. Le problème résolu ici est celui du plongement de G dans un produit direct $\Gamma = \prod_{i \in I} G_i$ de groupes

totalemt ordonnés G_i de façon que les opérations $\inf(A)$ et $\sup(A)$ coïncident dans Γ et dans G . L'A. montre que le problème n'est pas toujours possible lorsque A est infini. Lorsqu'il est possible, on dit que G admet une réalisation complètement coréticulée. Les conditions de possibilité s'expriment et se démontrent aisément au moyen de la théorie des filets introduite par l'A. (ce Zbl. 51, 13): il faut et il suffit que tout filet soit supérieur ou égal à un filet minimal. On en déduit que le groupe complètement réticulé G admet une réalisation complètement réticulée si et seulement si G admet une réalisation irréductible, c. à d. si pour tout $\alpha \in I$, l'homomorphisme canonique de G dans $\Gamma_\alpha = \prod_{i \neq \alpha} G_i$ admet un noyau non nul. De

plus, cette réalisation, quand elle existe, est unique et les groupes totalement ordonnés qui la définissent sont isomorphes au groupe additif des entiers relatifs ou au groupe additif des nombres réels. L'absence de filet minimal dans G est une condition suffisante pour qu'il n'existe aucun homomorphisme complètement réticulé de G sur un groupe totalement ordonné. Cette remarque est utilisée par l'A. pour construire un exemple au moyen du groupe complètement réticulé constitué par les fonctions numériques continues sur un espace topologique de Stone non fini.

L. Lesieur.

Hall, P. and Graham Higman: On the p -length of p -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem. Proc. London math. Soc., III. Ser. 6, 1—42 (1956).

Diese außerordentlich interessante Arbeit bringt wichtige Resultate über p -auflösbare Gruppen mit bedeutsamen Folgerungen für das Burnside'sche Endlichkeitsproblem. p -auflösbare Gruppen: p sei eine Primzahl; eine Gruppe heiße, wie üblich, eine p -Gruppe, wenn ihre Ordnung eine Potenz von p ist; eine Gruppe heiße eine p' -Gruppe, wenn ihre Ordnung eine zu p prime Zahl ist; nun wird eine Gruppe G als p -auflösbar bezeichnet, wenn jeder ihrer Kompositionsfaktoren entweder eine p -Gruppe oder eine p' -Gruppe ist. Für eine p -auflösbare Gruppe G kann man eine

aufsteigende p -Reihe definieren: $1 = P_0 \leq N_0 < P_1 < N_1 \cdots < P_l \leq N_l = G$ durch die Forderung: N_k/P_k ist der größte p' -Normalteiler von G/P_k , P_{k+1}/N_k ist der größte p -Normalteiler von G/N_k . Ist $N_l = G$, so wird l als die p -Länge von G bezeichnet, $l = l_p (= l_p(G))$. Es ist das erste Ziel der Arbeit, die p -Länge von G mit Eigenschaften der p -S.-Gruppe von G in Beziehung zu setzen. Als solche Eigenschaften einer p -S.-Gruppe P von G betrachten die Verff. 1. b_p , wobei p^{b_p} die Ordnung von P ist; 2. c_p , die Klasse von P ($=$ Länge der auf- bzw. absteigenden Zentralreihe); 3. d_p , die Länge der Kommutatorreihe von P . 4. e_p , den Exponenten von P , d. i. die kleinste natürliche Zahl e_p , die für jedes $a \in P$ erfüllt: $a^{p^{e_p}} = 1$. Es ergeben sich Sätze wie: „Ist p eine ungerade Primzahl und G eine p -auflösbare Gruppe, so ist 1. $d_p \geq l_p$; 2. $e_p \geq l_p$, wenn p keine Fermatsche Primzahl ist, $e_p \geq \frac{1}{2}(l_p + 1)$, wenn p eine Fermatsche Primzahl (d. h. von der Form $2^n + 1$) ist. Diese Ungleichungen sind die bestmöglichen“. Auch zwischen b_p und l_p , sowie c_p und l_p ergeben sich Ungleichungen, aber diese sind bestmögliche nur für den Fall, daß p keine Fermatsche Primzahl ist: „In einer p -auflösbaren Gruppe ist 1. $b_p \geq \frac{1}{2} l_p (l_p + 1)$, 2. $c_p \geq l_p$ “. Für auflösbare Gruppen G wird bewiesen: „Ist d die Länge der Kommutatorreihe von G , so ist $d \leq \sum_p d_p l_p$, wobei die Summation über alle die Ordnung von G teilenden Primzahlen zu erstrecken ist“. Ferner: „ G sei auflösbar und von der Ordnung $n_1 \cdot n_2 \cdots n_s$, $(n_c, n_k) = 1$, $c \neq k$, und zu jedem n_i gebe es in G eine nilpotente Untergruppe von der Ordnung n_i und der Klasse k_i , $i = 1, 2, \dots, s$. Dann ist $d \leq k_1 + k_2 + \cdots + k_s$. Also speziell, wenn man die Sylowgruppen von G heranzieht: $d \leq \sum_p c_p$ “. Das Hauptresultat von § 2 ist: „ H sei eine p -auflösbare lineare Gruppe über einem Körper der Charakteristik p , der maximale p -Normalteiler von H sei 1. Ist $g \in H$ ein Element von der Ordnung p^m , so ist die Minimalgleichung von g : $(x - 1)^r = 0$, wobei $r = p^m$, wenn $p \neq 2$ und p keine Fermatsche Primzahl ist, bzw. $p^{m-m_0} (p^{m_0} - 1) \leq r \leq p^m$, wenn $m_0 < m$ die kleinste natürliche Zahl, für die $p^{m_0} - 1$ eine die Ordnung von H teilende Primzahlpotenz q^k mit $c_q(H) > 1$ ist.“ Dieses Ergebnis findet Anwendung in § 3, um Ungleichungen für l_p zu beweisen. Die in den ersten drei Paragraphen erhaltenen Resultate gestatten es den Verff., in § 4 einen der weitestreichenden Sätze zu dem Burnsideschen Endlichkeitsproblem zu beweisen. S_n sei die Behauptung: Zu jeder natürlichen Zahl k gibt es eine natürliche Zahl $s_{n,k}$ von der Eigenschaft, daß jede aus k Elementen erzeugbare auflösbare Gruppe von dem Exponenten n höchstens die Ordnung $s_{n,k}$ hat. Verff. können zeigen: „ S_n ist richtig, wenn für jede n teilende Primzahlpotenz q die Behauptung S_q richtig ist.“ Da S_2, S_3, S_4 richtig sind und jede Gruppe, in deren Exponenten höchstens zwei verschiedene Primzahlen aufgehen, auflösbar ist, folgt: S_6 und S_{12} sind richtig. Die Ordnung der allgemeinen endlichen aus k Elementen erzeugten Gruppe vom Exponenten 6 erweist sich als $2^a \cdot 3^{b + \binom{b}{2} + \binom{b}{3}}$, wobei $a = 1 + (k - 1) 3^{k + \binom{k}{2} + \binom{k}{3}}$, $b = 1 + (k - 1) 2^p$ ist. Diese Gruppe enthält als Faktorgruppe jede endliche, aus k Elementen erzeugbare Gruppe vom Exponenten 6.

O. Grün.

Itô, Noboru et Akiko Ôhara: Sur les groupes factorisables par deux 2-groupes cycliques. I: Cas où leur groupe des commutateurs est cyclique. II: Cas où leur groupe des commutateurs n'est pas cyclique. Proc. Japan Acad. 32, 736—740, 741—743 (1956).

I: Die Hauptergebnisse sind: (Théorème 2) Sei G faktorisiert durch zwei zyklische 2-Gruppen A und B . Ist die Kommutatorgruppe G' zyklisch und existiert eine

zyklische Untergruppe $N > G'$ mit $N \neq G'$, so existiert auch ein zyklischer Normalteiler $L > G'$ derart, daß G/L zyklisch ist. (Théorème 3) Sei G faktorisiert durch zwei zyklische 2-Gruppen A und B . Ist die Kommutatorgruppe G' zyklisch und existiert keine zyklische Untergruppe N mit $N > G'$, $N \neq G'$, so ist G/G' abelsch vom Typ $(2^2, 2)$. Modulo $(G')^2$ läßt sich G beschreiben durch die Relationen $a^{2^2} = b^2 = c^2 = 1$, $(a, b) = c$. Théorème 1 ist durch unglückliche Typen entstellt; es muß heißen: Soit G un p -groupe, où $p \geq 2$. Si son groupe des commutateurs G' est cyclique et s'il existe un sous-groupe cyclique N tel que $N > G'$ et $N \neq G'$, on peut trouver un sous-groupe cyclique L tel que l'on ait $L \geq N$ et $L \leq \Phi(G)$, ou $\Phi(G)$ est le groupe de Frattini de G . — II: Hauptziel der Verf. ist folgender Satz: Ist G das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen und ist die Kommutatorgruppe G' nicht zyklisch, so hat G/G' einen Typ $(2^a, 2)$. Zum Beweis dieses Satzes wird folgender Hilfssatz vorausgeschickt: Sei G das Produkt der beiden zyklischen 2-Gruppen $A = \langle a \rangle$ und $B = \langle b \rangle$. Dann gilt $(R_{ij}) : (a^i, b^j) = (a, b)^j d^i$, wobei d erzeugendes Element eines in $A \cap G'$ (oder $B \cap G'$) liegenden Normalteilers von G ist. Der Beweis dieses Hilfssatzes ist nicht korrekt, denn bei der Herleitung von $R_{1,j+1}$ aus $R_{1,j}$ wird $R_{1,2}$ schon benutzt; der Schritt von $R_{1,1}$ zu $R_{1,2}$ bleibt daher unbegründet.

B. Huppert.

Szász, F.: On groups every cyclic subgroup of which is a power of the group. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 6, 475—477 (1955).

Wenn in einer Gruppe G jede zyklische Untergruppe eine Potenz von G ist, so ist G zyklisch. Dies ist ein Gegenstück zu dem von dem gleichen Verf. in der nachstehend referierten Arbeit bewiesenen Satz.

O. Grün.

Szász, F.: Über Gruppen, deren sämtliche nicht-triviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind. Acta Sci. math. 17, 83—84 (1956).

Unter der k -ten Potenz G^k einer Gruppe G wird für jede natürliche Zahl k die von den k -ten Potenzen der Elemente von G erzeugte Gruppe verstanden. Verf. beweist, daß eine Gruppe, deren sämtliche nichttriviale Potenzen zyklisch sind, selbst zyklisch ist.

O. Grün.

Szász, F.: A characterization of the cyclic groups. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 1, Nr. 2, 13—16 (1956).

Verf. gibt die folgende Charakterisierung der Klasse der zyklischen Gruppen: die Gruppe G ist zyklisch genau dann, wenn jede zyklische Untergruppe H von G für passendes $k(H)$ von den $k(H)$ -ten Potenzen der Elemente von G erzeugt wird (vgl. die beiden vorstehenden Referate).

W. Kappe.

Izuka, Kenzo: Note on blocks of group characters. Kumamoto J. Sci., Ser. A 2, 309—321 (1956).

Es handelt sich um den Beweis einiger wichtiger Sätze von R. Brauer über die p -Blöcke einer endlichen Gruppe in Bezug auf eine Primzahl p . Diese Sätze wurden bereits von M. Osima (dies. Zbl. 64, 254) bewiesen.

P. Roquette.

Farahat, H.: On the blocks of characters of symmetric groups. Proc. London math. Soc., III. Ser. 6, 501—517 (1956).

To a partition (λ) of n , a polynomial (Q_λ^s) in an indeterminate s is defined to be $II(s - i + j)$ where the product extends over n nodes, each at the place (i, j) , in a Young diagram corresponding to (λ) . Its relationship with Robinson-Thrall's (this Zbl. 57, 13) notion of the content of a diagram is discussed. Using Littlewood's S -functions, (Q_λ^s) is shown to be equal to $\sum \omega_\rho^{(\lambda)} s^{t_\rho}$, where the sum extends over all classes (ρ) in the symmetric group \mathfrak{S}_n , t_ρ is the number of cycles in an element from (ρ) and $\omega_\rho^{(\lambda)} = h_\rho \chi_\rho^{(\lambda)} / f_\lambda$ [h_ρ the order of (ρ) , $\chi_\rho^{(\lambda)}$ the character of \mathfrak{S}_n belonging to (λ) , $f_\lambda = \chi_1^{(\lambda)}$]. The relation leads to a simple proof of the „only if“ part of the reviewer's conjecture [proved by Brauer-Robinson (this Zbl. 29, 119)] on p -blocks of \mathfrak{S}_n .

On first proving a congruence for the degrees f_λ with congruent partitions, a number of congruence relations between $\omega_q^{(\lambda)}$ are obtained, which go a long way towards a proof of the other half of the conjecture. Also some exact relations between $\omega_q^{(\lambda)}$ are obtained assuming that (λ) is not a p -residue. The paper closes by giving new formulas for the numbers of ordinary and modular characters in a block (Robinson, Osima, Nagao and the author, this Zbl. 58, 259). T. Nakayama.

Fletcher, T. J.: Campanological groups. Amer. math. Monthly 63, Nr. 9, 619—626 (1956).

Le problème de composer un carillon de cloches est ramené par l'A. à une question de constitution de sous-groupes du groupe symétrique du nombre n des cloches. En effet la composition du carillon obéit à certaines règles restrictives dans l'intervention successive, dans le carillon, des cloches numérotées de 1 à n dans l'ordre de la hauteur décroissante du son. L'A. donne la constitution des sous-groupes correspondants aux carillons simples (avec 4 cloches) et doubles (avec 5 cloches) et également le cas plus compliqué qu'il appelle le „Treble Bob“.

S. Bays.

Montgomery, Deane: Topological transformation groups. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 185—188 (1956).

Survey of the work on locally compact groups and more in particular locally compact transformation groups up to 1953. W. T. v. Est.

Wang, Hsien-Chung: Discrete subgroups of solvable Lie groups. I. Ann. of Math., II. Ser. 64, 1—19 (1956).

An \mathcal{S} -group is in this paper a topological group T which is the extension by a finitely generated discrete commutative group H of a torsion free nilpotent Lie group N whose component group N/N_0 (N_0 identity component of N) is finitely generated. It is said to be strongly torsion free if H has no torsion. It follows easily from results of G. D. Mostow (this Zbl. 57, 261) that the fundamental group of a coset space of a connected solvable Lie group is a discrete strongly torsion free \mathcal{S} -group. A main result of this paper is a sharpening of a converse to this, namely: any \mathcal{S} -group T can be embedded as a closed subgroup in a connected solvable linear Lie group G , and G may be chosen to be simply connected if T is strongly torsion free. It is also shown that there exists a linear solvable Lie group L having a finite number of connected components containing T as a closed subgroup and such that L/T is compact. An example shows that L cannot always be chosen to be connected, even if L is not required to be linear and if T is strongly torsion free. The main steps in the proofs are: Theorem 1: given a triangular real linear group, there exists a triangular real linear Lie group G containing L and such that G/\bar{L} is compact, and Theorem 2: An \mathcal{S} -group T , extension of N by H (notation as above) can be embedded in a splittable extension of a connected and simply connected nilpotent Lie group containing N by a discrete finitely generated commutative group. The first one follows mainly from a theorem of Mostow (loc. cit); the proof of the second one takes up the main part of the paper and rests on a detailed discussion of the automorphisms of T inducing the identity on H . A. Borel.

Verbände. Ringe. Körper:

Mal'cev (Maltzev), A. I.: Quasiprimitive classes of abstract algebras. Doklady Akad. Nauk. SSSR 108, 187—190 (1956) [Russisch].

Verf. studiert Klassen (Kl.) „abstrakter“ (auch „universal“ genannter) Algebren (Alg.) (G. Birkhoff, dies. Zbl. 13, 1): primitive Kl. sind solche mit (endlichen oder unendlichen, ev. auch leeren) Systemen von (gewöhnlichen) Identitäten für alle ihre Alg., dagegen quasiprimitive (quasipr.) solche mit Systemen

bedingter Identitäten (d. h. aus dem Bestehen eines gewissen Gleichungssystems folge identisch, d. h. stets, eine gewisse Schlußgleichung; z. B. Kürzungsregeln in Halbgruppen). Es werden definiert: Alg. mit definierenden Gleichungen (Relationen), insb. freie; freie, bzw. endlich freie Kl.; lokal definierte Kl., d. h. solche die jede Alg. enthalten, deren sämtliche endlichen Teilmodelle (endliche Zahl von Elementen und Grundoperationen) Teilmodellen von Alg. der Kl. isomorph sind [Modellbegriff von Tarski (dies. Zbl. 58, 247)]. Folgende Sätze werden, im wesentlichen, bewiesen: Eine Kl. ist dann und nur dann 1) frei, wenn sie alle Teilalg. und alle direkten Produkte ihrer Alg. enthält; 2) & 3) quasipr., wenn sie a) lokal definiert und b) endlich frei oder, ebenso gut, für direkte Produktbildung geschlossen ist. 4) Eine Kl. $\langle A; f_1, \dots, f_m \rangle$ ist quasipr., wenn alle ihre Alg. in Alg. einer quasipr. Kl. $\langle A; f_1, \dots, f_m, \dots, f_n \rangle$ isomorph einbettbar sind (A Grundmenge; f_1, f_2, \dots Grundoperationen, $m < n < \infty$). Das interessante Beispiel der in Gruppen einbettbaren Halbgruppen zeigt, daß der Satz nicht mehr gilt, wenn man die Zahl der bedingten Identitäten auf endlich beschränkt. Es werden noch partielle Operationen und Alg. eingeführt [vgl. T. Evans (dies. Zbl. 42, 33; 50, 28), der sie „unvollständig“ nennt. Bem. d. Ref.: Verf. meint wohl, wie üblich, „teilweise über A “ und nicht, wie irrtümlich im Text, „über einen Teil von A “ definierte Operationen] und ein wichtiger Satz von Evans, der die Gleichwertigkeit der algorithmischen Lösbarkeit von Wortproblemen gewöhnlicher Alg. mit denen der „totalisierenden“ (Terminologie des Ref.) Erweiterung endlicher partieller Alg. für die Alg. einer (primitiven) Kl. behauptet, auf quasiprim. Klassen ausgedehnt. Es gilt auch eine Verallgemeinerung des Satzes 4) auf partielle Alg. *D. Tamari.*

Musti, Romolo e Ettore Buttafuoco: Sui subreticoli distributivi dei reticoli modulari. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 584—587 (1956).

Bjarni Jónsson (questo Zbl. 66, 283) ha dimostrato che: Condizione necessaria e sufficiente affinché un sottoinsieme non vuoto X di un reticolo modulare A generi un sottoreticolo distributivo è che: $\left(\sum_{i=1}^m x_i \right) \prod_{j=1}^n y_j = \sum_{i=1}^m \left(x_i \prod_{j=1}^n y_j \right)$, ogni qualvolta m, n sono interi positivi e $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n \in X$. Lo stesso A., nella nota citata, fa vedere, nei casi in cui X sia composto di 3, o 4, elementi, che le condizioni soprascritte non sono indipendenti. Nella presente nota, gli Aa. riducono il numero delle condizioni date dal Jónsson nel caso in cui X comprenda un numero finito, n , di elementi, dimostrando che: Condizione necessaria e sufficiente affinché un insieme X di un reticolo modulare A , composto da n elementi, che ad $n-1$ ad $n-1$ generano sottoreticoli distributivi, generi un sottoreticolo distributivo, è che siano soddisfatte le condizioni: $(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_r}) y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_s} = x_{i_1} y_{j_1} \dots y_{j_s} + \dots + x_{i_r} y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_s}$, $r + s = n$, $x_i, y_j \in X$. Le condizioni di Musti-Buttafuoco, necessarie e sufficienti affinché X generi nel reticolo modulare A un subreticolo distributivo, risultano essere: $N = \binom{n}{3} + 2 \binom{n}{4} + \dots + (n-2) \binom{n}{n}$. Gli Aa. pongono il problema, se le N condizioni da essi date siano, o non, indipendenti.

L. Lombardo-Radice.

Curtis, H. J.: A metrization problem concerning lattices. Proc. Amer. math. Soc. 7, 319—330 (1956).

Es sei L ein atomarer Verband und P die Menge aller Atome von L ; P sei ein metrischer Raum. L. R. Wilcox (vgl. dies. Zbl. 25, 103) hat hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die metrische Topologie von P zu einer (Hausdorffschen) Topologie von ganz L fortgesetzt werden kann. Verf. schwächt diese Bedingungen ab und gibt hinreichende Bedingungen dafür an, daß L metrisierbar ist. *G. Nöbeling.*

Jacobson, N.: Some aspects of the theory of representations of Jordan algebras. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 28—33 (1956).

In this survey the author defines the various universal associative enveloping algebras of a Jordan algebra J , namely $U(J)$, $U_s(J)$ and $U_1(J)$, corresponding to all the representations of J , all the special representations of J and all the unital representations of J [cf. Jacobson, this Zbl. 44, 25; Osaka math. J. 6, 1—71 (1954)] and describes the relation between them, viz. $U = U_1 \oplus U_s$. After outlining the structure of finite dimensional semisimple Jordan algebras of degree >1 (over an algebraically closed field) (cf. Albert, this Zbl. 29, 10; 39, 265) he gives a description of U_1 and U_s for these cases (cf. Jacobson, l. c.). *P. M. Cohn.*

Szász, F.: On rings every subring of which is a multiple of the ring. Publ. math., Debrecen 4, 237—238 (1956).

Ein Ring R heiße zyklisch, wenn seine additive Gruppe zyklisch ist. Ein Ring R ist dann und nur dann zyklisch, wenn jeder Teilring von R ein Multiplum nR von R mit ganzrationalem n ist. (Vgl. auch Verf. dies. Zbl. 72, 257.) *O. Grün.*

Eilenberg, Samuel: Homological dimension and syzygies. Ann. of Math., II. Ser. 64, 328—336 (1956); Errata. Ibid. 65, 593 (1957).

Let $A = A^0 + A^1 + \dots$ be a graded ring, and $N = N^0 + A^1 + \dots$ be its radical. Assume that $K = A/N = A^0/N^0$ is semisimple (with minimum condition) and each idempotent in K is the image of an idempotent in A^0 . A subcategory \mathfrak{A} of the category ${}_A\mathfrak{M}$ of all (graded) (left) A -modules and all homomorphisms of degree 0 of such modules is called perfect if the following axioms are satisfied: (1) If $A, B \in \mathfrak{A}$ and $\alpha: A \rightarrow B$ then $\alpha \in \mathfrak{A}$; (2) If $A \rightarrow B$ is an epimorphism and $A \in \mathfrak{A}$ then $B \in \mathfrak{A}$; (3) $A \in \mathfrak{A}$; (4) If P is quasi-free (i. e. P is a direct sum of cyclic projective modules) and $P/NP \in \mathfrak{A}$ then $P \in \mathfrak{A}$; (5) If $A \in \mathfrak{A}$ and $NA = 0$ then $A = 0$. Every projective module in such a category \mathfrak{A} is quasi-free, and if \mathfrak{A} satisfies a further axiom (6) If $A \in \mathfrak{A}$ and $B \subset A$ then $B \in \mathfrak{A}$, every A in \mathfrak{A} has a quasi-free resolution $\dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0$, with differentiation d_i , called minimal, which is characterized by $\text{Im } d_{i+1} \subset NX_i$, and which is shown to be a direct summand of any projective resolution of A . Minimal resolutions are a generalization of Hilbert's chains of syzygies and are used to give explicit expression of Tor and Ext for moduls in \mathfrak{A} . In combination with Auslander's (this Zbl. 67, 271) argument, there yields that if ${}_A\mathfrak{M}$ contains a perfect category satisfying (6) then $\text{gl. dim } {}_A\mathfrak{M} (= \sup. \text{ l. dim }_A A \text{ for } A \in {}_A\mathfrak{M}) \leq \text{weak r. dim }_A K \leq \text{r. dim }_A K$; three terms are equal mutually and to the smallest n with $\text{Tor}_{n+1}^A(K, K) = 0$ if also \mathfrak{M}_A satisfies the same condition. A useful example of a perfect category is that of all finitely generated graded left A -modules and it satisfies (6) if A^0 is left Noetherian and A^n are A^0 -finitely generated. If N^0 is nilpotent, ${}_A\mathfrak{M}$ itself is perfect and satisfies (6). Local rings, polynomial rings and semi-primary rings are considered as further specific examples. *T. Nakayama.*

Serre, Jean-Pierre: Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethriens. Proc. internat. Sympos. algebraic number theory, Tokyo & Nikko Sept. 1955, 175—189 (1956).

The author gives an exposition of results of Auslander and Buchsbaum on the homological dimension of Noetherian rings (this Zbl. 70, 35), completing these results on several points. In particular he gives a homological characterization of regular local rings as those local rings in which the theorem of syzygies is valid. In consequence all rings of fractions of regular local rings are themselves seen to be regular. All rings A which are considered are commutative, Noetherian, with unit element; and all modules E (assumed throughout to be $\neq 0$) over such rings, are unitary and of finite type (hence also Noetherian). The projective dimension $\text{dim}_A E$ of Cartan-Eilenberg (Homological Algebra, Princeton 1956) is denoted here by $\text{dh}_A E$, and $\text{gl. dh}(A)$ denotes $\text{Lim. sup. dh}_A(E)$, for all such modules E . The Krull dimension (this Zbl. 19, 289) of A is denoted by $\text{dim}(A)$. Let A now be a local ring

with maximal ideal \mathfrak{m} and E an A -module, as above. An E -sequence of length q is a sequence of q elements of E , (a_1, \dots, a_q) , such that for all $i \leq q$, a_i is not a divisor of zero in $E/(a_1, \dots, a_{i-1})E$. It is maximal if there does not exist $a_{q+1} \in \mathfrak{m}$, such that $(a_1, \dots, a_q, a_{q+1})$ is an E -sequence, and any E -sequence is shown to be extendible to such a maximal sequence. The relation of such sequences to homological dimension theory is made clear as follows. First, it is shown that $\text{dh}_A(E/(a_1, \dots, a_q)E) = \text{dh}_A(E) + q$, and second, that if $\text{gl. dh}(A) = s < \infty$, then the length of all maximal E -sequences is $s - \text{dh}_A(E)$. As a consequence, if A is a regular local ring of (Krull) dimension n , then $\text{gl. dh}(A) = n$. Passing to arbitrary local rings A it is shown that for such rings all maximal E -sequences have the same length which is called the homological codimension of E , $(\text{codh}_A(E))$. This notion of codimension has applications as follows. Taking $E = A$, those local rings A for which $\text{codh}(A) = \dim A$ are those in which the Cohen-Macaulay theorem of equidimensionality is valid [cf. Nagata, Proc. internat. Sympos. algebraic number theory, Tokyo & Nikko Sept. 1955, 191—226 (1956)]. Further applications, in the theory of fractional divisorial ideals, and in the theory of coherent sheaves, are also given. The characterization of regular local rings A as those with finite $\text{gl. dh}(A)$ is next given. The proof depends on the result that if k is the residue field of a local ring A modulo a maximal ideal \mathfrak{m} , and n the $(k$ -vector space) dimension of $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, then for all integers $p \geq 0$, $\text{Tor}_p^A(k, k)$ is a k -vector space of dimension $\geq \binom{n}{p}$.

This result depends on certain standard procedures of homological algebra (Cartan-Eilenberg, loc. cit.). A simple proof of the Cohen-Macaulay theorem (cf. this Zbl. 60, 70) follows, as also does the proof of the regularity of the rings of fractions of local regular rings.

W. H. Cockcroft.

Ribenboim, P.: Une remarque sur le théorème des zéros de Hilbert pour une infinité d'indéterminées. Anais Acad. Brasil. Ci. 28, 427—428 (1956).

L'A. commence par signaler une erreur de son mémoire „Sur la théorie des idéaux dans certains anneaux de type infini“ (ce Zbl. 71, 31), concernant la condition: l'ensemble des idéaux maximaux de A est une partie fermée, condition qui est seulement nécessaire, mais non suffisante, pour que l'anneau $A = K[X_i]_{i \in I}$ soit un anneau de Jacobson. L'A. donne ensuite une nouvelle condition nécessaire et suffisante: soit J une partie stricte de I , $\iota_0 \in I$, $\iota_0 \notin J$, \mathfrak{m} un idéal maximal de A , α_J un idéal de $A_J = K[X_i]_{i \in J}$ tel que $\alpha_J \supset \mathfrak{m} \cap A_J$; alors il existe un idéal $\alpha_{J'}$ de $A_{J'} = K[X_i]_{i \in J \cup \{\iota_0\}}$ tel que $\alpha_{J'} \supset \mathfrak{m} \cap A_{J'}$ et $\alpha_{J'} \cap A_J = \alpha_J$. Signalons les deux coquilles: $\iota_0 \in J$, au lieu de $\iota_0 \notin J$, lignes 10 et 20. Corrigeons aussi un oubli laissé dans l'analyse du Zbl. 71, 31 par le rapporteur: il faut lire à la 3ème ligne, au lieu de „soit λ une partie quelconque de A “, „soit λ une partie finie quelconque de A “.

L. Lesieur.

Kuniyoshi, Hideo: Certain subfields of rational function fields. Proc. internat. Sympos. algebraic number theory, Tokyo & Nikko Sept. 1955, 241—243 (1956).

Let $K = k(x_1, \dots, x_n)$ be a purely transcendental extension of a field k of characteristic p , and G a p -group of linear transformations in x_1, \dots, x_n . Generalizing the author's former result (this Zbl. 58, 266), it is proved that, provided that G satisfies a certain condition with respect to its triangular form, which is certainly fulfilled if G is a regular representation, the fixed subfield of G in K is purely transcendental over k .

T. Nakayama.

Masuda, Katsuhiko: On the arithmetic on a Galois structure. Proc. internat. Sympos. algebraic number theory, Tokyo & Nikko Sept. 1955, 243—245 (1956).

Theory of Galois algebras [Hasse, reviewer, author and Wolf (Algebraische Theorie der Galoischen Algebren, 1956, this Zbl. 73, 25)] is given in topological setting. The significance of the theory to abelian functions and number theory is indicated.

T. Nakayama.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Petersson, Hans: Über eine Zerlegung des Kreisteilungspolynoms von Primzahlordnung. Math. Nachr. 14, 361—375 (1956).

Für eine Primzahl $q > 3$ sei $\chi(x) = \left(\frac{x}{q}\right)$ das Legendresymbol und $q^* = \chi(-1)q$. Verf. untersucht die Zerlegung des q -ten Kreisteilungspolynoms $F(u) = \sum_{v=0}^{q-1} u^v$ im quadratischen Teilkörper $\Omega = P(\sqrt{q^*})$ des Kreiskörpers $P(\zeta)$, $\zeta = \exp \frac{2\pi i}{q}$, mit analytischen Methoden. Sei dazu $r = \frac{q-1}{2}$ und sei etwa $f(u)$ der durch

$$f(u) = \prod_{\substack{a=1 \\ \chi(a)=1}}^{q-1} (u - \zeta^a) = \sum_{m=0}^r \mu_m u^m = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m (u-1)^m$$

analytisch ausgezeichnete, über Ω irreduzible Faktor von $F(u)$. Die $\lambda_m = \lambda_m(q)$ und ihre Quotienten $\varrho_m = \lambda_m/\lambda_0$ seien aufgefaßt als arithmetische Funktionen von q . Für λ_0 gilt $\frac{\lambda_0}{\sqrt{q^*}} = \varepsilon^{-h}$ (für $\chi(-1) = 1$) bzw. $= (-1)^{h+1/2}$ (für $\chi(-1) = -1$), wo h die Klassenzahl und im ersten Fall $\varepsilon > 1$ die Grundeinheit von Ω bedeutet. Das Hauptergebnis liegt in dem Nachweis, daß für $m \geq 1$ die ϱ_m sich ganz rational ausdrücken lassen durch Bernoullische Zahlen B^v und verwandte, von q abhängige Bildungen $e_{2^v+1}^*$. Sei dazu für $\chi(-1) = 1$, $\gamma_1 = \frac{1}{4}(q-1)$ sowie $\gamma_v = 0$ für ungerades $v \geq 3$ und $\gamma_v = \frac{(-1)^{v/2-1}}{v!} \left(\frac{q^v-1}{2^v} B^v + e_{2^v+1}^* \sqrt{q^*} \right)$ für gerades $v \geq 2$ bzw. für $\chi(-1) = -1$: $\gamma_1 = \frac{1}{4}(q-1) + \frac{1}{2}h\sqrt{q^*}$ sowie $\gamma_v = \frac{(-1)^{(v-1)/2}}{v!} e_{2^v+1}^* \sqrt{q^*}$ für ungerades $v \geq 3$ und $\gamma_v = \frac{(-1)^{v/2-1}}{v!} \frac{q^v-1}{2^v} B^v$ für gerades $v \geq 2$ gesetzt. Ferner seien die von q unabhängigen rationalen Zahlen a_{mn} durch $\binom{t}{m} = \sum_{n=1}^m a_{mn} \frac{t^n}{n!}$ definiert. Dann gilt die Reduktionsformel

$$\varrho_m = \sum_{n=1}^m a_{mn} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \geq 0 \\ k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n}} \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \gamma_1^{k_1} \dots \gamma_n^{k_n} \dots$$

Daß es sich bei den rationalen Zahlen $e_{2^v+1}^*$ wesentlich um die χ zugeordneten verallgemeinerten Bernoullischen Zahlen von Ankeny-Artin-Chowla (dies. Zbl. 49, 306) handelt, also um die Koeffizienten von

$$\sum_{m=1}^{q-1} \chi(m) t \frac{e^{mt}}{e^{qt}-1} = \sum_{v \geq 0} B_v^* \frac{t^v}{v!},$$

ist dem Verf. anscheinend entgangen. Da andererseits (bis auf einfachere Faktoren) gerade diese Zahlen als Fourierkoeffizienten der analytischen Geschlechtsinvarianten der quadratischen Einheitsformen $\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_k^2)$ auftreten, gewinnt Verf. für kleine Werte von m Beziehungen zwischen den ϱ_m und den Darstellungsanzahlen von q als Summe von fünf (für $\chi(-1) = 1$) bzw. sieben (für $\chi(-1) = -1$) Quadraten. Für viele interessante Einzelheiten und Ergänzungen muß auf die Originalarbeit verwiesen werden. Anscheinend im Gegensatz zur Meinung des Verf. ist Ref. durchaus der Ansicht, daß die Reduktion der λ_m auf die verallgemeinerten Bernoullischen Zahlen sich auch auf nichtquadratische Teilkörper Ω von $P(\zeta)$ übertragen lassen müßte.

H. W. Leopoldt.

Pisot, Ch.: Sur une famille remarquable d'entiers algébriques formant un ensemble fermé. Centre Belge Rech. math., Colloque Théorie des Nombres, Bruxelles 19—21 déc. 1955, 77—83 (1956).

Es handelt sich um einen Überblick über die historische Entwicklung und den gegenwärtigen Stand der Untersuchungen über die Menge der ganzzahligen Zahlen, deren konjugierte alle im Einheitskreis liegen. Wesentliche Beweisideen werden angedeutet und auf Beziehungen zu verwandten Fragen wird hingewiesen.

F. Kasch.

Tannaka, Tadao: On the generalized principal ideal theorem. Proc. internat. Sympos. algebraic number theory, Tokyo & Nikko Sept. 1955, 65—70 (1956).

The author generalizes the principal ideal theorem by giving the proof of the following Main Theorem 1: If K is the absolute class field over k , then every ambiguous ideal in K is principal. The author has introduced a concept of ambiguousness in one of his papers (see this Zbl. 10, 247). The essential part of the proof of the Main Theorem is constituted by the demonstration of the following Lemma: Let K be the absolute class field over k and Ω/k its cyclic intermediate field, then every (in ordinary sense) ambiguous ideal in Ω becomes principal in K . The author gives also other alternatives of the Lemma and of the Main Theorem.

C. P. Popovici.

Weil, André: On a certain type of characters of the idèle-class group of an algebraic number-field. Proc. internat. Sympos. algebraic number theory, Tokyo & Nikko Sept. 1955, 1—7 (1956).

To each character χ (not necessarily of absolute value 1) of the idèle class group C_k of an algebraic number field k is associated a Hecke (Größen-)character $\tilde{\chi}$ of the group $G(\mathfrak{f})$ of ideals prime to the conductor \mathfrak{f} of χ ; for a principal ideal (α) in the strahl-class mod \mathfrak{f} we have $\chi((\alpha)) = X(\alpha)$, where X is a character of the multiplicative group k^* of form $X(\alpha) = \prod (\alpha^\lambda / |\alpha^\lambda|)^{f_\lambda} |\alpha|^{\sigma + i\varphi_\lambda}$, with f_λ integers, σ and φ_λ reals, the product extending over isomorphisms λ of k into the complex number field. Class field characters are those χ with $X = 1$. The paper is to point out the importance of some types of χ which are not such, but for which the values of X , whence those of $\tilde{\chi}$, are algebraic numbers. The last is indeed the case if χ is of type (A) , i. e. all φ_λ are 0 and σ is rational; explicit construction of non-trivial (i. e. not a product of a class field character and a rational power of the „volume“) characters of type (A) is given, which exist when and only when k contains a totally imaginary quadratic extension k_1 of its maximal totally real subfield. Further, χ is said to be of type (A_0) when $X(\alpha) = \pm \prod \alpha^{r_\lambda}$ with integers r_λ ; in this case the values of $\tilde{\chi}$ are in an algebraic number field (of finite degree) K . Then, in analogy to the association of χ to $\tilde{\chi}$, one can, on considering $\tilde{\chi}$ as map into $K_\mathfrak{P}$ and taking its restriction to $G(\mathfrak{f} p)$, where \mathfrak{P} is a prime ideal in K and p is the rational prime divisible by \mathfrak{P} , construct a continuous homomorphism $\chi_\mathfrak{P}$ of C_k into the unit group $U_\mathfrak{P}$ of $K_\mathfrak{P}$, and further a cyclic extension of k when a character ω of $U_\mathfrak{P}$ is taken. The compositum $k(\chi)$ of such cyclic extensions of k for all \mathfrak{P} and ω is an infinite (in general) abelian extension of k invariantly attached to the character χ of type (A_0) . All characters of type (A_0) can be expressed in terms of those which are a product of a class field character and an integral power of the volume and those which arise from abelian varieties with complex multiplication; the L -series attached to the last type characters χ are those which occur in the zeta-functions of those abelian varieties and the fields $k(\chi)$ are related with points of finite order on the same varieties as proved by Taniyama [J. math. Soc. Japan 9, 330—366 (1957)].

T. Nakayama.

Artin, Emil: Representatives of the connected component of the idèle class group.
Proc. internat. Sympos. algebraic number theory, Tokyo & Nikko Sept. 1955,
51—54 (1956).

Weil (this Zbl. 44, 29) has determined the structure of the connected component of 1 of the idèle-class group of an algebraic number field by describing its dual. The present paper gives a direct description by exhibiting a system of representing idèles. Let $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ be a system of independent totally positive units, and let each ε_i be the product of idèles $\varepsilon_{i, \ell}$, $\varepsilon_{i, \ell}$ having respectively components 1 at all infinite primes and at all finite primes. For reals s_i and for $x_i \in \bar{\mathbb{Z}}$, the completion of the rational integer group \mathbb{Z} with respect to its topology given by ideals of the ring \mathbb{Z} , $\bar{\varepsilon}_1^{s_1} \dots \bar{\varepsilon}_r^{s_r} \bar{\varepsilon}_1^{x_1} \dots \bar{\varepsilon}_r^{x_r}$ is defined. Multiply idèles of this form with idèles having components of absolute value 1 at all complex primes, r_2 in number, and all other components equal to 1. The idèle-classes represented by such products form the connected component D_0 of 1 of the group of idèle-classes of volume 1. D_0 is the direct product of r solenoids and r_2 circles, and we have only to add a line to get the connected component of 1 of the idèle-class group. T. Nakayama.

MacKenzie, R. E. and G. Whaples: Artin-Schreier equations in characteristic zero. Amer. J. Math. 78, 473—485 (1956).

Let a field k be maximally complete [Kaplansky, Duke math. J. 9, 303—321 (1942)] under a non-archimedean valuation, and p be the characteristic of the residue-field \bar{k} . It is proved, among others, that every cyclic extension K of degree p over k contained in the composite of extensions generated by roots of Artin-Schreier equations $x^p - x = \lambda$, $\lambda \in k$, the value of $p^p \lambda^{p-1} < 1$, can be generated by a root of a single Artin-Schreier equation, provided that \bar{k} has no inseparable extension. The paper makes also a detailed study of the behavior of extensions defined by Artin-Schreier equations concerning generation, ramification, etc., including the case without the above assumption on \bar{k} . In doing so and in distinguishing those extensions from Kummer extensions, the notion of a distorsion constant (i. e. an element $\Gamma = A^{\sigma-1} - 1$ of a cyclic extension K/k with generating automorphism σ such that the value of Γ is maximum among the values of $B^{\sigma-1} - 1$, B running over K) is used effectively. In the case of local class field theory, the result on canonical generation is applied to the problem of finding an explicit reciprocity law, for cyclic extensions of degree p , including the case where k is of characteristic 0 and does not contain p -th roots of unity, to solve the problem partly by computing the norm residue symbol for a certain special class of elements. T. Nakayama.

Engel, Wolfgang: Über die Nullklassen in algebraischen Funktionenkörpern von zwei Veränderlichen. Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg 5, 905—908 (1956).

Nach H. W. E. Jung stehen die Nullklassen eines Funktionenkörpers zweier Variablen zu der sogenannten Picardschen Mannigfaltigkeit in enger Beziehung. Diese Mannigfaltigkeit ist ein algebraischer Funktionenkörper V_π von π Veränderlichen ($\pi =$ die Irregularität), die sich als abelsche Funktionen V_π von π verschiedenen Integralen u_1, u_2, \dots, u_π erster Gattung darstellen lassen. Nach Jung hat V_π die Automorphismen $u'_i = u_i + k_i$ (k_i komplexe Zahl). Verf. bemerkt, daß V_π außerdem im allgemeinen die Automorphismen $u'_i = -u_i + k_i$ hat und bestimmt die Anzahl der Nullklassen, die bei diesen Automorphismen fest bleiben. H. Bergström.

Ramanathan, K. G.: Quadratic forms over involutorial division algebras. J. Indian math. Soc., n. Ser. 20, 227—257 (1956).

Ein klassischer Satz von Hasse besagt, daß zwei quadratische Formen über einem algebraischen Zahlkörper K genau dann äquivalent sind, wenn sie es über jeder lokalen Komponente K_p von K sind. Dieser Satz wird hier übertragen auf quadratische Formen über einer involutorischen Divisionsalgebra D mit einem Zahl-

körper K als Zentrum. Dabei heißt D „involutorisch“, wenn in D eine Involution $\alpha \rightarrow \tilde{\alpha}$ (d. h. ein Antiautomorphismus der Ordnung 2) vorgegeben ist. Diese setzt sich für jedes n in natürlicher Weise zu einer Involution $S \rightarrow \tilde{S}$ der n -reihigen Matrixalgebra über D fort. Eine Matrix S heißt „symmetrisch“, wenn $S = \tilde{S}$. Jede symmetrische n -reihige Matrix S definiert eine quadratische Form in n Variablen vermöge $S[x] = \tilde{x} S x$, wobei x einen n -reihigen Spaltenvektor über D bedeutet. Die Äquivalenz zweier quadratischer Formen S, T über D bedeutet, daß $S = \tilde{V} T V$ mit einer regulären Matrix V . Beim Beweis des angegebenen Satzes unterscheidet Verf. die Fälle, daß D eine involutorische Algebra 1. oder 2. Art ist, definiert bzw. dadurch, daß die Involution von D das Zentrum K elementweise festläßt oder nicht. Im ersten Falle ist D nach einem Satz von Albert eine Quaternionenalgebra über K , und daher läßt sich der obige Satz in einfacher Weise auf den Hasseschen Satz für K zurückführen, indem man die Elemente aus D durch ihre Koordinaten aus K darstellt, wodurch die Form $S[x]$ übergeht in eine Form von $4n$ Variablen über K . Der zweite Fall wurde bereits von Landherr mit Hilfe von Lieschen Algebren behandelt; Verf. gibt hier jedoch einen neuen, direkten Beweis. Dieser besteht im wesentlichen darin, daß man D lokal an jeder Stelle durch eine geeignete Matrizendarstellung über K_0 , dem Invariantenkörper der Involution in K , ersetzt und dadurch den obigen Satz zurückführt auf den Hasseschen Satz für K_0 . Dabei wird der Satz benutzt, daß es lokal keine nichttrivialen involutorischen Divisionsalgebren gibt. Gleichzeitig mit dem Beweis des obigen Satzes wird für jede quadratische Form S über D ein vollständiges System von Invarianten bezüglich der Äquivalenz angegeben. Auch das Problem der Darstellung von Elementen aus D durch S wird durch Zurückführung auf den lokalen Fall gelöst. Parallel zum Falle eines Zahlkörpers wird auch der Fall behandelt, daß das Zentrum K von D ein Funktionskörper in einer Variablen über einem endlichen Konstantenkörper ist. Hier sind die Verhältnisse besonders einfach; zum Beispiel sind im Falle einer Involution 1. Art sämtliche n -reihigen regulären symmetrischen Matrizen S über D äquivalent zueinander. Verf. betrachtet auch den Fall von schiefssymmetrischen Formen über D , definiert durch $\tilde{S} = -S$. Im Falle einer Involution zweiter Art läßt sich das Äquivalenzproblem in einfacher Weise auf das entsprechende Problem für quadratische Formen zurückführen. Das ist jedoch nicht mehr möglich, falls es sich um eine Involution erster Art handelt. Hier beschränkt sich Verf. darauf, die lokale Theorie durchzuführen; Verf. erwähnt daß das Analogon zum Hasseschen Satz hier falsch zu sein scheint. Literatur: H. Hasse, Äquivalenz quadratischer Formen in beliebigen algebraischen Zahlkörpern; J. reine angew. Math. **153**, 158—162 (1924); A. Albert, Structure of Algebras, New York 1939; W. Landherr, dies. Zbl. **18**, 291. P. Roquette.

Eichler, Martin: Modular correspondences and their representations. J. Indian math. Soc., n. Ser. **20**, 163—206 (1956).

Sei Q eine indefinite Quaternionenalgebra über dem Körper der rationalen Zahlen, R eine Ordnung von Q der quadratfreien Stufe q , U_R die Gruppe der Einheiten der Norm 1 von R . Über den reellen Zahlen besitzt Q eine Darstellung durch zweireihige Matrizen; daraus erhält man für U_R eine Darstellung durch eine Gruppe G_R linear gebrochener Transformationen der komplexen Zahlenebene, welche die obere Halbebene in sich überführt und dort eigentlich diskontinuierlich ist; durch Identifizieren modulo G_R äquivalenter Punkte und Abschließen erhält man eine kompakte Riemannsche Fläche F_R . Ist nun S eine zweite Ordnung von Q , so hat $G_{R \cap S}$ endlichen Index in G_R , und daher ist $F_{R \cap S}$ in natürlicher Weise Überlagerungsfläche von F_R und ebenso auch von F_S . Ist p_R bzw. p_S die Projektion von $F_{R \cap S}$ auf F_R bzw. F_S , so wird durch $p_S p_R^{-1}$ eine Korrespondenz zwischen F_R und F_S gegeben. Ist speziell ν ein primitives Element der Norm n aus R und $S = \nu R \nu^{-1}$,

so ist F_S isomorph zu F_R , und man erhält daher eine Korrespondenz $C(n)$ von F_R mit sich selbst, die nur von n , nicht von r abhängt. Setzt man noch $T(n) = \sum_{t^2|n} C(n/t^2)$,

so erhält man Korrespondenzen, die im Falle, daß Q die Algebra Z_2 der zweireihigen Matrizen mit rationalen Koeffizienten ist, im wesentlichen mit den Heckeschen Operatoren (dies. Zbl. 15, 402) übereinstimmen. Zunächst wird gezeigt, daß die Linearkombinationen der $T(n)$ wie bei den Heckeschen Operatoren einen kommutativen Ring bilden; genauer, daß $T(m)T(n) = T(mn)$ ist für teilerfremde Zahlen m, n , und daß sich, wenn p eine Primzahl ist, $T(p^r)T(p^s)$ als Linearkombination der $T(p^t)$ ($0 \leq t \leq r+s$) schreiben läßt. Der Hauptteil der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich dann mit Darstellungen dieses Operatorenringes als lineare Transformationen gewisser mit der Riemannschen Fläche F_R verbundener Moduln; und zwar werden betrachtet (1) die erste Homologiegruppe von F_R , (2) die holomorphen Differentiale ersten Grades auf F_R , (3) die bei G_R automorphen Spitzenformen der Dimension $-2f$. Die Darstellung (3) stimmt für $f=1$ mit (2) überein; der Fall $f>1$ ist hier nur kurz behandelt; eine genauere Untersuchung darüber findet man in einer späteren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 80, 60). Die Darstellung (1) ist über den komplexen Zahlen äquivalent zur Summe der Darstellung (2) und der dazu konjugiert komplexen. Für die Spur von $T(n)$ in der Darstellung (1) wird eine Formel und der Grundgedanke des Beweises angegeben; für die Einzelheiten wird auf eine frühere Arbeit [J. reine angew. Math. 196, 156—171 (1955)] verwiesen, in der der Spezialfall $Q = Z_2$ behandelt ist. Schließlich wird über die weiteren Ergebnisse der zuletzt genannten Arbeit, die Darstellung von Modulformen durch Thetareihen betreffend, berichtet.

M. Kneser.

Zahlentheorie:

● Cheema, M. S. (computed by): **Tables of partitions of Gaussian integers.** (Math. Tables, Vol. 1.) New Delhi: National Institute of Sciences of India 1956. 67 p. Rupees 15.

For $0 < |x|, |y| < 1$, we write

$$F(x, y) = \prod (1 - x^r y^s)^{-1} = 1 + \sum B(n, m) x^n y^m,$$

where r, s run through all pairs of values satisfying $r \geq 0, s \geq 0, r + s > 0$. Again

$$F_k(x, y) = \prod_{r, s \geq 0} (1 - x^r y^{k+s})^{-1} \prod_{s \geq 1} (1 - x^s)^{-1} = \sum B_k(n, m) x^n y^m.$$

These tables give the value of $B(n, m)$ for $0 < n, m \leq 50$, of $B_k(n, m)$ for $k \leq 15, n \leq 50$ and $m \geq 3k$, of $B_{16}(n, m)$ for $m \geq 32, n \leq 50$ and of $B_{17}(n, m)$ for $m = 50$ and $n \leq 50$. Various values of $B_k(n, m)$ not listed can be calculated by formulae given in the introduction. The number $B(n, m)$ is the number of partitions of the bipartite number (n, m) and has been studied by Macmahon, Auluck and the reviewer.

E. M. Wright.

Cohen, Eckford: **Binary congruences in algebraic number fields.** Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 120—122 (1956).

The author announces some results concerning the number of solutions of the congruence $\alpha X^m + \beta Y^m + \varrho \equiv 0 \pmod{P^\lambda}$ over an algebraic number field F , where P is a prime ideal in F and m, λ are natural numbers. The proof will be given elsewhere.

L. K. Hua.

Palamà, Guiseppe: **Polinomi interi in x di grado n dispari che assumono n volte ciascuno dei $2m$ valori $\pm N_1, \dots, \pm N_m$.** Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 368—370 (1956).

Der Grad n wird, wie auch in der Arbeit, im folgenden nur $2n+1$ genannt. Die multigraden Gleichungen

$$(1) \quad a_{11}^\nu + \dots + a_{1, 2n+1}^\nu = \dots = a_{2m, 1}^\nu + \dots + a_{2m, 2n+1}^\nu \quad (\nu = 1, \dots, 2n)$$

mögen eine Lösung der Eigenschaft

$$(2) \quad a_{2\mu-1, \nu} + a_{2\mu, \nu} = (c + b_{\mu\nu}) + (c - b_{\mu\nu}) = \text{const}$$

($\mu = 1, \dots, m; \nu = 1, \dots, 2n+1$) besitzen. Dann gilt das System (1) auch für die um c erniedrigten Basen a , nämlich für $a_{\kappa\lambda} - c$ statt $a_{\kappa\lambda}$. Daraus läßt sich folgern: Setzt man $b_{\mu 1} \dots b_{\mu, 2n+1} = N_{\mu}$ ($\mu = 1, \dots, m$), so hat man in

$$(3) \quad (x - b_{\mu 1}) \dots (x - b_{\mu, 2n+1}) + N_{\mu} = (x + b_{\mu 1}) \dots (x + b_{\mu, 2n+1}) - N_{\mu}$$

das gesuchte Polynom in $2m$ verschiedenen Gestalten vor sich. Läßt man auch gleiche $a_{\kappa\lambda}$ zu, so kann man beliebig viele Beispiele (1) der Art (2) angeben, darunter eins mit dem Lösungspolynom (3)

$$(x \pm 37)(x \mp 17)(x \mp 20) \mp 37 \cdot 17 \cdot 20 = (x \pm 35)(x \mp 7)(x \mp 28) \mp 35 \cdot 7 \cdot 28.$$

Für $m = 2$ und $n = 1$ (s. o.), 2, 3, 4 kennt man Lösungen von (1). Dagegen scheint für $m > 2$ und $n > 1$ nichts bekannt zu sein. Den Fall $m = 1$ behandelte H. L. Dorwart, dies. Zbl. 11, 196.

I. Paasche.

Erdős, P.: On additive arithmetical functions and applications of probability to number theory. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 13—19 (1956).

The survey centres around the contributions of the author and his cooperators about the interplay of probability and number theory. Main stress is put upon the behaviour of the distribution function of an additive arithmetic function.

L. K. Hua.

Schinzel, André: Sur quelques propriétés des nombres $3/n$ et $4/n$, où n est un nombre impair. Mathesis 65, 219—222 (1956).

Von Sierpinski angeregt beweist Verf. zwei Sätze über die Zerlegung rationaler Zahlen in Stammbrüche: 1. $3/n$ ($n > 3$, ungerade) ist Summe von drei verschiedenen Stammbrüchen mit ungeraden Nennern. 2. $4/n$ ($n > 1$, $n \neq 5$) ist Summe von vier verschiedenen Stammbrüchen mit ungeraden Nennern.

D. Tamari.

Newman, Morris: Generalizations of identities for the coefficients of certain modular forms. J. London math Soc. 31, 205—208 (1956).

If n is a non-negative integer, define $p_r(n)$ as the coefficient of x^n in the expansion of

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)^r$$

in powers of x , and define $p_r(n)$ to be zero if n is not a non-negative integer. In earlier papers (this Zbl. 47, 43; 50, 269; 64, 282) the author has proved two identities for $p_r(n)$ for certain small even positive integral values of r . These identities involve a prime number p subject to certain restrictions. In the present paper he generalizes these identities to the extent of replacing the prime number p by an arbitrary power of p in one case and an arbitrary odd power in the other. The argument is a simple argument by induction based on the original identities. The results are as follows. Theorem A. Suppose r is an even positive integer not exceeding 24 and p is a prime greater than 3 such that $r(p-1) \equiv 0 \pmod{24}$. Then for all integral n and positive integral k we have

$$p_r(n p^k + a_k) = p_r(a_k) p_r(n) - p^{r/2-1} p_r(a_{k-1}) p_r(\{n - a_1\}/p),$$

where $a_k = r(p^k - 1)/24$. Theorem B. Suppose $r = 2, 4, 6, 8, 10, 14, 26$ and p is a prime greater than 3 such that $r(p+1) \equiv 0 \pmod{24}$. Then for all integral n and positive integral k we have

$$p_r(n p^{2k-1} + b_k) = (-p)^{r/2-1} p_r(b_{k-1}) p_r(n/p),$$

where $b_k = r(p^{2k} - 1)/24$.

P. T. Bateman.

Newman, Morris: On the existence of identities for the coefficients of certain modular forms. *J. London math. Soc.* **31**, 350—359 (1956).

If r is a given positive integer and p is a given prime number greater than 3, the author proves the existence of identities for $p_r(n)$ of roughly the same type as those discussed in the paper reviewed above, where only certain small values of r are considered. However, in the general case considered here the identities may involve a large number of terms. For example, the author proves that for given r and p there exists a positive integer K and integers c_0, c_1, \dots, c_K not all zero such that

$$\sum_{k=1}^K c_k p_r(p^{2k-1}n + b_k) = c_0 p_r(n/p)$$

for every positive integer n . The proof is effected by writing down a sufficiently large number of suitable functions which (a) are regular in the upper half-plane, (b) are invariant under the subgroup $\Gamma_0(p)$ of the modular group, (c) have no negative powers in their expansions in powers of $\exp(2\pi i\tau)$, and (d) have a bounded number of negative powers in their expansions in powers of $\exp(-2\pi i/p\tau)$.

P. T. Bateman.

Newman, Morris: A table of the coefficients of the powers of $\eta(\tau)$. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **59**, 204—218 (1956).

Define $p_r(n)$ as in the two preceding reviews. The author gives a table of $p_r(n)$ for positive integral values of r and n as follows: $r \leq 13$, $n \leq 800$; $r = 14$, $n \leq 750$; $r = 15$, $n \leq 500$; $r = 16$, $n \leq 400$.

P. T. Bateman.

Uchiyama, Saburô: On a multiple exponential sum. *Proc. Japan Acad.* **32**, 748—749 (1956).

Let k be a finite field with $q = p^v$ elements. Let

$$S_m(f) = \sum_{x_1, \dots, x_m \in k} e(f(x_1, \dots, x_m))$$

where $e(\alpha) = \exp(2\pi i \operatorname{tr} \alpha / p)$ and $f(x_1, \dots, x_m)$ be a polynomial of degree n , not equivalent to a polynomial with indeterminates less than m in number. The author proves that $S_m(f) = O(q^{m-1/2})$, which is almost a consequence of a result of Carlitz and Uchiyama [*Duke math. J.* **24**, 37—41 (1957)] for $m = 1$. *L. K. Hua.*

Tchudakoff, N. G.: Theory of the characters of number semigroups. *J. Indian math. Soc., n. Ser.* **20**, 11—15 (1956).

\mathfrak{G} sei eine kommutative Halbgruppe. $N(\alpha)$ (≥ 0) heißt eine Norm, wenn 1. $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$. 2. Es gibt nur endlich viele $\alpha \in \mathfrak{G}$ mit $N(\alpha) \leq x$. χ sei ein Charakter von \mathfrak{G} , d. h. ein Homomorphismus von \mathfrak{G} in eine Menge komplexer Zahlen und $H(x) = \sum_{1 \leq N(\alpha) \leq e^x} \chi(\alpha)$, $\alpha \in \mathfrak{G}$. Verf. nennt χ einen verallgemeinerten Dirichletschen

Charakter, wenn $H(x) = O(1)$ bei $x \rightarrow \infty$. Hierzu gehören alle Dirichletschen Nicht-hauptcharaktere modulo k und die Nichthauptcharaktere zyklischer Halbgruppen, und es gibt weitere Beispiele (vgl. N. G. Čudakov, dies. Zbl. **52**, 40). Verf. untersucht die Existenzfrage und beweist: Hat \mathfrak{G} eine endliche Basis und ist $N(\alpha) > 0$ und ganz, so besitzt \mathfrak{G} keinen verallgemeinerten Dirichletschen Charakter. Der Beweis beruht auf der Parsevalschen Gleichung für die zugehörige L -Reihe. Verf. gibt ferner einen Überblick über Ω -Aussagen, die von der Basis von \mathfrak{G} abhängen, für $H(x)$. (vgl. N. G. Čudakov u. A. K. Pavljučuk, dies. Zbl. **49**, 313.) Abschließend werden einige Probleme genannt.

H.-E. Richert.

Bredichin, B. M.: Ein Beispiel eines endlichen Homomorphismus mit beschränkter summatorischer Funktion. *Uspechi mat. Nauk* **11**, Nr. 4 (70), 119—122 (1956) [Russisch].

\mathfrak{G} sei eine Halbgruppe reeller Zahlen (≥ 1) mit einer höchstens abzählbaren Basis. Ein endlicher Homomorphismus ist eine homomorphe Abbildung $\alpha \rightarrow \chi(\alpha)$,

$\alpha \in \mathfrak{G}$, $\chi(\alpha) \in Z$ (endliche Menge komplexer Zahlen). $\chi(\alpha)$ heißt ein verallgemeinerter Dirichletscher Charakter, wenn die summatorische Funktion $\sum_{1 \leq \alpha \leq x, \alpha \in \mathfrak{G}} \chi(\alpha)$ beschränkt ist. Čudakov (s. vorsteh. Referat) stellte die Frage, ob für eine Halbgruppe natürlicher Zahlen ein verallgemeinerter Dirichletscher Charakter existiert, der von den gewöhnlichen Dirichletschen Charakteren verschieden ist. Verf. beweist in dieser Richtung: Jeder endliche Homomorphismus $\chi(r)$ einer Halbgruppe \mathfrak{G} von rationalen Zahlen $r \geq 1$ mit endlicher Basis r_1, \dots, r_N ($N \geq 2$) kann zu einem verallgemeinerten Dirichletschen Charakter $\chi_0(r)$ einer Halbgruppe $\mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}$ von rationalen Zahlen fortgesetzt werden.

H.-E. Richert.

Richert, Hans-Egon: Summierbarkeit Dirichletscher Reihen und asymptotische Zahlentheorie. Centre Belge Rech. math., Colloque Théorie des Nombres, Bruxelles 19—21 déc. 1955, 85—92 (1956).

An announcement of results proved elsewhere (this Zbl. 71, 286). M. I. Yüh.

Hlawka, Edmund: Das inhomogene Problem in der Geometrie der Zahlen. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 20—27 (1956).

The author gives a masterly review of the work done in the years preceding the Congress on the various types of non-homogeneous problems which arise in the Geometry of Numbers.

C. A. Rogers.

Davenport, H.: Simultaneous diophantine approximation. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 9—12 (1956).

Kurze, zusammenfassende Darstellung von Problemen und Resultaten über simultane diophantische Approximation. Erwähnt werden neuere Ergebnisse vom Verf. (dies. Zbl. 48, 32; 56, 43; 64, 45) und J. W. Cassels (dies. Zbl. 64, 44).

F. Kasch.

Analysis

Mengenlehre:

Banaschewski, Bernhard: Hüllensysteme und Erweiterung von Quasi-Ordnungen. Z. math. Logik Grundl. Math. 2, 117—130 (1956).

Die grundlegende Arbeit über die Vervollständigungen einer (teilweise) geordneten Menge E . Diejenigen vollständigen Verbände, in denen die (teilweise) geordnete Menge E supremum-dicht liegt, entsprechen im wesentlichen eindeutig den sog. Hüllenerweiterungen von E (bzw. vom kanonischen Bild \mathfrak{E} , dem System der Hauptanfänge — abgeschlossenen Anfangsintervalle — $\left] \leftarrow, x \right]$ von E). Die Hüllenerweiterungen sind genau diejenigen Hüllensysteme \mathfrak{H} über E (J. Schmidt, dies. Zbl. 52, 26), welche als Mengen zwischen dem System \mathfrak{E} der Hauptanfänge und dem System $\hat{\mathfrak{E}}$ aller Anfänge von E liegen (A Anfang, wenn $a \in A$ und $b \leq a$, $b \in E$ stets $b \in A$ impliziert). Die Hüllenerweiterungen sind auch genau diejenigen Hüllensysteme über E , welche die vorgegebene Ordnung \leq „induzieren“. Es gibt eine größte Hüllenerweiterung, eben das System $\hat{\mathfrak{E}}$ aller Anfänge, wie eine kleinste, die Dedekind-MacNeillesche Vervollständigung durch „Schnitte“ (systematisch: „normale“ Anfänge, siehe J. Schmidt, dies. Zbl. 73, 38). Näher untersucht wird ferner die „Idealerweiterung“, die kleinste algebraische (induktive) Hüllenerweiterung; sie besteht bei einem Verband (ja schon bei einem Supremum-Halbverband) E aus den üblichen Idealen (bei einer beliebig geordneten Menge aus den Idealen im Sinne von Frink, dies. Zbl. 55, 259). Verschiedene Charakterisierungen der drei genannten Hüllenerweiterungen (Vervollständigungen); Behandlung des Problems des Zusammenfallens zweier von ihnen. Dieses letzte Problem wird insbeson-

dere erörtert in einem kommutativen Ring mit Einselement, dessen Idealsystem \mathfrak{J} ja eine Hüllenerweiterung ist der durch \mathfrak{J} induzierten Ordnung des Ringes ($a \leq b$ hat hier die Bedeutung: a Vielfaches von b).
Jürgen Schmidt.

Guillaume, Marcel: Sur les topologies définies à partir d'une relation d'ordre. Acad. roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8° 29, 41 p. (1956).

Verf. betrachtet verschiedene „natürliche“ (ordnungstheoretisch definierbare) Topologien in geordneten Mengen: 1. die „linke“ und „rechte“ Topologie [Bourbaki, Actual. sci. industr. Nr. 858 (1940, dies. Zbl. 26, 431), p. 7, ex. 1], d. h. die beiden zur Ordnung gehörigen „diskreten“ Topologien im Sinne von Alexandroff-Hopf (offene Mengen der linken = abgeschlossene Mengen der rechten Topologie = Anfänge); 2. die Intervalltopologie [Frink, Trans. Amer. math. Soc. 51, 569—582 (1942); Birkhoff, Lattice theory (dies. Zbl. 33, 101), p. 60: abgeschlossene Intervalle bilden Subbasis für die topologisch abgeschlossenen Mengen], hier etwas praktischer definiert als die grösste Topologie, bei der alle abgeschlossenen Anfangs- und Endintervalle $\leftarrow, x\right\rangle$ bzw. $\left\langle x, \rightarrow\right\rangle$ topologisch abgeschlossen sind, sowie als nahe-
 liegende Modifikationen die „Topologie der linken bzw. rechten Sektionen“, die grösste Topologie, bei der nur die Anfangs- bzw. nur die Endintervalle topologisch abgeschlossen sind; 3. nur im vollständigen Verband betrachtet Verf. die auf Birkhoff und Kantorovitch zurückgehende Ordnungstopologie (topologisch abgeschlossen = Ordnungslimes eines Filters \mathfrak{F} über M gehört, falls vorhanden, zu M ; zur Definition des Ordnungslimes eines Filters siehe vor allem A. J. Ward, dies. Zbl. 66, 21), hier nach Bourbakischem Muster (loc. cit. p. 42) als die feinste Topologie definiert, bei der die Ordnungskonvergenz des Filters \mathfrak{F} gegen x die topologische Konvergenz von \mathfrak{F} gegen x nach sich zieht. Neues über diese Topologien ist in der Arbeit nicht enthalten; von der Ordnungstopologie (eines vollständigen Verbandes) wird, unter Berufung auf die durchaus irreführenden Ausführungen von Birkhoff (loc. cit. p. 60ff.) fälschlich behauptet, sie sei Hausdorffsch; dem steht das von Floyd und McShane angegebene Beispiel des vollständigen Booleschen Verbandes der regulär-offenen Teilmengen der Geraden entgegen (Floyd, dies. Zbl. 65, 266). Hauptzweck der Arbeit ist offenbar die Einführung der folgenden neuen Topologien (Verallgemeinerungen der im total geordneten Falle von Bourbaki loc. cit. p. 8 ex. 3 definierten Topologien τ_-, τ_+, τ_0): 1. der „linken“ bzw. „rechten longitudinalen Topologie“ (M topologisch abgeschlossen = das Supremum bzw. Infimum einer nichtleeren Kette $K \subset M$ gehört, falls vorhanden, zu M); 2. der „longitudinalen Topologie“ schlechthin, bei der M genau dann topologisch abgeschlossen ist, wenn in jeder der beiden unter 1 genannten Topologien. (Die longitudinale Topologie ist aufs engste verwandt mit den auf der Ordnungskonvergenz sog. transfiniter Folgen beruhenden Topologien $O_1 S$ und $O_2 S$ von Rennie [The theory of lattices (dies. Zbl. 44, 379), p. 18], de facto feiner als die feinere von beiden, $O_1 S$, und damit feiner als alle acht von Rennie loc. cit. studierten Topologien.) Die Hausdorffsche Trennbarkeit der longitudinalen Topologie bleibt, da mit der angeblichen Trennbarkeit der Ordnungstopologie begründet, unbewiesen: zu diesem Beweisversuch wird die Einbettung einer beliebig geordneten Menge in ihre MacNeillesche Hülle herangezogen, weil Verf., ungeachtet der Arbeiten von Löwig [Ann. of Math., II. Ser. 42, 1138—1196 (1941)], Rennie und A. J. Ward loc. cit., die Ordnungstopologie nur in vollständigen Verbänden betrachtet. — Es werden Zusammenhänge zwischen Relativierung der Ordnung und Relativierung der Topologie, direktem Produkt der Ordnungen und direktem Produkt der Topologien, sowie der Spezialfall der total und der wohlgeordneten Mengen diskutiert. — Die Arbeit wird belastet durch eine das technisch erforderliche Maß wohl doch weit überschreitende Fülle von Symbolen, die während der Lektüre ohne Register stets gegenwärtig zu haben, dem Ref. nicht gelungen ist.
Jürgen Schmidt.

Landsberg, Max: Filter mit endlichem Index und Linearformen auf Produkten R^J . *Math. Ann.* **132**, 256—262 (1956).

Ist ein Filter \mathfrak{F} über J Durchschnitt endlich vieler Ultrafilter, $\mathfrak{F} = \bigcap_{v=1}^n \mathfrak{U}_v$, so ist diese Darstellung eindeutig: $\{\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_n\}$ ist dann das System aller Ultrafilter $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{F}$. Verf. nennt einen solchen Filter \mathfrak{F} von endlichem Index und die Zahl n den Index von \mathfrak{F} (da er den uneigentlichen Filter $\mathfrak{P} J$ auch als Ultrafilter rechnet, ist der Index von \mathfrak{F} bei ihm um 1 größer als nötig und wohl auch praktisch gewesen wäre); der Index von \mathfrak{F} kann auch definiert werden als die größte Anzahl paarweise disjunkter Mengen des zu \mathfrak{F} gehörigen Rasters \mathfrak{F}^* (siehe die in dies. Zbl. **53**, 29 besprochene Arbeit des Ref., insbes. § 16). Ein Hauptfilter ist genau dann von endlichem Index, wenn er von einer endlichen Menge erzeugt wird; der Index ist dann gleich der Mächtigkeit der erzeugenden Menge. — Verf. betrachtet nun den topologischen Vektorraum R^J aller auf J definierten reellen Funktionen x . Jedem (nicht notwendig stetigen) linearen Funktional u auf R^J wird ein Filter \mathfrak{F}_u über J wie folgt zugeordnet: $F \subseteq J$ soll zu \mathfrak{F}_u gehören, wenn $u(x) = 0$ für alle auf F verschwindenden reellen Funktionen $x \in R^J$; insbesondere ist \mathfrak{F}_0 (0 Nullfunktional) gleich dem uneigentlichen Filter $\mathfrak{P} J$. Die Linearform u ist genau dann stetig, wenn der zugehörige Filter \mathfrak{F}_u von endlichem Index und Hauptfilter ist (das ist die Quintessenz der weniger durchschlagend formulierten Sätze 5 und 6 der Note, — Satz 6 ist genau genommen sogar eine bloße Abschwächung von Satz 5). — Als Filter \mathfrak{F}_u ist übrigens jeder δ -Filter \mathfrak{F} über J darstellbar, d. h. jeder Filter, der sogar bezüglich abzählbarer Durchschnittsbildung abgeschlossen ist, anders ausgedrückt: der von überabzählbarem Schränkungsgrad [J. Schmidt, *Z. math. Logik Grundl. Math.* **1**, 271—303 (1955; dies. Zbl. **67**, 29), insbes. § 2] oder Durchschnittsgrad [Landsberg, *Math. Ann.* **131**, 429—434 (1956)], ist (wobei man den Hauptfiltern sinnvoll als Schränkungsgrad eine jede eigentliche Kardinalzahl übertreffende uneigentliche Kardinalzahl zuweist.). Hieraus folgt: genau dann ist schon jede Linearform u , die für \mathfrak{F}_u von endlichem Index und zugleich überabzählbarem Schränkungsgrad ist, stetig, wenn jeder Ultrafilter \mathfrak{U} über J mit überabzählbarem Schränkungsgrad ein Hauptfilter ist (ein sehr bemerkenswertes Ergebnis, weil, zufolge Landsberg loc. cit., der Schränkungsgrad eines nichttrivialen Ultrafilters stets eine reguläre Limeszahl, also \aleph_0 oder eine Hausdorffsche „exorbitante“ Zahl ist).

Jürgen Schmidt.

Ohkuma, Tadashi: Sur quelques ensembles ordonnés linéairement. *Fundamenta Math.* **43**, 326—337 (1956).

In seinen Untersuchungen (dies. Zbl. **49**, 39; **53**, 222) über die Struktur homogener Ketten (HK = Ketten mit transitiver Automorphismengruppe) war Verf. auf folgendes Problem gestoßen, das hier gelöst wird: gibt es außer der Kette J der ganzen Zahlen noch weitere „einzig homogene“ Ketten (EHK), d. h. solche HK, in denen es zu jedem Paar (x, y) stets nur einen Automorphismus φ mit $\varphi x = y$ gibt (verschiedene äquivalente Formulierungen in der zweiten der zitierten Noten)? Eine solche EHK ist notwendig eine additive Untergruppe des reellen Zahlenkontinuums, und zwar insichdicht, sofern sie von der Menge J der ganzen Zahlen verschieden ist. Eine solche additive Untergruppe E wird nun als Vereinigung einer rekursiv definierten transfiniten Folge von Untergruppen E_α (beginnend mit der Menge der rationalen Zahlen als E_1) tatsächlich konstruiert und damit obige Frage bejaht. Jede Klasse isomorpher EHK (betrachtet als additive Untergruppen des Kontinuums) hat nun die Mächtigkeit \mathfrak{c} des Kontinuums; die Anzahl der verschiedenen EHK, die Verf. höchst verwickelt zu $2^{\mathfrak{c}}$ zu bestimmen gelingt, ist also gleich \mathfrak{c} mal der Anzahl der Klassen isomorpher EHK, welche letztere also auch gleich $2^{\mathfrak{c}}$ sein muß.

Jürgen Schmidt.

Benado, Mihail: Bemerkungen zu einer Arbeit von Øystein Ore. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 1, Nr. 2, 5—12 (1956).

Verf. verschärft Sätze von Ore und MacLane (dies. Zbl. 60, 61) über Ketten in geordneten Mengen. Sei E eine geordnete Menge, in der alle beschränkten Ketten endlich sind; ein Quadrupel (u, v, a, b) von Elementen aus E mit $v < a < u$, $v < b < u$ heißt einfaches Viereck, wenn für alle p, q mit $a \leq p < u$, $b \leq q < u$ dann v maximale untere Schranke von $\{p, q\}$ ist und für alle p', q' mit $v < p' \leq b$, $v < q' \leq a$ auch u minimale obere Schranke von $\{p', q'\}$. Von zwei endlichen maximalen Ketten K, L mit gleichem ersten Element s und gleichem letzten Element t heißt die eine einfache Verbiegung der anderen, wenn es v, a, u in K und v, b, u in L so gibt, daß $K \cap [s, v] = L \cap [s, v]$, $K \cap [u, t] = L \cap [u, t]$ und (u, v, a, b) ein einfaches Viereck ist. Zwei endliche maximale Ketten mit gleichen ersten und letzten Elementen sind dann stets durch endlich viele einfache Verbiegungen ineinander zu überführen; weiter ist die Jordan-Dedekindsche Kettenbedingung äquivalent zu folgendem: zu jedem einfachen Viereck (u, v, a, b) gibt es einen Oreschen simple cycle, dessen Komponenten beide gleich lang sind und u, v, a, b enthalten.

W. Felscher.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

LeBlanc, L. and G. E. Fox: On the extension of measure by the method of Borel. Canadian J. Math. 8, 516—523 (1956).

Das bekannte Borelsche Verfahren der Konstruktion des kleinsten σ -Mengen-Boole-Ringes $R_{\omega_1} = S(R)$ über einen Mengen-Boole-Ring R und gleichzeitig der Erweiterung eines σ -Maßes μ von R auf $S(R)$ durch transfinite Induktion wird von Verff. zur Erweiterung eines beliebigen reellwertigen, nicht notwendig endlichen, monotonen σ -additiven Maßes μ von R auf $S(R)$ angewandt. Wesentliche Schwierigkeiten und neue Beweismethoden entstehen bei dieser Verallgemeinerung des Maßes nicht.

D. A. Kappos.

Luxemburg, W. A. J.: On a characteristic property of σ -finite measures. Nieuw Arch. Wiskunde, III. Ser. 4, 124—126 (1956).

Es sei $(S, \mathfrak{S}, \gamma)$ ein Maßraum, d. h. S eine Grundmenge, \mathfrak{S} ein σ -Körper von Teilmengen $E \subseteq S$, und γ ein σ -additives nicht negatives Maß auf \mathfrak{S} . Es gelte $S = \bigcup E$. Es bedeute M^+ die Gesamtheit aller γ -meßbaren nicht negativen Funktionen u auf S .

Eine Funktion λ auf M^+ mit $0 \leq \lambda(u) \leq +\infty$, $u \in M^+$, heißt eine Norm-Funktion, wenn gilt: L_1) $\lambda(u) = 0$, falls $u(x) = 0$ für fast alle $x \in S$; L_2) $\lambda(u) \leq \lambda(v)$, wenn $u(x) \leq v(x)$ für alle $x \in S$; L_3) $\lambda(u + v) \leq \lambda(u) + \lambda(v)$; L_4) $\lambda(ku) = k\lambda(u)$ für alle $k \geq 0$. Gilt außerdem: L_5) Aus $u_v \in M^+$, $u_v(x) \leq u_{v+1}(x)$, für alle $x \in S$, $v = 1, 2, \dots$ folgt $\lambda(\sup u_v) = \sup \lambda(u_v)$, so heißt λ eine Längen-Funktion. Jeder Norm-Funktion λ entspricht durch $\lambda'(v) = \sup \int u(x)v(x)d\gamma$ für alle $u \in M^+$ mit $\lambda(u) \leq 1$, die sogenannte assoziative Norm-Funktion λ' . Aus der Definition folgt, daß die assoziative Norm-Funktion einer beliebigen Norm-Funktion stets eine Längen-Funktion ist. Wenn $\lambda(u) = \lambda''(u)$ für alle $u \in M^+$ gilt, dann heißt die Norm-Funktion λ reflexiv. Verf. hat in seiner Dissertation (Banach Function Spaces, Thesis Delft Technical University, Assen 1955) gezeigt: Falls $(S, \mathfrak{S}, \gamma)$ total σ -endlich ist, dann ist eine Norm-Funktion dann und nur dann reflexiv, wenn sie eine Längen-Funktion ist. Jetzt zeigt Verf.: Wenn jede Längen-Funktion reflexiv ist, dann ist der Maßraum $(S, \mathfrak{S}, \gamma)$ σ -endlich. Ist außerdem $S \in \mathfrak{S}$, so ist sogar $(S, \mathfrak{S}, \gamma)$ total σ -endlich.

D. A. Kappos.

Ridder, J.: Die Einführung von beschränkt- und total-additivem Maß. I, II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 143—154; 155—165 (1956).

Ist Φ eine reellwertige, additive (bzw. σ -additive) und beschränkte Mengenfunktion, die auf einem Körper K von Teilmengen eines Grundraumes R definiert

ist, so kann man nach Verf. mit Hilfe dieser Funktion Φ eine Maß- und Integraltheorie folgendermaßen entwickeln: Es seien G und g die positive und negative Variation von Φ auf K , dann setze man (Totalvariation) $T(A) \stackrel{\text{Def}}{=} G(A) + |g(A)|$, $A \in K$. Es bezeichne K_1 den Oberkörper (bzw. σ -Oberkörper) von K , der aus allen $B \subseteq R$ besteht mit der Eigenschaft: Es gibt ein $A \in K$ mit $B \subset A$ (bzw. es gibt eine Überdeckung $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} \supseteq B$ mit $A_{\nu} \in K$). Dann setze man als äußere T -Funktion $T_{\alpha}(B) \stackrel{\text{Def}}{=} \inf \{T(A), \text{ für } B \subset A, A \in K\}$ [bzw. $\stackrel{\text{Def}}{=} \inf \{\sum T(A_{\nu}), \text{ für alle Überdeckungen } \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} \supseteq B, A_{\nu} \in K\}$] und außerdem als innere T -Funktion $T_i(B) \stackrel{\text{Def}}{=} T_{\alpha}(X) - T_{\alpha}(X - B)$, für ein $X \supset B$, $X \in K$ für jedes $B \in K_1$. Die Definition von T_i ist unabhängig von der Wahl der Menge $X \supset B$ in K . Ein $B \in K_1$ wird als Φ -meßbar erklärt wenn $T_{\alpha}(B) = T_i(B) \stackrel{\text{Def}}{=} m_T(B)$ gilt. Die Gesamtheit aller Φ -meßbare Mengen bildet einen Oberkörper (σ -Oberkörper) K_2 von K und die Funktion m_T ist ein beschränktes additives (bzw. σ -additives) und vollständiges Maß auf K_2 . Ein unbeschränktes additives (bzw. σ -additives) Maß kann dann auf dem Oberkörper (bzw. σ -Oberkörper) K_3 von K_2 in bekannter Weise erklärt werden, der aus allen Teilmengen $Y \subset R$ besteht mit der Eigenschaft: für jedes $A \in K$ gilt $YA \in K_2$. Außer der Maßfunktion m_T , die mit Hilfe der Totalvariation eingeführt wurde, werden vom Verf. auch andere Maßfunktionen eingeführt und ihre Beziehung zu m_T untersucht. Eine entsprechende Maßtheorie wird dann in Produkträumen entwickelt. Im zweiten Teil der Arbeit wird diese Maßtheorie zur Einführung des Begriffes des abstrakten Riemannschen bzw. Lebesgueschen Integrales analytisch und geometrisch angewandt. Die Theorie des Verf. ist mit zahlreichen Beispielen belegt.

D. A. Kappos.

Morse, Marston and William Transue: The representation of a C-bimeasure on a general rectangle. Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 89—95 (1956).

Bewiesen wird der im Referat einer anderen Arbeit der Verff. (dies. Zbl. 67, 280) beschriebene Darstellungssatz eines C-Bimaßes Γ über dem Produkt $E' \times E''$ zweier Intervalle, die offen, halboffen oder abgeschlossen sein können, mit Hilfe einer regulären Verteilungsfunktion k in der Form

$$\Gamma(u, v) = \int_{E'} u(s) d_s \int_{E''} v(t) d_t k(s, t).$$

Dabei heißt k regulär, wenn für beliebige abgeschlossene Teilintervalle I' und I'' von E' und E'' die Fréchettsche Variation von k über $I' \times I''$ sowie die üblichen, Jordanschen Variationen aller partiellen Funktionen $k(\cdot, t_1)$ und $k(s_1, \cdot)$ über I' bzw. I'' endlich sind und wenn ferner diese partiellen Funktionen linksseitig stetig sind in den Intervallen E' bzw. E'' , abgesehen höchstens von den rechten Endpunkten. k kann zu gegebenen t_1 und s_1 so gewählt werden, daß $k(s, t_1) = k(s_1, t) = 0$ für alle s und t gilt und ist dann eindeutig bestimmt. Schließlich erzeugt jede reguläre Verteilungsfunktion k vermöge der obigen Formel ein C-Bimaß Γ .

K. Krickeberg.

Morse, Marston and William Transue: C-Bimeasures Λ and their integral extensions. Ann. of Math., II. Ser. 64, 480—504 (1956).

Die Arbeit behandelt die Ausdehnung eines C-Bimaßes Λ , definiert in früheren Arbeiten der Verff. (vgl. insbesondere dies. Zbl. 67, 280; die Bezeichnungen dieses Referates werden im folgenden verwendet), von $K_c \times K_c''$ auf umfassendere Funktionenräume. Es seien x und y komplexwertige, auf E' bzw. E'' definierte Funktionen. Das Paar (x, y) heißt Λ -integrierbar, wenn Folgendes zutrifft: 1. Für jedes x aus K_c'' existiert das Integral $\Lambda(\cdot, v)(x)$ (man beachte, daß $\Lambda(\cdot, v)$ nach Definition eines Bimaßes ein (komplexwertiges) Radonsches Maß auf E' darstellt), und die Abbildung $v \rightarrow \Lambda(\cdot, v)(x)$ ist ein Radonsches Maß auf E'' , bezeichnet durch $\Lambda(x, \cdot)$. 2. Es existiert das analog definierte Radonsche Maß $\Lambda(\cdot, y)$ auf E' . 3. Die Integrale

$A(x, \cdot)(y)$ und $A(\cdot, y)(x)$ sind vorhanden und einander gleich. Das Integral $A(x, y)$ ist dann definiert als der gemeinsame Wert von $A(x, \cdot)(y)$ und $A(\cdot, y)(x)$. — Zunächst werden die Maße $A(x, \cdot)$ und $A(\cdot, y)$ eingehend untersucht und Approximations- und Grenzwertsätze bewiesen, wobei die loc. cit. erwähnten Grenzwertsätze zugrunde liegen. Ein Beispiel zeigt, daß das Studium dieser Maße nicht völlig zurückgeführt werden kann auf das der entsprechenden Maße, die mit den Komponenten der Zerlegung von x in $(\Re x)^+$, $(\Re x)^-$, $(\Im x)^+$ und $(\Im x)^-$ und derselben Zerlegung von y gebildet sind. Das folgende Fundamentaltheorem der Arbeit, ein Analogon zum Fubinischen Satz, wird vielmehr in vektoranalytischer Formulierung mit Hilfe der genannten Grenzwertsätze bewiesen: Existieren die Integrale $A(x, \cdot)(y)$ und $A(\cdot, y)(x)$ und ist $A^*(|x|, |y|) < +\infty$, so ist (x, y) integrierbar. Die Theorie wird weiter durch die folgenden Gegenbeispiele illustriert, in denen p und q unterhalb stetige nicht-negative Funktionen seien: Es kann $A(p, \cdot)(q) \neq A(\cdot, q)(p)$ sein, und andererseits ist $A^*(p, q) < +\infty$ nicht notwendig für die Integrierbarkeit von (p, q) . Dafür, daß (p, q) integrierbar sei, werden notwendige und hinreichende Kriterien in der Form von Grenzwertbedingungen angegeben. Schließlich wird die Integrierbarkeit B -meßbarer Funktionen (x, y) eingehend untersucht.

K. Krickeberg.

Sion, Maurice: Variational measure. Trans. Amer. math. Soc. 83, 205—221 (1956).

Eine reellwertige nicht negative Funktion ν , die für alle Teilmengen einer Menge A definiert ist, heißt nach Verf. ein Maß ν in A , wenn gilt: $\nu(\emptyset) = 0$, und $\nu(X) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(X_k)$, wenn $X \subset \bigcup X_k \subset A$. Eine Menge X heißt dann ν -meßbar, wenn gilt: $\nu(Y) = \nu(Y \cap X) + \nu(Y - X)$ für jedes $Y \subset A$. Ein Maß ν in A heißt ein äußeres Maß ν in A , wenn zu jedem $X \subset A$ eine ν -meßbare Menge X' mit $X \subset X'$ und $\nu(X) = \nu(X')$ existiert. Es sei nun F ein System von Mengen α . Dann wird mit $\mathfrak{P}(F)$ die Gesamtheit aller Zerlegungen $P = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subset F$ der Menge $\sigma F = \bigcup_{\alpha \in F} \alpha$ in endlich viele, paarweise fremde Mengen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ aus F . Es sei ferner eine Funktion f mit der Menge σF als Definitionsbereich und mit Werten in einer beliebigen Menge. Es bezeichne $\text{rng } f$ die Menge der Werte von f . In $\text{rng } f$ sei außerdem ein Maß ν definiert. Es sei weiter vorausgesetzt: 1) für jedes $\alpha \in F$ existiert ein $P \in \mathfrak{P}(F)$ mit $\alpha \in P$, 2) $\mathfrak{P}(F)$ sei bezüglich der üblichen Feinheitsrelation der Zerlegungen gerichtet, d. h. aus P und $P' \in \mathfrak{P}(F)$ folgt stets die Existenz einer Zerlegung $P'' \in \mathfrak{P}(F)$, die feiner als P und P' ist. Dann definiert Verf. ein variationales Maß $\mu = V(F, f, \nu)$ als eine Funktion μ , die für alle Teilmengen $\beta \subset \sigma F$ durch

$$\mu(\beta) = \sup \left(\sum_{\alpha_i \in P} \nu(*f(\beta \alpha_i)), \text{ für alle } P \in \mathfrak{P}(F) \right)$$

definiert ist. Hierbei ist $*f(\beta \alpha_i) = \{y \in \text{rng } f; \exists x \in \beta \alpha_i \text{ mit } y = f(x)\} \subseteq \text{rng } f$. Sind die Bedingungen 1) und 2) nicht erfüllt, so wird μ durch: $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\beta) = \infty$ für jedes $\beta \subset \sigma F$ mit $\beta \neq \emptyset$ definiert. Verf. zeigt: ein variationales Maß $\mu = V(F, f, \nu)$ ist stets ein Maß in σF und jedes $\alpha \in F$ ist μ -meßbar. Ferner werden die Eigenschaften von $V(F, f, \nu)$ untersucht, wenn ν ein äußeres Maß in σF ist bzw. wenn die Menge $\mathfrak{P}(F)$ der Zerlegungen fein ist. $\mathfrak{P}(F)$ wird als fein erklärt, wenn sie nicht leer ist, die obige Eigenschaft 1) erfüllt und außerdem die Eigenschaft: zu je zwei Zerlegungen P' und P'' existiert stets ein Netz P_n , $n = 1, 2, \dots$, in $\mathfrak{P}(F)$ (d. h. eine Folge von immer feineren Zerlegungen P_n derart, daß jedem Paar von Punkten x und $y \in \sigma F$ mit $x \neq y$ ein Index n und $\alpha \in P_n$, $\beta \in P_n$, $\alpha \beta = \emptyset$ mit $x \in \alpha$, $y \in \beta$ entsprechen) derart, daß P_n feiner als beide Zerlegungen P' und P'' für jedes $n = 1, 2, \dots$ ist. Die Eigenschaften von $V(F, f, \nu)$ werden auch untersucht, wenn σF als ein topologischer Raum erklärt ist; auch Bedingungen für die Existenz von Teilmengen der Menge σF mit strikt positivem und endlichem $V(F, f, \nu)$ werden auf-

gestellt. Die Theorie des Verf. wird dann für gewisse Systeme F von Teilmengen der reellen Geraden R und für reellwertige Funktionen f auf σF angewandt. Eine Frage von A. P. Morse, die die Theorie des Verf. angeregt hat: ob eine Teilmenge der Geraden R , die bezüglich jedes in R definierbaren Maßes ν meßbar ist, durch eine reelle Abbildung f , die stetig und von beschränkter Variation ist, auf eine auch ν -meßbare Teilmenge von R für jedes ν abgebildet wird, wird in der Arbeit des Verf. nicht beantwortet, jedoch werden allgemeine Bedingungen aufgestellt, die Klassen von Abbildungsfunktionen f und Klassen von Maß ν erfüllen müssen, damit die ν -Meßbarkeit für jedes ν bei der Abbildung invariant bleibt. Für Einzelheiten verweisen wir auf die Arbeit des Verf. Interessant sind die Konsequenzen der Theorie bezüglich der nicht meßbaren bzw. analytischen Punktmengen. D. A. Kappos.

Neugebauer, Christoph J.: A cyclic additivity theorem of the Lebesgue area. II. *Rivista Mat. Univ. Parma* 7, 283—292 (1956).

This paper is an application to Lebesgue area of a result of the author on a general cyclic additivity theorem (Part I, this Zbl. 73, 179). Using the terminology of the above review let \mathfrak{P} be the collection of all finitely connected polygonal regions in Euclidean 2-space E_2 and let \mathfrak{A} be the family of subsets of E_2 generated by \mathfrak{P} . Let $(\mathfrak{T}, \mathfrak{A})$ be the class of all continuous mappings (T, A) from $A \in \mathfrak{A}$ into Euclidean 3-space E_3 . For $A \in \mathfrak{A}$, A° (the interior of A) is admissible in the sense of Cesari and for such admissible sets Cesari has defined the Lebesgue area $L(T, A^\circ)$ (Surface Area, this Zbl. 73, 41). On setting $L(T, A) = L(T, A^\circ)$ for $(T, A) \in (\mathfrak{T}, \mathfrak{A})$ the author shows that $L(T, A)$ is a functional to which his general cyclic additivity theorem applies. E. Mickle.

Neugebauer, Christoph J.: A further extension of a cyclic additivity theorem of a surface integral. III, *Rivista Mat. Univ. Parma* 7, 333—347 (1956).

(Part II see the preceding review.) A subset A of the Euclidean plane E_2 is termed admissible provided one of the following cases hold. (a) A is a simply or finitely connected Jordan region. (b) A is a finite union of disjoint regions of type (a). (c) A is an open set in E_2 . (d) A is any set open in a set of type (a), (b) or (c). For a continuous mapping (T, A) from an admissible set A in E_2 into a compact set X in Euclidean space E_3 for which the Lebesgue area $L(T, A)$ is finite Cesari has introduced a surface integral $J(T, A)$ (Surface area, this Zbl. 73, 41). In this paper it is shown that $J(T, A)$ is cyclically additive in the following sense. An unrestricted factorization of a mapping (T, A) consists of a Peano space \mathfrak{M} , a subset \mathfrak{M}^* of \mathfrak{M} and two continuous mappings f from A into \mathfrak{M}^* and s from \mathfrak{M}^* into E_3 such that $T = s f$. For a component G of A either $r_G f(G) \cap \mathfrak{M}^* = \emptyset$ or $r_G f(G) \subset \mathfrak{M}^*$ where r_G is the monotone retraction from \mathfrak{M} onto a proper cyclic element C of \mathfrak{M} . Let \mathfrak{R} be the class of proper cyclic elements C of \mathfrak{M} for which there is at least one component G of A such that $r_G f(G) \subset \mathfrak{M}^*$ and for each $C \in \mathfrak{R}$ let G_C be the union of all components G of A for which $r_G f(G) \subset \mathfrak{M}^*$. The main result of this paper is that

$$J(T, A) = \sum J(s r_C f, G_C) \text{ for } C \in \mathfrak{R}.$$

This is a generalization of a previous result of the author on surface integrals [*Rivista Mat. Univ. Parma* 6, 239—259 (1955)] where A is taken to be a simply connected Jordan region. E. Mickle.

Pauc, Chr.: Contributions à la théorie de la dérivation de fonctions d'ensemble. *Proc. internat. Congr. Math.* 1954 Amsterdam 3, 127—131 (1956).

Bericht über neuere Untersuchungen zur Ableitungstheorie betreffend Mengenfunktionen. Im ersten Teil handelt es sich um die Deutung des Radon-Nikodymschen Integranden σ -additiver Funktionen als Ableitung bezüglich Vitalischer Basen; insbesondere sind hier Sätze von Hayes und Pauc [*Canadian J. Math.* 7, 221—274 (1955)] zu erwähnen. — Im zweiten Teil wird eine Burkill-Ward-Denjoysche Theorie

für Zellfunktionen skizziert unter Bezugnahme unter anderem auf Noten von Pauc (dies. Zbl. 50, 60) sowie von Pauc und Rutovitz (dies. Zbl. 64, 50), außerdem von Krickeberg (dies. Zbl. 72, 45). Eine ausführliche Arbeit von Pauc und Rutovitz wird demnächst in den Ann. Mat. pura appl. erscheinen. *Otto Haupt.*

Nikol'skij, S. M.: Über die Fortsetzung von Funktionen mehrerer Veränderlicher unter Erhaltung ihrer differentiellen Eigenschaften. Mat. Sbornik, n. Ser. 40(82), 243—268 (1956) [Russisch].

G sei ein Gebiet des n -dim. Raumes R_n . ϱ sei eine ganze Zahl ≥ 0 . Die Funktion f sei in G definiert. (a) f gehöre zur Klasse $W_p^{(\varrho)}(G; K)$, wenn f und die (verallgemeinerten) partiellen Ableitungen von f der Ordnung $\leq \varrho$ zu $L_p(G)$ gehören und für eine beliebige partielle Ableitung ψ der Ordnung ϱ gilt: $\|\psi\|_{L_p(G)} \leq K$, (b) f gehöre zur Klasse $W_p^{(0)} H^{(\alpha)}(G; M)$, $0 < \alpha < 1$, $M > 0$, wenn

$$\|f(\bar{Q} + \bar{h}) - f(\bar{Q})\|_{L_p(G')} \leq M|\bar{h}|^\alpha$$

ist, für alle Gebiete G' , deren abgeschlossene Hülle in G liegt und alle Vektoren \bar{h} mit der Eigenschaft, daß $Q' + t\bar{h} \in G$ ist für alle $Q' \in G'$ und $0 \leq t \leq 1$ ($|\bar{h}|$ = Länge von \bar{h}). (c) f gehöre zur Klasse $W_p^{(\varrho)} H^{(\alpha)}(G; M)$, wenn $f \in W_p^{(\varrho)}(G; K)$ und wenn eine beliebige partielle Ableitung von f der Ordnung ϱ zu $W_p^{(0)} H^{(\alpha)}(G, M)$ gehört. Nun werde G als Gebiet des R_n vorausgesetzt, dessen Rand eine $(\varrho + 2)$ -mal differenzierbare Hyperfläche S sei. In jedem Punkte $\bar{P} \in S$ sei \bar{n}_P die innere Normale von S . Es sei Δ_δ die Menge der Punkte \bar{Q} mit $\bar{Q} = \bar{P} + h\bar{n}_P$ und $|h| < \delta$. Ferner werde $\Delta_\delta' = G \cap \Delta_\delta$ und $\Delta_\delta'' = \Delta_\delta - G \cap \Delta_\delta$ gesetzt. Das Hauptergebnis der Arbeit ist der folgende Satz: Die Funktion f gehöre zur Klasse $W_p^{(\varrho)} H^{(\alpha)}(G, M)$. Dann gibt es eine Zahl $\delta > 0$, so daß sich f durch die Funktion \bar{f} auf das Gebiet $G \cup \Delta_\delta''$ in der folgenden Weise fortsetzen läßt: $\bar{f}(\bar{Q}) = f(\bar{Q})$ für $\bar{Q} \in G$ und

$$f(\bar{Q}) = \sum_{s=0}^{\varrho} \lambda_s f(\bar{P} - \kappa_s h \bar{n}_P) \quad \text{für} \quad \bar{Q} \in \Delta_\delta'',$$

wobei λ_s und κ_s Zahlen sind, welche den Bedingungen $0 < \kappa_0 < \kappa_1 < \dots < \kappa_\varrho \leq 1$ und $\sum_{s=0}^{\varrho} (-\kappa_s)^l \lambda_s = 1$, $l = 0, 1, \dots, \varrho$, genügen. Diese Funktion \bar{f} gehört zur Klasse $W_p^{(\varrho)} H^{(\alpha)}(G \cup \Delta_\delta'', \bar{M})$. Es gilt:

$$\|\partial \bar{f} / \partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}\|_{L_p(G \cup \Delta_\delta'')} + \bar{M} < c(\|f\|_{L_p(G)} + M),$$

für beliebige $l = \sum_{k=1}^n l_k \leq \varrho$. Die Konstante c ist unabhängig von $\|f\|_{L_p(G)} + M$;

aber sie hängt i. a. ab von G, p, ϱ und α . Spezialfälle dieses Satzes wurden bewiesen von Dzjadyk (dies. Zbl. 72, 58), $n = 1$, $n = 0$, Kirszbraun (dies. Zbl. 9, 39), $\varrho = 0$, $p = \infty$, Banach und Czipser-Geher (dies. Zbl. 64, 54). Verf. beweist seinen Satz zunächst für ein (n -dim.) Intervall Δ . Für diesen Fall zeigt er außerdem: $H_p^{(r)}(\Delta) = W_p^{(\bar{r})} H^{(\alpha)}(\Delta)$ ($r = \bar{r} + \alpha$, $0 < \alpha < 1$). Es werde noch auf zwei Folgerungen des Verf. hingewiesen: Es sei $W_p^{(\varrho)} H^{(\alpha)}(G)$ die Menge aller f , die für irgendein $M > 0$ zu $W_p^{(\varrho)} H^{(\alpha)}(G, M)$ gehört. Als Norm von f werde $\|f\|_{L_p(G)}^{(\varrho+\alpha)} = \|f\|_{L_p(G)} + M_f$, wo M_f die kleinste Konstante M ist, für die f in $W_p^{(\varrho)} H^{(\alpha)}(G, M)$ liegt, definiert. Das Gebiet G sei beschränkt und habe eine $(\varrho + 1)$ -fach differenzierbare Hyperfläche S zum Rande. Wenn die Funktion f zur Klasse $W_p^{(\varrho)} H^{(\alpha)}(G)$ gehört, so kann sie auf den gesamten Raum R_n durch eine Funktion \bar{f} fortgesetzt werden, die zu $W_p^{(\varrho)} H^{(\alpha)}(R_n)$ gehört und für die $\|f\|_{L_p(R_n)}^{(\varrho+\alpha)} < c \cdot \|f\|_{L_p(G)}^{(\varrho+\alpha)}$ gilt. Die Eigenschaften der Konstanten c ergeben sich aus dem zitierten Satz. Unter denselben Bedingungen für G gilt: Der „Funktionsraum“ $W_p^{(\varrho)} H^{(\alpha)}(G)$ ist vollständig. Vgl. hierzu das nachstehende Referat.

W. Thimm.

Nikol'skij, S. M.: Die Kompaktheit der Klassen $H_p^{(r_1, \dots, r_n)}$ von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **20**, 611—622 (1956) [Russisch].

Bezgl. der Bezeichnungen vgl. dies Zbl. **43**, 56, und vorst. Ref. Drei Fälle werden betrachtet (a) Funktionen von x_1, \dots, x_n , die in jeder Variablen mit 2π periodisch sind. Als Norm $\|f\|_{L_p(\Delta^*)}^{(r_1, \dots, r_n)}$ einer Funktion f der Klasse $H_p^{(r_1, \dots, r_n)}$ werde die Zahl $\|f\|_{L_p(\Delta^*)} + M_f$ definiert, wobei Δ^* das Periodenparallelogramm ist und M_f das Minimum aller Konstanten M bezeichnet, für die f zu $H_p^{(r_1, \dots, r_n)}(\Delta^*, M)$ gehört. (b) Es sei $f \in H_p^{(r_1, \dots, r_n)}(G)$ und $\|f\|_{L_p(G)}^{(r_1, \dots, r_n)} = \|f\|_{L_p(G)} + M_f$, wobei M_f das Minimum aller Konstanten M sei, für welche $f \in H_p^{(r_1, \dots, r_n)}(G, M)$. (c) Es sei $f \in W_p^{(q)} H^{(\alpha)}(G)$. Dann werde als Norm die Zahl $\|f\|_{L_p(G)}^{(q+\alpha)}$ wie im vorstehenden Ref. definiert. Der Kompaktheitssatz lautet jetzt: Es sei $\{f_m\}$ eine Folge von Funktionen, die einer der folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & f_m \in H_p^{(r_1, \dots, r_n)}, & \|f_m\|_{L_p(\Delta^*)}^{(r_1, \dots, r_n)} &\leq K, \\ \text{(b)} \quad & f_m \in H_p^{(r_1, \dots, r_n)}(G), & \|f_m\|_{L_p(G)}^{(r_1, \dots, r_n)} &\leq K, \\ \text{(c)} \quad & f_m \in W_p^{(q)} H^{(\alpha)}(G), & \|f_m\|_{L_p(G)}^{(q+\alpha)} &\leq K. \end{aligned}$$

(Im Fall (c) werde zusätzlich angenommen, daß der Rand von G eine $(q+1)$ -fach differenzierbare Hyperfläche sei.) Dann gibt es eine Teilfolge $\{f_{m_k}\}$ und eine Funktion f mit den entsprechenden Eigenschaften (a), (b), (c), so daß folgende Aussagen bestehen: Für beliebige r'_i und α' mit $0 < r'_i < r_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $0 < \alpha' < \alpha$, gilt im Fall (a): $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{m_k} - f\|_{L_p(\Delta^*)}^{(r'_1, \dots, r'_n)} = 0$, im Fall (b): $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{m_k} - f\|_{L_p(G)}^{(r'_1, \dots, r'_n)} = 0$ für jedes Gebiet G' , dessen abgeschlossene Hülle in G liegt (wenn G ein Intervall ist, kann $G' = G$ genommen werden), im Fall (c): $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{m_k} - f\|_{L_p(G)}^{(q+\alpha')} = 0$.

W. Thimm.

Nikol'skij, S. M.: Randeigenschaften von Funktionen, die in einem Gebiet mit Eckenpunkten definiert sind. I. Mat. Sbornik, n. Ser. **40(82)**, 303—318 (1956) [Russisch].

Es handelt sich um die Verallgemeinerung einiger Sätze über das Randverhalten von Funktionen und über die Erweiterung des Definitionsgebietes von solchen (vgl. dies Zbl. **52**, 287) auf den Fall, daß der Rand nicht mehr durchweg stetig differenzierbar ist. Das Gebiet G der (x, y) -Ebene enthalte die stückweise glatte, geschlossene Kurve Γ . Die in G definierte Funktion f definiert auf Γ eine Funktion $\varphi(s)$, die als periodisch mit der Bogenlänge von Γ vorausgesetzt werde. Bewiesen wird: (a) Wenn die Funktion f zur Klasse $H_p^{(r)}(G, M)$ gehört und $0 < r - p^{-1} < 1$ ist, so gehört φ zur Klasse $H_p^{(r-1/p)}(M)$ mit $M < c \|f\|_{L_p(G)}^{(r)}$ (vgl. vorst. Ref.). (b) Es sei $0 < r - p^{-1} < 1$, $r \neq 2p^{-1}$. Auf Γ sei die Funktion $\varphi(s)$ definiert. Es sei $\varphi(s) \in H_p^{(r-1/p)}(M)$ periodisch in der Bogenlänge von Γ . Dann existiert in G eine Funktion f der Klasse $H_p^{(r)}(G)$, die auf Γ mit $\varphi(s)$ übereinstimmt, und es gilt:

$$\|f\|_{L_p(G)}^{(r)} < c \|\varphi\|_{L_p(\Gamma)}^{(r-1/p)}, \quad \bar{M} \leq c M.$$

Auf diese Sätze können zwei andere zurückgeführt werden, bei denen an die Stelle von G das von Γ berandete Gebiet G_1 tritt und für die Funktion f Zugehörigkeit zur Klasse $W_p^{(q)} H^{(\alpha)}(G_1; M)$ verlangt (in (a)) bzw. gefolgt (in (b)) wird. Diese Ergebnisse gelten für höherdimensionale Räume.

W. Thimm.

Nikol'skij (Nikolsky), S. M.: The boundary properties of functions in regions with corners. Doklady Akad. Nauk. SSSR **111**, 26—28 (1956) [Russisch].

Fortführung der Untersuchungen der vorstehend referierten Arbeit des Verf. Es werden auch die Ableitungen der im Gebiet G definierten Funktionen und ihre Randeigenschaften behandelt. Zu beachten ist, daß in den Ecken der Randkurve für die als Ableitungen vorgesehenen Funktionen zusätzliche Bedingungen auftreten (vgl. dies. Zbl. **80**, 85).

W. Thimm.

Zaubek, Othmar: Über ein Stetigkeitskriterium für Funktionen mehrerer Veränderlichen und Verallgemeinerungen. *Math. Nachr.* 15, 265—292 (1956).

In questo lavoro l'A. si occupa delle possibili generalizzazioni di un noto criterio di continuità per le funzioni di più variabili secondo il quale una funzione reale $f(x_1, \dots, x_r)$ delle variabili reali x_1, \dots, x_r , definita in un insieme G , è continua in un punto P appartenente al derivato di G se essa vi è continua su ogni curva semplice contenente P . L'A. dimostra innanzi tutto che, se M è un arbitrario insieme di uno spazio euclideo bidimensionale e se P è un suo punto d'accumulazione, esiste almeno una curva C di classe uno (cioè dotata di tangente variabile con continuità) tale che P appartenga al derivato dell'intersezione $C \cap M$. Da questo teorema l'A. trae alcuni criteri relativi al comportamento in un punto di una funzione di più variabili reali quali ad esempio: condizione sufficiente perchè una funzione f , in un punto P del derivato del suo insieme di definizione A , sia continua, semi-continua superiormente o inferiormente, ammetta massimo oppure minimo proprio o improprio, è che goda della corrispondente proprietà su ognuno degli insiemi chiusi di classe uno (cioè contenuti in curve di classe uno) che siano convergenti verso P e contenuti in A ; condizione sufficiente perchè f sia costante in un campo connesso A è che su ogni insieme chiuso di classe uno contenuto in A e convergente la f sia costante nel corrispondente punto P d'accumulazione cioè sia costante nell'intersezione di A con un opportuno intorno di P . Tutti questi teoremi non sono più veri se si sostituiscono, nei loro enunciati, gli insiemi di classe uno con insiemi di classe due. Infatti l'A. fa vedere che esistono un insieme G ed un punto P d'accumulazione per G tali che nessuna curva C di classe due ammetta P come punto d'accumulazione per l'intersezione $C \cap G$. Altri criteri del tipo detto vengono dati dall'A. introducendo il concetto di curva piana „erweitert stetig differenzierbar“ cioè di insieme bidimensionale il quale sia trasformato in una curva di classe uno da un'opportuna inversione per raggi vettori reciproci. Si ha allora che condizione sufficiente perchè f sia limitata superiormente (inferiormente) in un campo A , è che essa sia tale in ogni insieme numerabile „erweitert stetig differenzierbar“ contenuto in A . Inoltre, condizione sufficiente perchè la successione $\{f_n\}$ converga uniformemente in A è che la successione sia tale in ogni insieme del tipo suddetto. La seconda parte del lavoro è dedicata ad ulteriori generalizzazioni di questi risultati.

L. de Vito.

Kjellberg, Bo: A note on an inequality. *Ark. Mat.* 3, 293—294 (1956).

In a previous publication (cf. this *Zbl.* 30, 146), the author has given conditions for the exponents in order that an inequality

$$\int_0^\infty x^\alpha |f(x)|^\beta dx \leq K \left(\int_0^\infty x^{\alpha_1} |f|^{\beta_1} dx \right)^{\kappa_1} \left(\int_0^\infty x^{\alpha_2} |f|^{\beta_2} dx \right)^{\kappa_2},$$

should hold true. By suitable transformations $x \rightarrow x^p$, $|f| \rightarrow x^q |f|^r$ this inequality is brought to the form

$$\int_0^\infty \varphi(x) dx \leq K(\alpha, \beta_1, \beta_2) \left(\int_0^\infty x^\alpha \varphi^{\beta_1}(x) dx \right)^{\kappa_1} \left(\int_0^\infty x^\alpha \varphi^{\beta_2}(x) dx \right)^{\kappa_2}$$

(with $\varphi(x) = |f(x)|$), and the exact value of the constant is determined for each $\alpha > 0$, $\beta_1 \neq \beta_2$.

B. Sz.-Nagy.

Bellman, Richard: A generalization of some integral identities due to Ingham and Siegel. *Duke math. J.* 23, 571—577 (1956).

Verf. gibt als eine Verallgemeinerung einer Identität von Ingham die folgende Formel an:

$$(2\pi i)^{-p(p+1)/2} \int \dots \int \exp(\operatorname{tr}(CS)) |S_p|^{-k_p} \dots |S_1|^{-k_1} \prod_{i \leq j} ds_{ij} \\ = \frac{(2\sqrt{\pi})^{-p(p-1)/2} |C^{(1)}|^{\Sigma k_i - (p+1)/2} |C^{(2)}|^{-k_1} \dots |C^{(p)}|^{-k_p - 1}}{\Gamma(k_p) \Gamma(k_p + k_{p-1} - \frac{1}{2}) \dots \Gamma(\Sigma k_i - (p-1)/2)};$$

$C = (c_{ij})$, $S = (s_{ij})$ sind symmetrische p -reihige quadratische Matrizen, s_{ij} komplex, c_{ij} reell; C ist positiv definit (anderenfalls steht auf der rechten Seite Null), $S_k = (s_{ij})$, $1 \leq i, j \leq k$, $C^{(k)} = (c_{ij})$, $k \leq i, j \leq p$ (In der Arbeit ist $\Gamma(\sum k_i - (p-1)/2)$ in $\Gamma(\sum k_i - (p+1)/2)$ verdruckt); die k_i sind reell, k_p ist hinreichend groß zu wählen. Das Integrationsgebiet ist $\text{Re}(S) = \text{const}$ unter der Voraussetzung, daß $\text{Re}(S)$ positiv definit ist. Verf. gibt eine Beweisskizze ohne Konvergenzbetrachtungen nach der Beweismethode von Ingham. Die angegebene Einschränkung der k_i [k_1, \dots, k_{p-1} (Druckfehler? k_p ?) sind so zu wählen, daß die Ausdrücke $k_p, \dots, \sum k_i - (p-1)/2$ positiv sind] ist ohne weitergehende Voraussetzung über k_p offensichtlich nicht ausreichend, um in jedem Falle die Konvergenz des Integrals zu sichern. Als Anwendung wird eine Verallgemeinerung einer Siegelschen Identität und eine spezielle Differentiationsformel für gewisse Determinantenprodukte angegeben.

K.-B. Gundlach.

Allgemeine Reihenlehre:

Silverman, Louis: Some ideas from the theory of summability. Bull. Soc. math. Grèce 30, 94—99 (1956).

Wiedergabe eines im Oktober 1955 in Athen gehaltenen Vortrags. Einführendes über M (Verfahren der arithmetischen Mittel), H_k , C_k und Limitierung mit Hilfe von Dreiecksmatrizen. Bericht über die den Potenzreihen $\sum \alpha_k z^k$ zugeordneten Verfahren $\alpha_0 I + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k M^k$, wo I die Identität bedeutet [vgl. Hurwitz and Silverman, Trans. Amer. math. Soc. 18, 1—20 (1917)].

W. Meyer-König.

Ramanujan, M. S.: Theorems on the product of quasi-Hausdorff and Abel transforms. Math. Z. 65, 442—447 (1956).

Es handelt sich um die von O. Szász (dies. Zbl. 46, 290; 49, 44) aufgeworfene und behandelte Frage nach der Inklusion $A(B) \supset A$, wo A und B zwei permanente Summierungsverfahren sind. Vgl. auch C. T. Rajagopal (dies. Zbl. 57, 294), T. Pati [Proc. nat. Inst. Sci. India 20, 348—351 (1954)]. Verf. behandelt den Fall, daß A das Abel-Verfahren, B ein quasi-Hausdorff-Verfahren H_1^* in der Reihe-Reihe-Form (vgl. Verf., dies. Zbl. 51, 46) oder ein quasi-Hausdorff-Verfahren H_2^* in der Folge-Folge-Form [vgl. G. H. Hardy, Divergent series (dies. Zbl. 32, 58) insbes. S. 277] ist. Satz 1: Ist die Reihe (1) $\sum_0^{\infty} a_n$ mit beschränkten Teilsummen Abel-

summierbar zum Wert l , so ist die Transformation $\sum_0^{\infty} b_n$ von (1) durch eine permanente quasi-Hausdorff-Matrix H_1^* , bei der in jeder Zeile eine Nullfolge steht, ebenfalls Abel-summierbar zum Wert l . Satz 2: Ist die beschränkte Folge (2) $\{s_n\}$ Abel-limitierbar zum Wert l , so ist die Transformation $\{t_n\}$ von (2) durch ein permanentes quasi-Hausdorff-Verfahren $H_2^* = (H_2^*, \mu)$ mit Momentkonstanten μ_n ebenfalls Abel-limitierbar zum Wert l .

W. Meyer-König.

Rajagopal, C. T.: A note on the oscillation of Riesz, Euler, and Ingham means. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 7, 64—75 (1956).

Sei $\sigma_r(x) = x^{-r} A_r(x) = r x^{-r} \int_0^x (x-u)^{r-1} A(u) du$ ($x > 0$, $r > 0$), wo $\sigma_0(x) = A_0(x) = A(x)$ reell ist, ferner $\bar{\sigma}_r = \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_r(x)$ (bei $x \rightarrow \infty$), $\bar{\sigma}_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_r$. Man kennt dann den Satz t_σ : Ist $\bar{\sigma}_\infty = \bar{\sigma}_\infty = s$ (s endlich), so ist $\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_r = s$ für hinreichend großes r . Literatur: Verf., dies. Zbl. 34, 42; 55, 292; W. B. Pennington, dies. Zbl. 46, 65; vgl. auch das Referat zur zweitgenannten Arbeit des Verf. von L. S. Bosanquet in Math. Rev. 15, 522. Verf. gibt einen neuen Beweis von Satz t_σ , der in mancher Hinsicht dem Penningtonschen Beweis ähnelt, aber anstatt des Ingham-schen Gedankens eine Karamatasche Methode benützt. Noch ein anderer Beweis-

weg wird angegeben, der Ergebnisse aus den obengenannten Arbeiten des Verf. und aus der Arbeit C. T. Rajagopal and Amnon Jakimovski, Proc. Amer. math. Soc. 5, 370—384 (1954), heranzieht. Dazu parallel wird das Euler-Knopp'sche Verfahren E_q ($q \geq 0$) behandelt. Sei $\{s_n\}$ eine reelle Folge, $E_q(n) = (q+1)^{-n} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} q^{n-m} s_m$,

$\bar{E}_q = \lim E_q(n)$ (bei $n \rightarrow \infty$), $\bar{E}_\infty = \lim_{q \rightarrow \infty} \bar{E}_q$. Dann gilt Satz t_E (auch bei W. Meyer-König und K. Zeller, dies. Zbl. 53, 35): Ist $\bar{E}_\infty = \bar{E}_\infty = s$ (s endlich), so ist $\bar{E}_q = \bar{E}_q = s$ für hinreichend großes q . Schließlich wird noch gezeigt, wie sich der zum Satz t_σ analoge Satz für Ingham-Mittel (vgl. W. B. Pennington, dies. Zbl. 64, 58) gewinnen läßt. W. Meyer-König.

Matsumoto, Kishi: Lebesgue's constant of (R, λ, k) summation. Proc. Japan Acad. 32, 658—661 (1956).

The name Lebesgue constants was originally given to the numbers L_n defined as

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})t|}{|2 \sin \frac{1}{2}t|} dt$$

and it is a classical result that $L_n = 4\pi^{-2} \log n + O(1) \sim 4\pi^{-2} \log n$. It is evident that Lebesgue constants can be defined for any method of summation by integrating the absolute value of the corresponding kernel. In the present note the author determines the asymptotic behaviour of the Lebesgue constants $L_R(\omega)$ corresponding to the Riesz method of summation (R, λ, k) , where $\lambda(\omega) = \exp \mu(\omega)$ satisfies the following conditions: (i) $\mu(\omega)$ is differentiable and increases monotonically to ∞ as $\omega \rightarrow \infty$ in $(0, \infty)$ (ii) $\mu'(\omega)$ is monotone decreasing for $\omega > A$, and $\mu'(\omega) \rightarrow 0$, $\omega \mu'(\omega) \rightarrow \infty$, as $\omega \rightarrow \infty$. (iii) $\lambda'(\omega)$ increases monotonically for $\omega > A$. He shows that $L_R(\omega) \sim 4\pi^{-2} \log \{\mu'(\omega) \omega\}$. U. N. Singh.

Papademetrios, I. G.: Séries sommables. Bull. Soc. math. Grèce 30, 54—63, französ. Zusammenfassg. 63 (1956) [Griechisch].

The author takes a sequence u_n and forms the following sequences from it: $u_n^{(1)} = u_n + u_{n+1}$, $u_n^{(2)} = u_n^{(1)} + u_{n+1}^{(1)}$, ..., $u_n^{(\lambda)} = u_n^{(\lambda-1)} + u_{n+1}^{(\lambda-1)}$. With the supposition $u_n^{(2)} = c$ (with c a non zero constant) he finds the formulae giving the n^{th} term of u_n and the sum of its first n termes. Ger. G. Legatos.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Ghizzetti, Aldo: Sulla convergenza dei procedimenti di calcolo, degli integrali definiti, forniti dalle formule di quadratura. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 26, 201—222 (1956).

Die vorliegende Arbeit bildet die Fortsetzung einer früheren (dies. Zbl. 77, 279), in welcher sogenannte elementare Integrationsformeln, d. h. solche in denen das Integral (vom Typus $\int_a^b f(x) g(x) dx$ bei vorgegebener Gewichtsfunktion g) sich als Summe eines angenäherten Ausdruckes und eines Restes darstellen läßt, abgeleitet werden; der erstere hängt nur von den Werten der Funktion und gewisser Ableitungen in einer endlichen Anzahl von Punkten, der letztere von einem Differentialausdruck ab. Von diesen Formeln ausgehend, leitet der Verf. allgemeine Integrationsformeln ab, indem er das Integrationsintervall in Teilintervalle zerlegt und auf jene die elementaren Formeln anwendet. Es stellt sich heraus, daß während für den Fall der Gewichtsfunktion Eins die Verallgemeinerung auf der Hand liegt, der allgemeine Fall einen gewissen Rechenaufwand und zusätzliche Annahmen beansprucht. Es wird weiterhin die Konvergenz der Ausdrücke bei Abnahme der Maximallänge der Teilintervalle untersucht. Es wird für den Fall

der Gewichtsfunktion Eins gezeigt, daß im allgemeinen die Restformel gegen Null konvergiert. In den Ausnahmefällen läßt sich die Formel so abändern, daß diese Konvergenz bestehen bleibt bis auf eine einzige Ausnahme, wo der Rest gegen das Integral und der Annäherungsausdruck gegen Null konvergieren. Schließlich werden im Fall, daß die Gewichtsfunktion von Eins verschieden ist, für die Konvergenz hinreichende Bedingungen angegeben. Der letztere Fall wird an einem Beispiel illustriert.

W. Gross.

Mergeljan (Mergelyan), S. N.: On Bernstein's approximation problem. Doklady Akad. Nauk SSSR 109, 25—28 (1956) [Russisch].

Problème étudié: $h(x)$ étant définie et mesurable sur $-\infty < x < +\infty$, vérifiant $0 < h(x) < 1$, on prend pour norme de $f(x)$ l'expression $\sup_x h(x) |f(x)|$; à quelles conditions le système des polynômes est-il complet dans la classe des fonctions vérifiant $h(x) f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm \infty$? L'A., qui a déjà abordé ce problème (ce Zbl. 56, 61) donne ici une condition nécessaire et suffisante simple portant sur une régularisée de $h(x)$.

G. Bourion.

Paszkowski, S.: On the accuracy of approximation with nodes. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 4, 745—748 (1956).

Let C be the class of continuous functions in the closed interval $I = (a, b)$ with the norm $\|\xi\| = \max_{t \in I} |\xi(t)|$, w_n the class of all algebraic polynomials of at most n -th degree, and $W_n(\xi; T)$ the class of $\omega(t) \in w_n$ with $\omega(t_k) = \xi(t_k)$ [$k = 1, 2, \dots, m < n$; $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq b$; $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$]. Let $\varepsilon_n(\xi) = \inf_{\psi \in w_n} \|\xi - \psi\|$ resp. $\varepsilon_n(\xi; T) = \inf_{\omega \in W_n(\xi; T)} \|\xi - \omega\|$ ($\xi \in C$) express the error of the best approximation of the continuous function ξ by polynomials ψ of class w_n resp. ω of class $W_n(\xi; T)$. The author shows that if $m \geq 3$, $n \geq 14[p/c] + 12$, where $p = \min \{(6(b-a), (m-1)\pi^{-1}(2d - (m-1)c)\}$, $c = \frac{1}{2} \min_{1 \leq k \leq m-1} (t_{k+1} - t_k)$, $d = \max_{1 \leq k \leq m} \max \{t_k - a, b - t_k\}$, and $[p/c]$ denotes the integral part of p/c , then $\varepsilon_n(\xi; T) < 2\varepsilon_n(\xi)$ for every function $\xi \in C$.

T. Erweida.

Butzer, Paul L.: On the singular integral of de la Vallée-Poussin. Arch. der Math. 7, 295—309 (1956).

Für stetige Funktionen $f(x)$ mit der Periode 2π wird das singuläre Integral

$$V_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x, t) f(t) dt$$

mit dem Kern

$$K_n(x, t) = h_n \cos^{2n} \frac{t-x}{2}, \quad \frac{1}{h_n} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} t dt$$

untersucht. Die Folge der trigonometrischen Ausdrücke $V_n(x)$ strebt auf jedem Segment gleichmäßig gegen $f(x)$. — Es wird zunächst das Verhalten der $V_n(x)$ für den Fall betrachtet, daß $f(x)$ einen verallgemeinerten Stetigkeitsmodul besitzt oder einer Lipschitz- oder einer Zygmund-Bedingung genügt. Besitzt $f(x)$ beispielsweise einen verallgemeinerten Stetigkeitsmodul $\omega^*(\delta)$, dann gilt $|V_n(x) - f(x)| \leq \frac{3}{2} \omega^*(1/\sqrt{n})$. Unter Umständen liefert $\mathfrak{B}_n(x) = 2 \cdot V_{2n}(x) - V_n(x)$ eine bessere Annäherung als $V_n(x)$. So gilt beispielsweise in jedem Punkt, in welchem $f''(x)$ existiert, $|\mathfrak{B}_n(x) - f(x)| = o\left(\frac{1}{n}\right)$. — Weiter wird das Verhalten der $V_n(x)$ für solche $f(x)$ untersucht, die L -integrierbar sind. Ist $f(x)$ L_1 -integrierbar, dann gilt fast überall $V_n(x) \rightarrow f(x)$. Ist $f(x)$ L_p -integrierbar mit $p > 1$, dann gilt fast überall $V_n(x) \rightarrow f(x)$, und es gibt ein $\Theta(x, f) \in L_p$, so daß $\sup_n |V_n(x)| \leq C \Theta(x, f)$, wo C eine von n und f unabhängige

Konstante bedeutet. Ist $f(x) \in L_p$ mit $p > 1$, dann ist starke Konvergenz vorhanden, d. h. $\int_{-\pi}^{\pi} |V_n(x) - f(x)|^p dx \rightarrow 0$, wenn $n \rightarrow \infty$. — Es folgen Untersuchungen über Approximation im Mittel. Wird unter $\|f\|_p$ die p -te Wurzel aus dem L -Integral $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx$ verstanden, so gilt, wenn $f(x)$ einen verallgemeinerten Integralstetigkeitsmodul $\omega_p^*(\delta)$ mit $p \geq 1$ besitzt $\|V_n - f\|_p = O(\omega_p^*(1/\sqrt{n}))$. — Hieran schließen sich Betrachtungen über die Frage, wie aus den Eigenschaften der $V_n(x)$ auf solche von $f(x)$ geschlossen werden kann. Ein Ergebnis: $f^{(k)}(x)$ existiert und genügt einer L -Bedingung von der Ordnung 1 genau dann, wenn $|V_n^{(k+1)}(x)| = O(1)$ gleichmäßig in n und x gilt. Ist $f(x) \in L_1$, dann ist $f(x)$ genau dann fast überall von beschränkter Schwankung, wenn $\|V_n'(x)\|_1 = O(1)$. — Die Abhandlung schließt mit einem Satz, der von dem Umkehrproblem der Approximationstheorie handelt. Er lautet: Ist $f(x)$ stetig mit der Periode 2π und $\lim_{\pi \leq x \leq \pi} [\sup_{-\pi \leq x \leq \pi} |V_n(x) - f(x)|] = 0$, dann ist $f(x)$ eine Konstante.

W. Quade.

Hsiang, Fu Cheng: On absolute convergence of Fourier series. Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 917—920 (1956).

Let $\varphi(t) \in L(0, 2\pi)$ be an even and 2π -periodic function and let a_n be its n -th Fourier coefficient; suppose that $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u) du$. The author proves the following theorem: If the series $\sum a_n$ is absolutely convergent then $\lim_{t \rightarrow +0} \Phi(t)/t$ exists and is equal to the sum of the series $\sum a_n$.

U. N. Singh.

Kumari, Sulaxana: On the order of the Cesàro means of a series conjugate to Fourier series. Bull. Calcutta math. Soc. 48, 139—151 (1956).

Let (1) $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nt - a_n \sin nt)$ be the conjugate-Fourier series of the 2π -periodic function $f(t) \in L(0, 2\pi)$. Let $\theta(t) = \frac{1}{2} \{f(x+t) - f(x-t)\} - l$ and for $\alpha \geq 0$ let $\theta_\alpha(t) = \Gamma(\alpha+1) t^{-\alpha} \Theta_\alpha(t)$, where $\Theta_0(t) = \theta(t)$ and

$$\Theta_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \theta(u) du, \alpha > 0.$$

Denoting by $\bar{S}_\alpha(\omega)$ the (C, α) mean of the series (1) at $t = x$, the authoress has proved the following general theorem: The condition

$$\int_t^\pi \frac{|\theta_\alpha(u)|}{u} du = o\left\{\left(\log \frac{1}{t}\right)^{p+1}\right\}, \quad (\alpha \geq 0, -1 < p < \infty),$$

as $t \rightarrow 0$, implies that $\bar{S}_\alpha(\omega) \cong 2l\pi^{-1} \log \omega$ for $(-1 < p \leq 0)$ and $\bar{S}_\alpha(\omega) = o\{(\log \omega)^{p+1}\}$, $p > 0$. The well known result due to Lukacs that $\bar{S}_n \cong 2l\pi^{-1} \log n$ (See Zygmund: Trigonometrical series p. 28 this Zbl. 11, 17), where \bar{S}_n is the partial sum of n -th order of the series (1) at $t = x$, is contained in this theorem as a particular case. The authoress has further shown, by constructing an example, that this result is the 'best possible' of the kind. She has also obtained an analogous result for the Cesàro means of the r -th derived series and with the help of her main theorem and certain other known results she has obtained a number of sufficient conditions under which the conjugate and its derived series are summable (R, λ, k) .

U. N. Singh.

Jurkat, Wolfgang und Alexander Peyerimhoff: Lokalisation bei absoluter Cesàro-Summierbarkeit von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen. II. Math. Z. 64, 151—158 (1956).

Unmittelbare Fortsetzung der früheren gleichbetitelten Arbeit I (dies. Zbl. 57, 301; wegen der Bezeichnungen $\bar{\Delta}^p$ und a siehe Verff., dies. Zbl. 52, 62). Jetzt handelt es sich um die Lokalisationsverhältnisse bei absoluter Summierbarkeit von Fourier-Reihen. Aus dem früheren Satz 2 wird hergeleitet Satz 4: Zwei Fourier-Reihen $f(\varphi) \sim \sum_0^\infty \Re a_n e^{in\varphi}$ und $g(\varphi) \sim \sum_0^\infty \Re b_n e^{in\varphi}$ sind genau dann für $|\varphi| < \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi$, $|C_\alpha|$ -äquissummierbar ($\alpha > -1$), wenn für eine ganze Zahl $p \geq 0$ gilt $\bar{\Delta}^p [(a_n - b_n)(n+1)^{-\alpha}] = a(1)$ [oder auch: $\bar{\Delta}^p (a_n - b_n) = a(n^\alpha)$] und wenn es eine periodische Funktion $h(\varphi)$ gibt, die für fast alle $|\varphi| < \varepsilon$ mit $f(\varphi) - g(\varphi)$ übereinstimmt und deren Fourier-Reihe $|C_\alpha|$ -summierbar ist für $|\varphi| < \varepsilon$. Analog für die konjugierten Reihen. Danach ist das Summierungsverhalten von Fourier-Reihen abhängig von lokalen Eigenschaften der erzeugenden Funktion für alle Fourier-Reihen, deren Koeffizienten eine vom Index des Verfahrens abhängige Bedingung erfüllen. Es ist daher natürlich, Klassen von erzeugenden (stets: integrierbaren und mit 2π periodischen) Funktionen zu betrachten, für welche die Koeffizientenbedingung wegfällt, d. h. für alle Funktionen der Klasse erfüllt ist. Definition: Sei K eine Funktionenklasse; $|C_\alpha|$ -Lokalisation für die Fourier-Reihen aus K an der Stelle φ_0 bedeutet: Für $f, g \in K$ und $0 < \varepsilon < \pi$ hat $f(\varphi) = g(\varphi)$ in $|\varphi - \varphi_0| < \varepsilon$ die $|C_\alpha|$ -Äquissummierbarkeit ($\alpha > -1$) der Fourier-Reihen von f und g an der Stelle φ_0 zur Folge. Für alle einer sehr allgemeinen Bedingung genügenden Klassen K gilt dann Satz 5: Für die Fourier-Reihen $\sum \Re a_n e^{in\varphi}$ der Klasse K besteht genau dann $|C_\alpha|$ -Lokalisation ($\alpha > -1$) für $\varphi = 0$, wenn für alle Reihen aus K gilt $\Re a_n = a(n^\alpha)$; und $|C_\alpha|$ -Lokalisation an allen Stellen besteht genau dann, wenn für alle Reihen aus K gilt $\sum |a_n| n^{-\alpha} < \infty$. Analog bei konjugierten Reihen. Auf Grund von Satz 5 wird das Lokalisationsverhalten bei einer Reihe bekannter Klassen $[L; L_p (p > 1);$ Raum B der beschränkten, Raum C der stetigen Funktionen; ferner die aus diesen Räumen durch Integration hervorgehenden Räume] bestimmt. Beispiel: Die Klasse L besitzt $|C_\alpha|$ -Lokalisation (d. h. $|C_\alpha|$ -Lokalisation überall) für $\alpha > 1$ und nicht für $\alpha \leq 1$. Wegen dieser Resultate im einzelnen, die die vielen bisher bekannten Einzelergebnisse umfassen, wegen der darauf bezüglichen zahlreichen Literaturhinweise, und wegen weiterer Zusätze sei auf die Arbeit selbst verwiesen. *W. Meyer-König.*

Jurkat, Wolfgang: Gliedweise Integration und Einzigkeitssätze bei trigonometrischen Reihen. Math. Ann. 131, 141—150 (1956).

Sei (1) $\sum_0^\infty \Re a_n e^{inx}$ (a_n komplex, $a_0 = 0$, x reell) eine trigonometrische Reihe. Die Abel-Summe von (1) ist definiert durch $\sum_A \Re a_n e^{inx} = \lim_{r \rightarrow 1} \sum \Re a_n e^{inx} r^n$ (Konvergenz der Reihe rechts für $0 \leq r < 1$ vorausgesetzt). (1) heißt gliedweise integrierbar in dem offenen Intervall I , wenn $\sum_A \Re a_n e^{inx} = f(x)$ fast überall in I vorhanden und in j. a. T. (= jedem abgeschlossenen Teil) von I integrierbar ist, und wenn ferner für $q = 1, 2, \dots$ überall in I die gliedweisen Integrale $\sum_A \Re a_n e^{inx} / (i n)^q = F_q(x)$ vorhanden sind und zu $f(x)$ in der Relation

$$F_q(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{q-1}}{(q-1)!} f(t) dt + P_{q-1}(x)$$

stehen, wo $x_0 \in I$ und die P_{q-1} Polynome mit Grad $\leq q-1$ sind. Verf. stellt sich das (lokale) Integrationsproblem, d. h. die Frage nach genauen Bedingungen, unter welchen (1) in I gliedweise integrierbar ist. Den Schlüssel zur Behandlung des Problems liefert — unter Benützung der vom (globalen) Einzigkeitsproblem her

bekannten Methoden [vgl. A. Zygmund, *Trigonometrical series* (dies. Zbl. 11, 17), insbes. Kap. XI] — der Begriff der lokalen Fourier-Reihe. Die Reihen (1) und $\sum \Re b_n e^{in\pi x}$ heißen gleichmäßig äqui-Abel-summierbar in dem abgeschlossenen Intervall I , wenn $\sum \Re (a_n - b_n) e^{in\pi x}$ in I gleichmäßig Abel-summierbar zur Summe 0 ist. (1) heißt lokale Fourier-Reihe einer (reellen) Funktion $f(x)$ in dem offenen Intervall I , wenn (1) in j. a. T. von I mit einer gewöhnlichen Fourier-Reihe gleichmäßig äqui-Abel-summierbar ist und wenn fast überall in I die Abel-Summe von (1) gleich $f(x)$ ist. Der Begriff der lokalen Fourier-Reihe erweist sich als eine Verallgemeinerung des von W. H. Young eingeführten Begriffs der „restricted Fourier series“ (vgl. E. W. Hobson, *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*, II, Cambridge 1926, insbes. S. 686—692). Als ein wichtiges Hilfsmittel für die Behandlung lokaler Fourier-Reihen wird ein Lokalisationssatz für Abel-summierbare Reihen (1) aufgestellt. Die Reihe (1) erweist sich in dem offenen Intervall I als gliedweise integrierbar, wenn sie dort eine lokale Fourier-Reihe ist; auch umgekehrt, wenn z. B. $a_n = o(n^\alpha)$ für irgendein $\alpha \geq 0$. Somit führt das Integrationsproblem auf das (lokale) Einzigkeitsproblem, nämlich die Frage nach genauen Bedingungen, unter denen (1) eine lokale Fourier-Reihe ist. Einen wesentlichen Teil der Ergebnisse des Verf. bilden verschiedene Gruppen solcher Bedingungen, wegen deren Wortlaut auf die Arbeit selbst verwiesen werden muß. Als Beispiele für die Anwendungen auf das Integrationsproblem seien noch die folgenden beiden Resultate genannt, bei denen $a_n = o(n^\alpha)$ für ein $\alpha \geq 0$ vorausgesetzt ist. Eine Reihe (1), die in dem offenen Intervall I Abel-summierbar ist zu einer in j. a. T. von I integrierbaren Funktion, ist genau dann gliedweise integrierbar in I , wenn (*) alle Abel-Summen $F_{2p}(x)$ ($p = 1, 2, \dots$) stetig in I sind. (*) läßt sich ersetzen durch die Bedingung, daß alle Abel-Summen $F_q(x)$ ($q = 1, 2, \dots$) in I vorhanden und in jedem j. a. T. von I integrierbar sind.

W. Meyer-König.

Kahane, Jean-Pierre et Raphaël Salem: Sur les ensembles linéaires ne portant pas de pseudomesures. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 1185—1187 (1956).

Une distribution (de Schwartz) sur le segment $(0, 2\pi)$ est appelée pseudomessure si ses coefficients de Fourier sont bornés (comme c'est le cas pour une mesure). Une pseudomessure qui n'est pas une mesure est dite vraie pseudomessure. S'inspirant d'une inégalité de Bohr, les AA. construisent un ensemble parfait qui ne contient le support d'aucune vraie pseudomessure. La synthèse spectrale est évidemment possible pour tout ensemble fermé ne portant pas de vraie pseudomessure. Un tel ensemble est ensemble d'unicité pour les séries trigonométriques. Pour d'autres propriétés, vérifiées plus généralement par les ensembles de Helson, voir l'analyse suivante.

J. Deny.

Kahane, Jean-Pierre et Raphaël Salem: Sur les ensembles de Carleson et de Helson. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 1706—1708 (1956).

Un ensemble fermé E du segment $(0, 2\pi)$ est dit ensemble de Carleson (resp. de Helson) si toute fonction continue sur E est la restriction à E de la somme d'une série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\pi x}$ (resp. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$) absolument convergente. Tout ensemble fermé ne portant pas de vraie pseudomessure (v. l'analyse précédente) est un ensemble de Helson, mais on ne sait pas si la réciproque est vraie; on ne sait pas non plus si tout ensemble de Helson est un ensemble de Carleson. Les AA. établissent une condition nécessaire pour qu'un ensemble fermé soit un ensemble de Helson, d'où il résulte qu'un ensemble parfait symétrique P n'est jamais un ensemble de Helson; ils construisent effectivement une fonction continue sur P qui n'est pas la restriction à P d'une série trigonométrique absolument convergente. Ils démontrent également que, si E est un ensemble de Helson, toute progression arithmétique de N termes

contient au plus $[A \log N]$ points de E , A étant une constante ne dépendant que de E ; cette limitation est, en un certain sens, la meilleure possible. *J. Deny.*

Kahane, Jean-Pierre et Raphaël Salem: Construction de pseudomesures sur les ensembles parfaits symétriques. *C. r. Acad. Sci., Paris* **243**, 1986—1988 (1956).

Un ensemble linéaire parfait symétrique P n'étant pas un ensemble de Helson, il porte nécessairement des vraies pseudomesures (voir les deux analyses précédentes). Les AA. donnent deux méthodes permettant de construire des vraies pseudomesures sur P . *J. Deny.*

Džrbašjan, M. M.: Zur Theorie der Fourierreihen nach rationalen Funktionen. *Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. estestv. techn. Nauk* **9**, Nr. 7, 1—28 (1956) [Russisch].

L'A. (qui cite à ce sujet J. L. Walsh, Interpolation and approximation by rational functions, ce Zbl. **13**, 59) considère le système des fonctions $1/(1 - \bar{\alpha}_k z)$ et $1/(1 - \bar{\beta}_h z)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$; $h = 1, 2, \dots$; $|\alpha_k| < 1$, $|\beta_h| > 1$); il écrit explicitement d'abord les fractions rationnelles $\Phi_n(z)$, $-\infty < n < +\infty$, obtenues en orthonormalisant sur $|z| = 1$, puis les noyaux $\sum_{-m}^n \Phi_k(\bar{\zeta}) \Phi_k(z)$. Il suppose dans la suite que $\beta_h = 1/\bar{\alpha}_{h-1}$ et que les α_k n'ont pas de point-limite sur $|z| = 1$: le système $\{\Phi_n(e^{ix})\}$ est alors complet sur $-\pi < x < \pi$. L'A. étudie la convergence (ordinaire) de la série de Fourier $\sum a_n \Phi_n(e^{ix})$ associée à une fonction donnée; il obtient des résultats très analogues à la théorie des séries de Fourier ordinaires; en particulier les critères de Jordan-Dirichlet et de Dini-Lipschitz s'étendent. *G. Bourion.*

Trjitzinsky, W. J.: Aspects topologiques de la théorie des fonctions réelles et quelques conséquences dynamiques. *Ann. Mat. pura appl., IV. Ser.* **42**, 51—117 (1956).

Der Verf. überträgt eine Reihe von Sätzen über Konvergenzeigenschaften reeller Funktionen im euklidischen Raum, wie sie sich in der Darstellung von Denjoy [Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique I—IV (dies. Zbl. **36**, 319; **41**, 386)] finden, auf den Fall reeller Funktionen in einem metrischen vollständigen separablen Raum. Die infolge des Fehlens der lokalen Kompaktheit notwendigen Modifikationen werden erörtert. Sodann werden Sätze des Verf. über Konvergenzeigenschaften von Teilmengen des Raumes, die von einem Parameter abhängen, insbesondere Transformationsgruppen (dies. Zbl. **71**, 111), einer analogen Verallgemeinerung unterworfen. *K. Krickeberg.*

Ismajlov, A. Ja.: Über die Abschätzung der Ableitungen von Polynomen in mehreren Veränderlichen. *Akad. Nauk Azerbajdž. SSR, Doklady* **12**, 239—242 (1956) [Russisch].

Note préliminaire sur l'extension aux polynômes trigonométriques à plusieurs variables de l'inégalité de Markoff, sous la forme donnée par N. K. Bari (ce Zbl. **55**, 61) pour les polynômes à une variable avec la métrique de L_p . *G. Bourion.*

Bononcini, Vittorio E.: Alcuni problemi di massimo per le serie multiple di Fourier. *Rivista Mat. Univ. Parma* **7**, 255—269 (1956).

In the present paper $f(x, y)$ denotes any real or complex valued function of the real variables x, y , periodic of period 2π with respect to x and y , measurable in the basic square Q and satisfying (*) $|f(x, y)| \leq 1$ in Q . The Fourier series of f is denoted by $\sum c_{rs} \exp i(r x + s y)$, where \sum ranges over all integers r, s , $-\infty < r, s < +\infty$. If M_{rs} , $r = 0, 1, \dots, m$, $s = 0, 1, \dots, n$, are $(m+1)(n+1)$ given arbitrary complex numbers, the author considers expressions of the form $S_{mnhk} = \sum' M_{rs} c_{r+h, s+k}$, where \sum' ranges over all r, s with $0 \leq r \leq m$, $0 \leq s \leq n$. The question is discussed to determine the maxima of $|S_{mnhk}|$, or $|\Re(S_{mnhk})|$, or $|\Im(S_{mnhk})|$ for all functions f considered above under condition (*), and the relative extremal functions f . Various types of constants M are taken into consideration and applications are given

to the theory of conjugate series. The present results, which hold for multiple Fourier series as well, extend those of O. Szász (this Zbl. 20, 111) for simple Fourier series.

L. Cesari.

Shapiro, Victor L.: The uniqueness of double trigonometric series under circular convergence. Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 885—887 (1956).

Let $M = (m, n)$, $X = (x, y)$, $MX = mx + ny$, and $|X| = (x^2 + y^2)^{1/2}$, where m, n are integers. Then the author proves the following result. If $\{a_M\}$ are the coefficients of a double trigonometric series, and $a_M \rightarrow 0$ as $|M| \rightarrow \infty$, then the circular convergence to zero of the series everywhere implies that the series vanishes identically.

K. Chandrasekharan.

McMillin, Kenneth M.: Abel summability of the double series successively derived from the double Fourier series. Tôhoku math. J., II. Ser. 8, 183—187 (1956).

The author proves a result on the Abel summability of the derived series of a double Fourier series, which is similar, in the case of one variable, to a result proved by Misra (this Zbl. 29, 256).

K. Chandrasekharan.

Mishoe, Luna I. and Gloria C. Ford: On the limit of the coefficients of the eigenfunction series associated with a certain non-selfadjoint differential system. Proc. Amer. math. Soc. 7, 260—266 (1956).

Bei der Lösung des hyperbolischen Problems $u_{xx} - q(x)u = u_{xt} - p(x)u_t$, $u(a, t) = u(b, t) = 0$, $u(x, 0) = F(x)$ (q stetig, p zweimal stetig differenzierbar; F' in $a \leq x \leq b$ vorhanden und von beschränkter Schwankung sowie $F(a) + F(b) \cdot \exp[-\int_a^b p(\xi) d\xi] = 0$) durch Separation interessiert die Frage der Entwickelbar-

keit von $F(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n u_n(x)$ nach den Eigenfunktionen $u_n(x)$ des Problems: $u'' + qu = \lambda(u' - pu)$, $u(a) = u(b) = 0$. In Ergänzung einer früheren Arbeit von B. Friedman u. L. I. Mishoe (dies. Zbl. 72, 59) wird bewiesen: Notwendig und hinreichend für $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ist $F(a) = F(b) = 0$.

G. Bertram.

Spezielle Funktionen:

Tricomi, Francesco G.: Funzioni speciali. Atti V. Congr. Un. Mat. Ital. 85—102 (1956).

Der um die speziellen Funktionen hochverdiente Verf. gibt eine Klassifikation der speziellen Funktionen, die aus dem Integralkalkül kommen und im wesentlichen in die Klassen geordnet werden: elliptische und Abelsche Funktionen, Gammafunktion und die Lösungsfunktionen der linearen Differentialgleichung $p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ vom Fuchschen Typus; letztere werden nach der Anzahl $n + 1$ der singulären Stellen eingeteilt: $n = 1$ elementare Funktionen; $n = 2$ hypergeometrische Funktionen mit ihren Ausartungen; $n = 3$ Mathiesche Funktionen, Sphäroidfunktionen, Laméschen Funktionen. Besonders ausführlich behandelt Verf. die zur konfluenten hypergeometrischen Funktion gehörigen Gruppen von speziellen Funktionen [Vorzug der Kummerschen Funktionen $\Phi(a; b; z)$ und $\Psi(a; c; z)$ vor den Whittakerschen Funktionen!]. Zum Schluß wird als Ziel eine einheitliche Darstellung der speziellen Funktionen durch eine Näherungsformel mit (ev. tabellarisch) gegebenen Korrektionsgliedern aufgezeigt. Die Darstellung ist lebhaft, schwungvoll und interessant; manche kritische Bemerkung allgemeinerer Art trifft das Wesentliche. [Zur Literaturangabe: Neben Lösch-Schoblik (nicht Schonblik) dürfte wohl auch H. Buchholz, Die konfluente hypergeometrische Funktion (dies. Zbl. 50, 74), neben Lense (dies. Zbl. 38, 222) wohl auch E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen. Theorie u. Anwendungen, Berlin 1878/1881 und E. W. Hobson, The Theory of spherical and ellipsoidal Harmonics (dies. Zbl. 4, 210), zu nennen sein.

Wegen des Hinweises auf R. Campbell, *Théorie générale de l'équation de Mathieu* siehe das Referat dies. Zbl. 66, 317; dafür wäre wohl ein Hinweis auf M. J. O. Strutt, Lamésche, Mathiesche und verwandte Funktionen in Physik und Technik (dies. Zbl. 5, 160) am Platze gewesen. Als sehr nützlich und erwähnenswert erscheint Ref. auch die Darstellung von E. Hilb in E. Pascal, *Repertorium der höheren Mathematik I*, 3 (Leipzig, 1929) Kap. XXVI.] *O. Volk.*

Atkinson, F. V.: On polynomials with least weighted maximum. *Proc. Amer. math. Soc.* 7, 267—270 (1956).

Let i) $w(x)$ be positive and continuous in the finite real interval $a \leq x \leq b$, ii) $p_n(x)$ be polynomials of degree n ($n = 1, 2, \dots$) such that the coefficient of x^n is unity and minimize the expression $\max_{a \leq x \leq b} |w(x) p_n(x)|$. Hence between two consecutive zeros of $p_n(x)$, for $n \geq 2$, there lies one zero of $p_{n-1}(x)$. *T. Eweida.*

Mitrinović, Dragoslav S.: Quelques formules concernant les polynomes de Legendre. *Publ. Fac. Électrotechn. Univ. Belgrade, Sér. Math. Phys.* 1956, Nr. 1, 1—18, französ. Zusammenfassg. 19—20 (1956) [Serbokroatisch].

In Anwendung der bekannten Entwicklung vom $d^r P_n(x)/dx^r$ nach den $P_r(x)$ berechnet Verf. das Integral $\int_{-1}^{+1} \frac{d^r P_n(x)}{dx^r} \frac{d^s P_n(x)}{dx^s} dx$ (vier Fallunterscheidungen). Am Schluß werden Abschätzungsformeln für $|d^r P_n(x)/dx^r|$ aus einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 72, 65) angeführt. (Vgl. S. K. Chatterjee, dies. Zbl. 78, 257.) *O. Volk.*

Badaljan, G. V.: Eine Verallgemeinerung der Legendreschen Polynome und einige Anwendungen. *Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fis.-mat. estestv. techn. Nauk* 9, Nr. 1, 3—22 (1956) [Russisch].

Les résultats de la première partie de ce travail (ce Zbl. 67, 296) sont appliqués aux questions suivantes: étude des transformées de Fourier des fonctions de la classe $L^2\{e^{-x}, (0, \infty)\}$; problèmes extrémaux relatifs aux fonctions entières de la classe W_σ de Paley et Wiener (extension de résultats de Džrbasjan et Tavadjan, ce Zbl. 57, 311); évaluation du module maximum d'un quasi-polynome de Tchebycheff. *G. Bourion.*

Palamà, Giuseppe: Su alcuni polinomi che generalizzano quelli di Laguerre e su altri che generalizzano quelli di Hermite ed i loro associati. *Rivista Mat. Univ. Parma* 7, 293—309 (1956).

Es handelt sich um die vom Verf. in früheren Arbeiten (dies. Zbl. 52, 297; 55, 64; 65, 59; siehe auch L. Toscano, dies. Zbl. 67, 45) untersuchten Polynome

$$\begin{aligned} H^{n,p}(x) &= (H_{n+p}(x) h_{n-1}(x) - H_{n-1}(x) h_{n+p}(x)) e^{-x^{1/2}} / (n-1)!, \\ (H^{0,p}(x) &= H_p(x), \quad H^{1,p}(x) = G_p(x)) \quad \text{und} \\ P^{\alpha,p}(x), \quad (P^{\alpha,0,p}(x) &= L_p^{(\alpha)}(x), \quad P^{\alpha,1,p-1}(x) = P^{\alpha,p}(x)); \end{aligned}$$

sie lassen sich mit den hypergeometrischen Polynomen

$$\psi_{n,v}^{(\alpha)}(x) = [(\alpha+1, n)/n!] \psi_1(-n; v+1; -\alpha-2n-\frac{1}{2}; \alpha+1; 2, x),$$

ψ_1 die Humbertsche konfluente hypergeometrische Funktion mit 2 Veränderlichen, in Beziehung bringen. Für diese Polynome werden verschiedene Darstellungen gegeben; es wird $\psi_{n,v}^{(\alpha)}(mx)$ entwickelt und es werden die Integrale $\int_0^x e^{-x} x^v (\psi_{n,v}^{(\alpha)}(mx))^j dx$,

$j = 1, 2$ bestimmt. Den Abschluß bildet die Formel

$$\begin{aligned} (n+1)! P^{\alpha, n+1}(x) &= \sum_{m=0}^n \frac{(n+m+1)!}{(2m+1)!} (-x)^m {}_3F_1(-m, -2m-1, -\alpha-m; \\ &\quad -(n+m+1); -x^{-1}). \end{aligned} \quad O. Volk.$$

Carlitz, Leonhard: On Jacobi polynomials. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 371—381 (1956).

Gebraucht man das Zeichen $\Delta_\gamma f(\gamma) = f(\gamma + 1) - f(\gamma)$, so kommen den Jacobischen Polynomen (J. P.)

$$(1) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{r=0}^n \binom{n+\alpha}{n-r} \binom{n+\beta}{r} \left(\frac{x-1}{2}\right)^r \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-r}$$

die beiden Eigenschaften

$$(2) \quad \Delta_\alpha P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2} (x+1) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x), \quad \Delta_\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2} (x-1) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x)$$

zu. Verf. kennzeichnet die J. P. differenzenrechnerisch: Wenn $f_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ein Polynom in x und β ist, vom Grade n in x , und den Beziehungen

$$\begin{aligned} df_n^{(\alpha, \beta)}(x)/dx &= \frac{1}{2} (n + \alpha + \beta + 1) f_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x), \\ \Delta_\beta f_n(x) &= \frac{1}{2} (x-1) f_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x), \quad f_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n} \end{aligned}$$

gehört, so ist $f_n^{(\alpha, \beta)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. — Entsprechender Satz gilt für die Laguerreschen Polynome. — Auf dem mit (2) eingeschlagenen Wege leitet Verf. für (1) eine Fülle von Formeln her, darunter

$$(3) \quad P_n^{(\alpha+\mu, \beta+\nu)}(x) = \sum_{k=0}^n P_k^{(\mu, \nu)}(x) P_{n-k}^{(\alpha, \beta)}(x).$$

(3) folgt auch aus der von ihm gefundenen Erzeugungsformel

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n^{(\alpha-n, \beta-n)}(x) = \left[1 + \frac{1}{2} (x+1)t\right]^\alpha \left[1 + \frac{1}{2} (x-1)t\right]^\beta.$$

Verf. spezialisiert seine Ergebnisse auf den Unterfall $\alpha = \beta$ der Gegenbauerschen Polynome. — Die J. P. $q_n^{(\alpha, \beta)}(x) = [2^n/(\alpha + \beta - n + 1)_n] P_n^{(\alpha-n, \beta-n)}(x)$ erweist er als Appellsche Polynomklasse, ebenso die Polynome $\psi_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(x+1)^n}{(x+1)_n} P_n^{(\alpha, \beta-n)}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. — Quelle dieser Einsichten und weiterer Formeln sind die Erzeugungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n q_n^{(\alpha, \beta)}(x) = e^{(x-1)t} {}_1F_1(-\alpha; -\alpha - \beta; 2t),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n t^n}{(\alpha+1)_n} P_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) = e^{(x+1)t} {}_1F_1(-\beta; \alpha+1; (1-x)t),$$

deren zweite von Feldheim (dies. Zbl. 27, 102) herrührt. Dort auch ein Seitenstück zu (4), für das Verf. hier einen neuen Beweis gibt.

L. Koschmieder.

Ferrer Figueras, Lorenzo: Über die aus der erzeugenden Funktion $u_{3,3} = [1 - x^3 + (x-z)^3]^{-1/3}$ entspringenden Rekursionsformeln. Gac. mat., Madrid 8, 252—255 (1956) [Spanisch].

$P_n(x)$ étant le polynome défini par $[1 - x^3 + (x-z)^3]^{-1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n$, l'A. déduit les relations suivantes:

$$(1-x^3) P'_n = (1+n)(x^2 P_n - P_{n+1}),$$

$$(1-x^3) P'_{n-1} - (1-x^3)x P'_n - x(n-1)P_{n-2} + (2n-1)x^2 P_{n-1} + (1-2x^3)n P_n = 0,$$

$$(1-x^3) P'_n - (1-x^3)x P'_{n+1} - x^2 n P_n - 2(x^3-1)(n+1)P_{n+1} - (n-1)P_{n-2} + (2n-1)x P_{n-1} = 0,$$

$$2x P_n - P_{n-1} - P'_{n+1} + 3x^2 P'_n - 3x P'_{n-1} + P'_{n-2} = 0.$$

J. Horváth.

Meijer, C. S.: Expansion theorems for the G -function X. Generating functions of generalized hypergeometric polynomials and functions. — XI. Expansions in series of generalized hypergeometric functions. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 309—314 (1955); 59, 70—82 (1956).

Teil I—VIII: vgl. dies. Zbl. 48, 307, 308; 50, 294; 51, 308; 55, 66, 67; Teil IX: Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 243—251 (1955).

X. Verf. beweist für die Werte $t = k$ und $t = k + 1$ die Entwicklung

$$(1) \left[\prod_{j=1}^k \Gamma(\gamma_j) \right] \left[\prod_{j=1}^k \Gamma(\gamma_j - \mu) \right] \lambda^{\mu} p + k q_{q+t-1} \left(\begin{matrix} \gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_p; \\ \beta_1, \dots, \beta_{q-1}, \delta_1, \dots, \delta_t; \lambda \zeta \end{matrix} \right) \\ = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r k + 1 \varphi_t \left(\begin{matrix} -r, \gamma_1 - \mu, \dots, \gamma_k - \mu; \\ \delta_1 - \mu, \dots, \delta_t - \mu; \lambda \end{matrix} \right) \frac{\Gamma(1 + \mu)}{r!} p + 1 \varphi_q \left(\begin{matrix} 1 + \mu, \alpha_1, \dots, \alpha_p; \\ \beta_1, \dots, \beta_{q-1}, 1 + \mu - r; \zeta \end{matrix} \right).$$

Die von ihm genau angegebenen, auf Veränderliche und Parameter bezüglichen Bedingungen ihrer Gültigkeit unterscheiden sich, je nachdem ob $t = k$ oder $t = k + 1$;

ob $p < q$ oder $q = p$ ist. Für ganze $\mu \geq 0$ ist der erste Bruch links durch $\prod_{j=1}^k (\gamma_j - \mu)_\mu$ zu ersetzen. — (1) enthält als Sonderfälle viele bekannte Formeln, z.B. solche von Tricomi [Funzioni ipergeometriche confluenti (dies. Zbl. 49, 52), p. 90, (33)], Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi [Higher transcendental functions I (dies. Zbl. 51, 303), p. 283, (2)], Toscano [Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 4, 398—409 (dies. Zbl. 45, 345), p. 409, (34)]. XI. Verf. steigt zu immer allgemeineren Ergebnissen auf, aus denen viele ihrer Vorgänger dann als Sonderfälle folgen. Den Höhepunkt des vorliegenden Abschnitts bilden in dieser Hinsicht die beiden Formeln: 1) Ist $q \geq 0$ ganz und $p = q + 1$ oder $p = q$, so gilt

$$\frac{1}{\Gamma(b + \mu)} G_{p+1, q+2}^{2, p} \left(z \left| \begin{matrix} 1 - \gamma_1, \dots, 1 - \gamma_p, \sigma \\ 0, \mu, 1 - \delta_1, \dots, 1 - \delta_q \end{matrix} \right. \right) \\ = \prod_{j=1}^p \Gamma(\gamma_j) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\sigma - \mu)_r \Gamma(b + r)}{r! \Gamma(b + \sigma + r)} p + 1 \varphi_{q+1} \left(\begin{matrix} b + r, \gamma_1, \dots, \gamma_p; \\ b, \delta_1, \dots, \delta_q; -z \end{matrix} \right)$$

unter Annahmen über z und die Parameter, die sich nach den beiden getrennten Möglichkeiten richten. Die Spezialisierung $\mu = \sigma + n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) liefert die abbrechende Entwicklung

$$\frac{(-1)^n \Gamma(1 - \sigma)}{\Gamma(b + \sigma + n)} p + 1 \varphi_{q+1} \left(\begin{matrix} 1 - \sigma, \gamma_1, \dots, \gamma_p; \\ 1 - \sigma - n, \delta_1, \dots, \delta_q; -z \end{matrix} \right) \\ = \sum_{r=0}^n \frac{(-n)_r \Gamma(b + r)}{r! \Gamma(b + \sigma + r)} p + 1 \varphi_{q+1} \left(\begin{matrix} b + r, \gamma_1, \dots, \gamma_p; \\ b, \delta_1, \dots, \delta_q; -z \end{matrix} \right).$$

2) Ist $k \geq 0$ ganz und $t = k$ oder $t = k + 1$, so ist

$$\left(\prod_{j=1}^k \Gamma(d_j) \right)^{-1} G_{k+2, t+2}^{2, k+2} \left(z \left| \begin{matrix} 1 - b_1, 1 - b_2, 1 - d_1, \dots, 1 - d_k \\ 0, \beta, 1 - c_1, \dots, 1 - c_t \end{matrix} \right. \right) \\ = \Gamma(b_1 + \beta) \Gamma(b_2 + \beta) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b_1 + r) \Gamma(b_2 + r)}{r! \Gamma(b_1 + b_2 + \beta + r)} k + 1 \varphi_t \left(\begin{matrix} -r, d_1, \dots, d_k; \\ c_1, \dots, c_t; z \end{matrix} \right)$$

wiederum unter Voraussetzungen, die von der Differenz $t - k$ abhängen.

L. Koschmieder.

Rodríguez Sanjuán, Antonio: Reduktion der elliptischen Integrale auf kanonische Gestalt im Reellen. Revista Acad. Ci. Madrid 50, 19—133; Druckfehlerverzeichnis. Ibid. 437—440 (1956). [Spanisch].

Bei der Zurückführung elliptischer Integrale (e. I.) $\int R(x, y) dx$, worin y^2 ein Polynom vierten Grades und R eine reelle rationale Funktion bedeutet, auf kanoni-

sehe Gestalt (k. G.) ist man bis heute (s. P. F. Byrd und M. D. Friedman, Handbook of elliptic integrals (B.-F.), dies. Zbl. 55, 119) im wesentlichen Legendre gefolgt.

Unter den Bestandteilen dieser k. G. erscheinen I. dritter Gattung (3. G.) $\int \frac{dx}{(x-h)y}$ mit komplexem h . Verf. nimmt am Gebrauch komplexer Größen bei der Berechnung reeller Integrale Anstoß und vermeidet sie, indem er außer e. I. 1. und 2. G. solche der Form $L(mx+n) = \int \frac{(mx+n)dx}{(x^2+2px+q)y}$ mit festen reellen m, n und ebensolchen p, q von der Eigenschaft $p^2 - q < 0$ einführt. Von ihnen zeigt er, daß sie durch e. I. 1. G. und solche 3. G. mit reellen h ausdrückbar sind. — Dieses Verfahren \mathfrak{M}_1 weist er auch für zahlenmäßige Rechnung als nützlich nach, so an dem Beispiel $L(x+1)$ mit $y^2 = (x^2 - 7/4)(x^2 - 1/4)$, $p = 2$, $q = 25/4$. Nach Legendre träten dabei zunächst zwei e. I. 3. G. mit konjugiert komplexen Parametern auf (s. B.-F., S. 224, Z. 19—25; S. 238), und man hätte eine so unbequeme quadratische Gleichung zu lösen (s. B.-F., S. 231 f.), daß die Fortsetzung der Rechnung in Frage gestellt würde. — Verf. entwickelt noch ein zweites Verfahren \mathfrak{M}_2 zur Behandlung e. I. im Reellen; mit ihm zeigt er die Entbehrlichkeit komplexer Größen selbst bei Gebrauch der von Legendre benutzten k. G. — Den Vergleich von \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 , von dem Verf. sich manchen Aufschluß über e. I. 3. G. erhofft, verschiebt er auf eine spätere Veröffentlichung. Dem Ref. scheint wünschenswert, \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 an geometrischen und mechanischen Beispielen e. I. 3. G. mit komplexen Parametern zu erproben. — In der Ausarbeitung von \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 erschöpft sich der Inhalt der Abh. nicht. Verf. füllt Lücken im Schrifttum der e. I. aus und berichtigt darin Irrtümer, sogar in klassischen Lehrbüchern wie E. Goursat, Cours d'analyse mathématique I (Paris 1943), S. 254. — Im letzten Abschnitt behandelt Verf. auf ähnliche Weise die elementaren Integrale $\int R(x, y) dx$, $y^2 = ax^2 + bx + c$, mit der Begründung, er kenne keine Arbeit, in der sie ausschließlich im Reellen ausgerechnet würden. Ref. glaubt eine solche Ausrechnung in H. v. Mangoldts Einführung in die höhere Mathematik III (dies. Zbl. 7, 403) auf S. 62—76 zu finden (dort auf S. 45 bis 48 auch eine ganz im Reellen verlaufende Integration einer reellen rationalen Funktion).

L. Koschmieder.

Funktionentheorie:

Videnskij, V. S.: Über gleichmäßige Annäherung in der komplexen Ebene. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 5 (71), 169—175 (1956) [Russisch].

$\varphi_0(z), \dots, \varphi_n(z)$ formant un système de Tchebycheff sur l'ensemble compact K du plan z , on étudie la meilleure approximation sur K de $f(z)$, complexe, continue, par des combinaisons linéaires des φ („polynômes“). Pour f donnée, il existe des ensembles finis S tels que les meilleures approximations sur K et S soient identiques. Pour un tel ensemble S , supposé minimal, Kolmogoroff a donné une caractérisation simple des polynômes de meilleure approximation (A. N. Kolmogorov, ce Zbl. 30, 28; voir aussi E. Ja. Remez, ce Zbl. 45, 298 et V. K. Ivanov, ce Zbl. 44, 283; 46, 293). L'A. donne pour cette condition une démonstration inspirée de T. Hall (ce Zbl. 35, 337) et dont le principe remonte à Pólya: étude de la meilleure approximation en moyenne d'ordre q et passage à la limite $q \rightarrow \infty$. G. Bourion.

Džrbašjan, M. M. und A. P. Tamadjan: Über die beste Annäherung durch ganze Funktionen im Komplexen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 20, 485—512 (1956) [Russisch].

Les AA. abordent pour les fonctions d'une variable complexe l'analogie d'un problème traité par M. Serge Bernstein (Œuvres t. II, (ce Zbl. 56, 60), articles 84 et 89) quant à l'approximation par des fonctions entières d'ordre donné d'une fonction définie, continue et bornée sur tout l'axe réel. D étant un ensemble

ouvert non borné dont le complémentaire n'a aucune composante bornée, $f(z)$ étant holomorphe et bornée sur D , continue sur \bar{D} , on introduit la meilleure approximation de f sur D par des fonctions entières $g_\sigma(z)$ d'ordre donné ϱ et de type σ :

$$A_\sigma^{(\varrho)} = \inf_{\{g\}} \left\{ \sup_{z \in D} |f(z) - g_\sigma(z)| \right\}$$

et l'on cherche à mettre en relation la loi de décroissance de $A_\sigma^{(\varrho)}$ pour $\sigma \rightarrow \infty$ avec les propriétés différentielle de $f(z)$ sur D . Les AA. traitent les deux cas suivants: 1) $\varrho > 1$; D est la réunion de l'angle $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi (1 - 1/\varrho)$ et de l'angle opposé par le sommet (le cas limite $\varrho = 1$ est celui de Bernstein); 2) $\varrho \geq 1/2$; D est l'angle $|\arg z - \pi/2| < \pi (1 - 1/2\varrho)$. — Les démonstrations utilisent des lemmes de H. Kober [Trans. Amer. math. Soc. 54, 70—82 (1943), 56, 7—31 (1944)] et les propriétés des fonctions entières E_ϱ de Mittag-Leffler. Une partie des résultats ont été publiés antérieurement sans démonstration (ce Zbl. 65, 63). *G. Bourion.*

Stečkin, S. B.: Ein Extremalproblem für Polynome. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* 20, 765—774 (1956) [Russisch].

L'exposant p et la suite $D \equiv \{d_n\}$ sont donnés: $0 < p < 2$; $d_n \geq 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$M_n^{(p)}[D]$ désigne la borne supérieure de $\sum_{k=0}^n d_k^{2-p} |c_k|^p$ pour des c_k liés par la condition $\max_{|z| \leq 1} |p_n(z)| \leq 1$ où $p_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$. L'A. étudie le comportement asymptotique de cette quantité pour $n \rightarrow \infty$: il obtient la double inégalité

$$C \left[\sum_{k=0}^n d_k^2 \right]^{1-1/p} \leq M_n^{(p)}[D] \leq \left[\sum_{k=0}^n d_k^2 \right]^{1-1/p}.$$

La démonstration repose sur un théorème de R. E. A. C. Paley (ce Zbl. 4, 211). *G. Bourion.*

Falgas, Maurice: Sur certaines fonctions associés aux bases de polynomes et leur utilisation à la définition des séries de base et à l'étude de l'effectivité de ces bases. I. — II. L'effectivité des bases de polynomes. *C. r. Acad. Sci., Paris* 242, 1563—1566, 1677—1679 (1956).

Verf. teilt ohne Beweise eine Reihe von Sätzen mit, die eine Verallgemeinerung der Whittakerschen Untersuchungen über Entwicklungen nach Polynomen anstreben. Dazu werden neben Faberschen Polynomen folgende Funktionen herangezogen: Mit einer Polynombasis $p_n(z)$, $n = 0, 1, \dots$, wird $(z - z_0)^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}(z_0) p_m(z)$ gebildet. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}(z_0) (z - z_0)^{1-n}$ in einer Umgebung von ∞ konvergiert, stellt die Reihe eine von z_0 unabhängige analytische Funktion $\varphi_m(z)$ dar. Für eine in E regulär analytische Funktion $f(z)$ werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Entwicklung $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \varphi_m(z)$ angegeben. Die weiteren Sätze beziehen sich auf die einfache, kompakte und absolute Effektivität einer Basis $\{p_n(z)\}$. Die Einführung der beiden letzten Begriffe wird durch die Verwendung der Funktionen $\varphi_m(z)$ nahe gelegt. *H. Wittich.*

64480R.-Salinas, Baltasar: Die Eindeutigkeitsprobleme in der Theorie der asymptotischen Reihen. Ausdrücke für semi-analytische Funktionen mit Hilfe der Algorithmen von Borel und Stieltjes. *Revista Acad. Sci. Madrid* 50, 191—227 (1956). [Spanisch].

Ce travail est une contribution à l'étude des classes semianalytiques, initiée par San Juan (Proc. internat. Congr. Math. Amsterdam 1954, 2, 165—167 (1954),

et un travail à paraître dans *Acta math.*). D_α désignera le domaine défini par $\operatorname{Re} z^{1/\alpha} \geq a^{1/\alpha}$ ($a > 0$). Etant donné la série (1) $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^{-v}$, la fonction $f(z)$, analytique dans D_α , est appelée par San Juan une approximation asymptotique semianalytique (a.a.s.a.) à la série (1), si l'on a $|f(z) - \sum_{v=0}^{n-1} a_v z^{-v}| \leq m_n |z|^{-n}$, où les bornes m_n satisfont à la condition de Carleman-Ostrowski (C_α): $\sum_{n=1}^{\infty} (m_n^c)^{-1/\alpha n} = \infty$, $\{m_n^c\}$ étant la plus grande minorante logarithmiquement convexe de $\{m_n\}$. D'après un résultat classique de San Juan (ce *Zbl.* 28, 355), une série peut avoir plusieurs a.a.s.a. différentes. Il se pose donc le problème de donner des conditions portant sur les a_n qui entraînent l'unicité de l'a.a.s.a. (c'est le cas par exemple si tous les $a_n = 0$, d'après le classique théorème de Carleman). Le présent mémoire est consacré à cette question et à la représentation algorithmique de l'a.a.s.a. $f(z)$ à partir de la série (1). Les nombreux résultats (15 théorèmes) du travail ont des énoncés trop compliqués pour être reproduits ici, nous n'en citerons que deux à titre d'exemple. 1. Soit $f(z)$ a.a.s.a. de (1) dans D_α . Soit $\limsup (|a_n|/(\alpha n)!)^{1/\alpha n} = 1/r_0 < \infty$. Définissons $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\alpha n}/(\alpha n)!$ pour $|t| < r_0$. Si $F(t)$ est analytique sur la demi-droite $\arg t = 0$, alors on a

$$f(z) = z^{1+1/\alpha} \int_0^\infty e^{-tz-\alpha} \int_0^t \frac{(t-u)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} F(u) du dt.$$

2. Soit C une courbe contenue dans le domaine angulaire $|\arg z| \leq \frac{1}{2}(2-\alpha)\pi$ ($\alpha < 2$) et $G(u)$ une fonction à variation bornée sur C . Posons $a_n = (-1)^n \int_C u^n dG(u)$, $b_k = \int_C |u^k dG(u)|$. Supposons que la suite $|a_n|$ satisfait (C_α) et que $b_{n+1/\alpha-1} \leq k^{n+1}(|a_n| + (\alpha n)!) (n = 0, 1, 2, \dots; k > 0)$. Si $f(z)$ est a.a.s.a. de la série (1) correspondante, alors $f(z) = \int_C \frac{z}{z+a} dG(u)$ pour $\arg z < \frac{1}{2}\alpha\pi$. — L'A. considère aussi

le problème de savoir si une a.a.s.a. est une approximation de Watson-Nevanlinna (c.-à.-d. $m_n < k^{\alpha n}(\alpha n)!$) ou une approximation asymptotique optimale au sens de San Juan (cf. op. cit.).

J. Horváth.

Mayer-Kalkschmidt, Jörg: Über Singularitäten gewisser Potenzreihen. *Arch. der Math.* 7, 129—134 (1956).

Die Potenzreihe (1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$ besitze den Konvergenzradius 1 und reelle Koeffizienten. Der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow 1-} (f(z) - f(1))/(z - 1) = f_L^{(1)}(1)$ heiße im Existenzfall die Linksableitung von $f(z)$ bei $z = 1$; analog werden die höheren Linksableitungen $f_L^{(m)}(1)$ ($m = 2, 3, \dots$) definiert. Es handelt sich um den Ideenkreis des Satzes, daß $a_n \geq 0$ die Singularität von $f(z)$ in $z = 1$ zur Folge hat. Verf. beweist: Sei k eine natürliche Zahl; $f(z)$ ist sicher dann singularär in $z = 1$, wenn (2) die k -ten arithmetischen Mittel der Teilsummen der Reihe (1) in $z = 1$ nicht abnehmen und (3) alle Linksableitungen bis zur k -ten dort verschwinden. (Unter den k -ten arithmetischen Mitteln versteht Verf. nicht die Hölderschen, sondern die Cesroschen Mittel k -ter Ordnung.) Einen entsprechenden Satz für gewöhnliche Dirichlet-Reihen und den reellen Punkt ihrer C_k -Summierbarkeitsgeraden hat schon M. Fekete [*C. r. Acad. Sci., Paris* 151, 497—500 (1910)] aufgestellt. Dabei ist schon die zu (2) analoge Bedingung hinreichend, während man im Potenzreihenfall mit (2) allein nicht auskommt, wie Verf. im Anschluß an Fekete durch ein einfaches Beispiel zeigen kann. Weitere Literatur: Verf., dies. *Zbl.* 51, 335; 56, 331. Verf.

bringt eine Berichtigung zu seiner zweitgenannten Arbeit. Anmerkung des Ref.: Beim Übergang von (2) zu (3) in der jetzigen Arbeit fehlt ein Faktor v !

W. Meyer-König.

Bagemihl, F.: A note on power series and area. Michigan math. J. 3, 133—135 (1956).

Verf. knüpft an eine Arbeit von Ryll-Nardzewski und Steinhaus (dies. Zbl. 44, 330) an und überträgt den dortigen Hauptsatz auf einen andern Singularitätenbegriff. In der komplexen z -Ebene sei D der offene Einheitskreis $|z| < 1$, C sein Rand $|z| = 1$. Ist $f(z)$ regulär in D , so heißt die Stelle $e^{i\theta} \in C$ ein starker Punkt von $f(z)$, wenn für jede Umgebung von $e^{i\theta}$ deren Durchschnitt mit D durch $f(z)$ auf einen Riemannschen Bereich unendlichen Flächeninhalts abgebildet wird. Ein Punkt von C , der nicht stark für $f(z)$ ist, heißt schwach. Natürlich ist jeder starke Punkt ein singulärer Punkt im üblichen Sinn, aber nicht umgekehrt. X sei ein Banach-Raum, $f(x, z)$ sei definiert für $x \in X$, $z \in D$. Für jedes feste $x \in X$ sei $f(x, z)$ regulär in D , für jedes feste $z \in D$ sei $f(x, z)$ ein lineares stetiges Funktional in X . Dann gibt es eine offene Untermenge G von C und eine Untermenge Q von X , die vom Typ F_σ und von erster Kategorie ist, so daß folgendes gilt: Für jedes feste $x \in X$ ist jeder Punkt von G schwach für $f(x, z)$; für jedes feste x aus der Restmenge $X - Q$ ist jeder Punkt von $C - G$ stark für $f(x, z)$. Folgerung: Gibt es zu jedem $e^{i\theta} \in C$ ein $x_0 \in X$, so daß $e^{i\theta}$ stark für $f(x_0, z)$ ist, so sind für jedes $x \in X - Q$ alle Punkte von C stark für $f(x, z)$. So ist es z. B. im Fall $f(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $x = \{a_k\} \in X_2$

(für X_2 vgl. a. a. O.). Insgesamt ist (in einem gewissen Sinn) gezeigt: Ist $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär, so sind „in der Regel“ alle Punkte von $|z| = 1$ stark. — Bemerkung des Ref.: Für ein anderes Analogon des Satzes von Ryll-Nardzewski und Steinhaus vgl. Gaier und Meyer-König (dies. Zbl. 71, 286). W. Meyer-König.

Leont'ev (Leontiev), A. F.: On the convergence of a sequence of Dirichlet polynomials. Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 23—26 (1956) [Russisch].

L'A., poursuivant une étude antérieure (relative au cas $n/\lambda_n \rightarrow \sigma$; ce Zbl. 45, 351) étudie le domaine de convergence d'une suite de polynômes de Dirichlet

$P_n(z) = \sum_{j=1}^n \alpha_{nj} \exp(-\lambda_j z)$ dans l'hypothèse $\limsup (n/\lambda_n) = \sigma$. G. Bourion.

Briggs, William E.: Some constants associated with the Riemann zeta-function. Michigan math. J. 3, 117—121 (1956).

Let

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma_n (s-1)^n.$$

It is proved, that $\gamma_n > 0$ and $\gamma_n < 0$ both hold for infinitely many values of n . Some new formulas for γ_n and estimates of $|\gamma_n|$ are derived. The proofs are based on a formula of Briggs and Chowla (cf. this Zbl. 64, 319). W. Verdenius.

Hayman, W. K.: Questions of regularity connected with the Phragmen-Lindelöf principle. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 35, 115—126 (1956).

Pour $u(x + iy)$ sous-harmonique dans $x > 0$, vérifiant $\limsup_{x \rightarrow 0} u(x + iy) \leq 0$ et $\sup_{x > 0} [u(x + iy)/x] = \alpha < +\infty$, Ahlfors et Heins (ce Zbl. 36, 47) ont montré que $\lim_{x \rightarrow 0} [u(r e^{i\theta})/r] = \alpha \cos \vartheta$ uniformément dans tout angle $|\arg z| < \vartheta_0$, $0 < \vartheta_0 < \pi/2$, lorsque r tend vers l'infini en dehors d'un ensemble exceptionnel de longueur logarithmique finie. L'A. montre que ce théorème reste valable pour $\vartheta_0 = \pi/2$, et, d'autre part, que la condition obtenue pour l'ensemble exceptionnel ne peut être remplacée par une condition plus restrictive. G. Bourion.

Kawakami, Yoshiro: Theorems on subharmonic functions in the unit circle. Kōdai math. Sem. Reports 8, 158—163 (1956).

Verf. teilt folgende zwei Sätze samt Beweisen mit: 1. Es sei μ eine positive Massenbelegung auf der Kreisscheibe $|z| < 1$ mit

$$\Omega(r) = \int_{|z| < r} d\mu = O((1-r)^{-\lambda}), \quad 0 < \lambda < 1,$$

und

$$w(z) = \int_{|z| < 1} \ln \left| \frac{1 - \bar{\zeta} z}{z - \zeta} \right| d\mu_{\zeta}$$

das zugehörige Potential. Dann gibt es auf $|z| = 1$ eine Menge E vom Maß 2π mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $e^{i\theta} \in E$ und $0 < \varphi_0 < \pi/2$ gibt es eine Menge $A_{\theta, \varphi_0} = A$ mit $\int_A dt/t < \infty$, so daß

$$(1) \quad w(e^{i\theta} - \varrho e^{i(\theta + \varphi)}) \rightarrow 0$$

für $\varrho \rightarrow 0$ außerhalb A , gleichmäßig für $|\varphi| \leq \varphi_0$. 2. Erfüllt die in $|z| < 1$ subharmonische Funktion $u(z)$ die Bedingungen

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})| d\varphi = O(1) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dr} L(r) = O((1-r)^{-\lambda}), \quad 0 < \lambda < 1$$

mit

$$L(r) = \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi}) d\varphi,$$

so gilt mit $u(e^{i\theta} - \varrho e^{i(\theta + \varphi)}) \rightarrow u(e^{i\theta})$ an Stelle von (1) die Behauptung des vorangehenden Satzes. Diese Sätze ergänzen Resultate von M. Tsuji (dies. Zbl. 71, 102).

A. Pfluger.

Srivastav, R. P.: On the derivatives of integral functions. Ganita 7, 29—44 (1956).

Let $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ be an integral function of order ϱ , lower order λ , let $\nu(r)$ denote the rank of the maximum term, and $\mu^{(s)}(r)$ the modulus of the maximum term of the series for $f^{(s)}(z)$, ($|z| = r$, $s = 0, 1, 2, \dots$). Let

$$M^{(s)}(r) = \max_{|z|=r} |f^{(s)}(z)|, \quad A^{(s)}(r) = \max_{|z|=r} \Re\{f^{(s)}(z)\}, \quad \mathfrak{M}_s'(r) = d\{M^{(s)}(r)\}/dr$$

where it exists, i. e., p. p. The following results are obtained: $\lim_{r \rightarrow \infty} \log \mu^{(s)}(r)/\nu(r) \log r \leq 1 - \lambda/\varrho$, $0 < \varrho < \infty$. (Corollary: $\lim_{r \rightarrow \infty} \log \mu(r)/\nu(r) \log \nu(r) \leq \lambda^{-1} - \varrho^{-1}$.)

$$M^{(1)}(r) \geq \mathfrak{M}'(r) > M(r) \log M(r)/(1 + \varepsilon) r \log r \quad (\varepsilon > 0),$$

for almost all $r > r_0$. Let $W(x)$ be the positive indefinitely increasing function, continuous in adjacent intervals, appearing in Valiron's formula (Theory of Integral Functions, Cambridge 1923, p. 27) $\log M(r) = \log M(r_0) + \int_{r_0}^r x^{-1} W(x) dx$. Srivastav proves that $\lim_{r \rightarrow \infty} (\log r)^{-1} \log W(r) = \frac{\varrho}{\lambda}$; $(r_2/r_1)^{W(r_1)} \leq M(r_2)/M(r_1) \leq (r_2/r_1)^{W(r_2)}$,

($0 < r_1 < r_2$), (Corollary: $\lim_{r \rightarrow \infty} M(Lr)/M(r) = 0$, $0 < L < 1$, $f(z) \neq$ polynomial). Again, for almost all $r > r_0 \geq 1$, $\mathfrak{M}'(r) \leq \mathfrak{M}_1'(r) \leq \mathfrak{M}_2'(r) \leq \dots$ if $\lambda > 1$, or if $\lambda = 1$ and $\varrho > 1$. For almost all $r > r_0$,

$$\mathfrak{M}_s'(r) > \mathfrak{M}'(r) [\log \mathfrak{M}'(r)/(1 + \varepsilon) r \log r]^s \text{ if } \lambda \geq 1 \text{ and } \varrho \neq 1;$$

$\mathfrak{M}'(r) \leq M(r)$ if $\varrho \leq 1$ and $\lambda \neq 1$; for $r > r_0$, $A^{(s)}(r) > A(r) [(r \log r)^{-1} \log A(r)]^s$ and $\lim_{r \rightarrow \infty} [(\log r)^{-1} \log \{r(A^{(s)}(r)/A(r))^{1/s}\}] = \varrho$ if $\lambda > 1$; for $r > r_0$, $A(r) r^{(\lambda - \varepsilon - 1)} < A^{(s)}(r) < A(r) r^{(\varrho + \varepsilon - 1)s}$; $\lim_{r \rightarrow \infty} \{r^p [A(r)]^{-1} A^{(k)}(r)\} = 0$ if $\varrho < 1$ and $p < k(1 - \varrho)$; $\lim_{r \rightarrow \infty} \{r^{-p} [A(r)]^{-1} A^{(k)}(r)\} = \infty$ if $\lambda > 1$ and $p < k(\lambda - 1)$.

N. A. Bowen.

Edrei, Albert: On a conjecture of Pólya concerning the zeros of successive derivatives. *Scripta math.* 22, 31—44, 106—121 (1956).

Let $f(z) (\neq 0)$ be an integral function of order $\rho (< \infty)$. Pólya conjectured that, if $\rho > 1$ and $f(x) = O(1)$, (x real), then every x is a point of accumulation of zeros of (1) f' , f'' , f''' , ... The author proves theorems related to this problem. Th. I. If $f(z)$ is real, of mean type, and $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\rho} \log |f(\pm x)| < 0$, ($x > 0$), then $\rho > 1$ and the set of all the zeros of (1) is everywhere dense on the real axis. Def. 1. z_0 belongs to the final set S of f if f is regular at z_0 and, for every $\varepsilon > 0$, $|z - z_0| < \varepsilon$ contains the zeros of infinitely many functions of the sequence (1). Th. II. If $f(z)$ is real, transcendental, satisfying (2) $\sum_{s=0}^h Q_s(z) f^{(h-s)}(z) = P(z)$, (P, Q polynomials, $Q_0 \neq 0$), then $\exists \rho (0 < \rho < \infty)$ such that $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \log M(r) = \sigma (> 0)$, and if $\rho > 1$ and also $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \log |f(\pm r)| < \sigma$, ($r > 0$), then every $x \in S$. To prove Th. I., interpolating functions are introduced having properties of $\psi(z)$ in Th. III [Let $f(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ be of order $\leq \rho$, mean type, and $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\rho} \log |f(x)| < 0$, $x > 0$. Then \exists a meromorphic $\psi(z)$, regular for $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, satisfying $\psi(n) = (-1)^n a_n \Gamma(1 + n/\rho)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Further required properties of $\psi(z)$ are obtained.], enabling the author to show

that, for arbitrary x_0 and some m , $f^{(m)}(x_0)$ is "large"; while, on the other hand, from (i) results of Pólya and Boas [Duke math. J. 9, 406—424 (1942)], he knows that $f^n(x_0)$ is "small" for all n , if (3) $f^{(\lambda)}(x_0) f^{(\lambda+2)}(x_0) < 0$ holds for sufficiently frequent λ , and (4) $f^{(\lambda)}(x) \neq 0$, $f^{(\lambda+2)}(x) \neq 0$ for such λ in $(x_0 - c, x_0 + c)$. Since (3) is satisfied, the contradiction shows that (4) cannot be. Def. 2. Let $g(z)$ be regular for $|z - z_0| < R$. A sequence $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ of positive increasing integers is critical for g at z_0 if $\exists c > 0$, $K > 0$ such that, for every $\lambda \in \{\lambda_k\}$, $|z - z_0| < c$ implies (5) $g^{(\lambda)}(z) g^{(\lambda+1)}(z) g^{(\lambda+2)}(z) \neq 0$, $|\{g^{(\lambda+1)}(z_0)\}^{-2} g^{(\lambda)}(z_0) g^{(\lambda+2)}(z_0) - 1| \geq K$. Replacing (3) by (5), the author generalizes (i): Th. IV. If $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ is critical at a regular point z_0 , then (a) if $\lambda_k - \lambda_{k-1} = O(1)$, $g(z)$ is an integral function of order 1 mean type at most, (b) if $\lambda_k - \lambda_{k-1} = O(\lambda_k^\delta)$, $0 < \delta < 1$, then $g(z)$ is an integral function of order $(1 - \delta)^{-1}$ at most, (c) if $\lambda_k - \lambda_{k-1} = o(\lambda_k)$, then $g(z)$ is an integral function. Th. V. Let $g(z)$ satisfy (2) and let z_0 be a point of regularity not belonging to S . Then either $g(z)$ is an integral function of exponential type, or else $\lim_{n \rightarrow \infty} \{g^{(n)}(z_0)\}^{-1} \{g^{(n+1)}(z_0)\} = \infty$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \{g^{(n+1)}(z_0)\}^{-2} g^{(n)}(z_0) g^{(n+2)}(z_0) = 1$. Th. II follows from

Th. V. N. A. Bowen.

Jenkins, J. A.: On explicit bounds in Landau's theorem. *Canadian J. Math.* 8, 423—425 (1956).

Es gibt eine absolute Konstante A mit folgender Eigenschaft: Ist die Funktion $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$ im Einheitskreise holomorph und verschieden von 0 und 1, so besteht die Ungleichung $|a_1| < 2 |a_0| \{|\log |a_0|| + A\}$. Durch unwesentliche Modifikation seiner früheren Methode (dies. Zbl. 64, 73) verbessert Verf. sein dortiges Resultat $A = 7,77$ zu $A = 5,94$. Wie Hayman in seinem Referat [Math. Reviews 16, 579 (1955)] der oben zitierten Arbeit des Verf. bemerkt hat, ist $A > 4,37$.

A. Pfluger.

Malliavin, Paul: Les théorèmes de Duffin-Schaeffer. *C. r. Acad. Sci., Paris* 242, 2204—2207 (1956).

Es sei $f(z)$ meromorph für $x > 0$ ($z = x + iy$) und $\Lambda = \{\lambda\}$ eine Menge von reellen Zahlen > 0 derart, daß $|\lambda - \lambda'| > h > 0$ falls $\lambda \neq \lambda'$. Ferner sei $q(x)$ eine

reelle, konkave, wachsende Funktion von x . Wann besteht eine Beziehung der Form

$$\lim \{(\log f(x))/q(x)\} \leq \overline{\lim} \{(\log f(\lambda))/q(\lambda)\} + B$$

(B konstant), wobei x alle reellen Zahlen außerhalb von Kreisen eines festen Radius um die Pole von f , λ dagegen nur diejenigen aus der Menge Λ durchläuft? Verf. kündigt eine Reihe von hinreichenden und notwendigen Bedingungen an, die die bekannten Sätze von V. Bernstein und Duffin-Schaeffer-Cartwright [vgl. etwa R. P. Boas, *Entire Functions* (1954, dies. Zbl. 58, 302), Chap. X] als Spezialfälle enthalten. An Stelle der in den letzteren auftretenden Abhängigkeiten zwischen dem Betragswachstum von f auf der imaginären Achse und Dichteigenschaften von Λ treten nun Beziehungen zwischen der Funktion $\lambda(x) = 2 \sum \lambda^{-1}$, $\lambda < x$, $\lambda \in \Lambda$ einerseits und einem auf $(0, +\infty)$ erklärten, negativen Maß ν sowie einer Zahlenfolge M_n (≥ 1) andererseits. Letztere sollen so beschaffen sein, daß gleichzeitig $d\mu_f > d\nu$ und $\int_0^\infty g(n + iy, t) d\mu_f(t) < \log M_n + O(n)$ gilt. Hierbei ist $t d\mu_f$ ein der Funktion f zugeordnetes und auf $(0, +\infty)$ erklärtes Maß, und $g(z, t)$ eine von f unabhängige elementare Funktion. Für $d\mu_f$ lassen sich Abschätzungen gewinnen, falls solche für $|f(iy)|$ ($0 < y < \infty$) und die Dichte der Polstellen von f bekannt sind.

H. W. Knobloch.

Hiong, King-Lai: Sur la croissance des fonctions algébroides en rapport avec leurs dérivées. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 3032—3035 (1956).

Hiong, King-Lai: Sur les fonctions algébroides et leurs dérivées. Étude des défauts absolus et des défauts relatifs. Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. 73, 439—451 (1956).

Sei $u(x)$ die von der Gleichung $\psi(u) = A_p u^p + A_{p-1} u^{p-1} + \dots + A_0 = 0$ definierte Algebraide. E. Ullrich (dies. Zbl. 3, 212) hat $T(r, u')$ nach oben und unten abgeschätzt, wo $N(r, u')$ und $N(r, 1/u')$ als einzige Indizes der Häufigkeit in bezug auf u' auftreten. Verf. leitet für $T(r, u)$ eine Ungleichung ab, wo beliebig viele Indizes der Häufigkeit in bezug auf u und auf eine beliebige Ableitung von u auftreten. In der Ungleichung treten die Ausdrücke $\sum_{h=1}^p N\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right)$ und $\sum_{i=1}^q N\left(r, \frac{1}{\psi_i(b_i)}\right)$ auf, wo $r = |x|$, $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ beliebige Zahlen $\neq 0$ sind und $\psi_i(u) = 0$ diejenige Gleichung ist, welche die algebraide Ableitung $u^{(i)}$ definiert. Die Abschätzung ist der fundamentalen Ungleichung von H. Milloux [Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 63, 289—316 (1946)] über meromorphe Funktionen analog. Das Resultat wird auf die Untersuchung der Defekte von $u'(x)$ angewandt.

V. Paatero.

Čebotarëv, G. N.: Partielle Indizes der Riemannschen Randwertaufgabe mit einer Dreiecksmatrix zweiter Ordnung. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 3 (69), 199—202 (1956) [Russisch].

Gegenstand der Untersuchung ist die Gachovsche Vermutung, daß die partiellen Indizes der Riemannschen Randwertaufgabe eng verknüpft mit den Indizes der Eigenfunktionen der Randmatrix und womöglich ihnen gleich sind. Diese Aufgabe besteht darin, bei gegebener Matrix n -ter Ordnung $A(t)$ eine n -dimensionale, stückweise holomorphe Vektorfunktion $\varphi(z)$ zu bestimmen, die der Bedingung $\varphi^+(t) = A(t) \varphi^-(t)$ auf einer gegebenen (geschlossenen, glatten) Randkurve $z = z(t)$ der komplexen Ebene genügt. Genauer über das Wesen der Aufgabe, die Bedeutung der Fragestellung und der Bezeichnungen ist dem ausführlichen Referat über den Gachovschen Bericht über diese Aufgabe (in dem am Schluß auch die oben erwähnte Vermutung ausgesprochen worden ist) zu entnehmen (dies. Zbl. 49, 57). Šmul'jan hat schon die Unrichtigkeit dieser Vermutung in ihrer extremen Form durch Angabe eines Gegenbeispiels nachgewiesen (dies. Zbl. 52, 299), sowie einige Eigen-

schaften der partiellen Indizes der Aufgabe mit einer hermiteschen Randmatrix angegeben (dies. Zbl. 58, 63). — Hier untersucht Verf. den Sachverhalt im Falle einer Dreiecksmatrix 2. Ordnung: $A(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) & 0 \\ a(t) & \xi_2(t) \end{pmatrix}$. Die Eigenfunktionen $\xi_1(t)$ und $\xi_2(t)$ mögen die Indizes κ_1 und κ_2 haben. Eingeführt werden die stückweise holomorphen Lösungen $x(z)$ und $y(z)$ der Randwertaufgaben $x^+(t) = \xi_1(t) x^-(t)$ bzw. $y^+(t) = \xi_2(t) y^-(t)$, die im Unendlichen eine Nullstelle der Ordnung κ_1 bzw. κ_2 haben, und das aus ihnen gebildete Integral über den Rand

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{a(t) x^-(t)}{y^+(t)(t-z)} dt,$$

das durch $A(t)$ festgelegt ist und ebenfalls eine stückweise holomorphe Funktion darstellt. — Mit Hilfe einer Methode, die als Entwicklung von $1/\Phi^-(z)$ in einen Kettenbruch in der Umgebung des unendlich fernen Punktes angesehen werden kann, stellt Verf. fest, daß die Gachovsche Vermutung für die Dreiecksmatrix $A(t)$ genau dann erfüllt ist, wenn $\Phi^-(z)$ im Unendlichen eine Nullstelle der Ordnung $\mu > \kappa_1 - \kappa_2$ hat. Dann sind die partiellen Indizes gleich κ_1 und κ_2 . Im allgemeinen aber haben sie abweichend hiervon die Form $\kappa_1 - \alpha$ und $\kappa_2 + \alpha$ ($\kappa_1 - \kappa_2 > \alpha \geq 0$), sind also zwischen κ_1 und κ_2 eingeschlossen. Innerhalb dieses Bereiches können sie jeden Wert annehmen und sind in gewissem Sinn unabhängig von den Indizes der Eigenfunktionen. — Zur Illustration ist ein Beispiel beigelegt, in dem $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ und $a(t)$ Polynome sind. Für nicht dreieckförmige Matrizen können die partiellen Indizes auch außerhalb des erwähnten Bereiches liegen, wie das angeführte Beispiel von Šmul'jan zeigt.

E. Svenson.

Rudin, Walter: Boundary values of continuous analytic functions. Proc. Amer. math. Soc. 7, 808—811 (1956).

Let E be a closed subset of measure zero of the unit circumference $|z| = 1$ and K be the closed unit disc $|z| \leq 1$. Let T be a closed Jordan domain in the w -plane. The author proves: If Φ is a continuous complex-valued function on E such that $\Phi(E) \subset T$, then there exists a function $f(z)$, regular in $|z| < 1$ and continuous in $|z| \leq 1$, such that $f(z) = \Phi(z)$ for all $z \in E$ and $f(K) \subset T$. This is regarded as a sharpened form of a result due to P. Fatou [Acta math. 30, 335—400 (1906)].

K. Noshiro.

Ozawa, Mitsuru: Some estimations on the Szegő kernel function. Kōdai math. Sem. Reports 8, 71—78 (1956).

Ist $K(z, \bar{z}_0)$ die Szegösche Kernfunktion für ein beschränktes Gebiet G mit Rand Γ der Länge S , so gilt $K(z_0, \bar{z}_0) S \geq 1$, und das Gleichheitszeichen steht nur, wenn G ein Kreis um z_0 ist. Beides ist leicht auch aus Garabedian (dies. Zbl. 35, 54) zu entnehmen. Andererseits ist $K(z_0, \bar{z}_0) \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \frac{ds}{|z - z_0|^2}$ und = gilt nur in

dem oben erwähnten Sonderfall. Daraus folgt leicht die obere Abschätzung

$K(z_0, \bar{z}_0) \leq \sum_{\nu=1}^n K_{\nu}(z_0, \bar{z}_0)$ für ein von n Kreisen berandetes Gebiet, wenn die Sum-

manden rechts sich auf je ein von einem der Randkreise berandetes Gebiet be-

ziehen. — Endlich wird ein Kriterium dafür angegeben, daß $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ unbe-

grenzt und eindeutig in B ($0 \in B$) fortgesetzt werden kann und dort eine Funktion mit $\|f\| = \int_{\Gamma} |f(z)|^2 ds \leq 1$ ergibt. Vgl. Verf. (dies. Zbl. 49, 176), wo sich das Analogon

bei einer anderen Norm findet.

H. Grunsky.

- Jenkins, James A.: On a result of Keogh. J. London math. Soc. **31**, 391—399 (1956).
- Kennedy, P. B.: Conformal mapping of bounded domains. J. London math. Soc. **31**, 332—336 (1956).

Ist $f(z)$ regulär, schlicht und beschränkt in $|z| < 1$, so gilt nach Keogh (dies. Zbl. **56**, 74) für die Länge $l(\varrho)$ des Bildes der Strecke $0 \leq z \leq \varrho < 1$: $l(\varrho) = o(-\log(1-\varrho))^{1/2}$, und $\frac{1}{2}$ ist der kleinstmögliche Exponent. Beide Verff. zeigen durch Konstruktion geeigneter Gegenbeispiele — Abbildungen auf spiralig aufgeschlitzte Kreisringgebiete — daß auch eine andere für alle $f(z)$ gültige Verbesserung der Größenordnung obiger Abschätzung (durch einen Faktor $\mu(\varrho) \rightarrow 0$ mit $\varrho \rightarrow 1$) nicht möglich ist. Die Beweise beruhen auf einem Verzerrungssatz von Warschawski (dies. Zbl. **28**, 403) für konforme Abbildung von Streifen gebieten, für den Jenkins einen Beweis mittels quasikonformer Abbildung gibt.

H. Grunsky.

Šaginjan, A. L.: Zur Theorie der schlichten Funktionen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. estestv. techn. Nauk **9**, Nr. 7, 29—35 (1956) [Russisch].

L'A. reprend, pour la fonction de Green (relative au point à l'infini) d'un domaine à complémentaire borné, l'évaluation donnée par lui antérieurement (ce Zbl. **64**, 314); il en déduit un théorème de distorsion.

G. Bourion.

Hayman, W. K.: The coefficients of schlicht and allied functions. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam **3**, 102—108 (1956).

The paper contains a survey of the main results concerning the behaviour of a_n for large n and the behaviour of $f(z)$ near $|z| = 1$ for schlicht p -valent and mean p -valent functions. Of particular interest are the theorems related to the authors own beautiful theorem $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|/n \leq 1$ for mean 1-valent functions. At the end of the paper the author concludes by indicating a proof of the Regularity theorem of Bazilevič (this Zbl. **36**, 187; **44**, 308).

H. Waadeland.

Dundučenko, L. E.: Einige Extremaleigenschaften der analytischen Funktionen, die in einem Kreis oder Kreisring gegeben sind. Ukrain. mat. Žurn. **8**, 377—395 (1956) [Russisch].

Zmorovič (dies. Zbl. **37**, 336; **53**, 48), erhielt Darstellungen einiger Klassen von Funktionen, die analytisch, endlichblättrig und symmetrisch im Einheitskreis oder schlicht in einem Kreisring sind. Mit Hilfe dieser Formeln und unter Anwendung einer Variationsmethode, werden eine Reihe von Extremalproblemen für solche Funktionen betrachtet. Für p -blättrige konvexe oder sternige Funktionen, die regulär im Einheitskreis und normiert durch Darstellungen wie $w(z) = z^p + c_2 z^{p+1} + \dots$ sind, werden die unteren und oberen Verzerrungen von $|w(z)|$ und $|w'(z)|$ im Kreise $|z| < 1$ gefunden. Für konvexe p -blättrige Funktionen wird die genaue Ungleichung $|\arg w'(z)| \leq (p-1) \arg z + 2p \arcsin |z|$ bewiesen, wo $\arg z \in [0, 2\pi]$. Dieselben Verzerrungsgrenzen werden auch für $|f(z)|$ und $|f'(z)|$ gefunden, wo die Funktion $f(z)$ sternig, beschränkt und schlicht in $|z| < 1$ ist und durch

$$f(z) = z \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \varphi(z e^{-i\vartheta}; \alpha) d\mu(\vartheta) \right]$$

dargestellt wird, wo $\mu(\vartheta)$ im Intervall $[-\pi, \pi]$ wächst, $\mu(-\pi + 0) = \mu(-\pi) = 0$, $0 < \alpha < \pi$, $z = r e^{i\varphi}$ und $\varphi(\zeta; \alpha) = \frac{1}{2} (1 - \zeta + \sqrt{1 - 2\zeta \cos \alpha + \zeta^2})$ ist. Für schlichte Funktionen der Art

$$w(z) = \frac{A z}{1+z} + \frac{B z}{1-z} + \frac{C}{i} \int_0^{\pi} \ln \frac{1 - z e^{-i\vartheta}}{1 + z e^{i\vartheta}} d\nu(\vartheta),$$

wo $A \geq 0$, $B \geq 0$ und $C \geq 0$ Konstanten bedeuten, $A + B + 2C \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\nu(\vartheta) = 1$ ist und die nichtnegative Funktion $\nu(\vartheta)$ im Intervall $[0, \pi]$ wächst, wird die scharfe Ungleichung $|w'(z)| \leq 1/(1 - |z|)^2$ gefunden. Es werden weiter die genauen Verzerrungen für $|f(z)|$ und $|f'(z)|$ angegeben, wo $f(z)$ schlicht und regulär für $0 < q < |z| < 1$ ist und wo noch die Normierungsbedingung

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=q} \frac{f(z)}{z} dz = 1, \quad q < |z| < 1$$

gilt, oder $f(z)$ in diesem Kreisring konvex ist. Es sei $w_s(z) = z^p + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,s}^{(p)} z^{n+s+p}$ eine für $|z| < 1$ analytische s -symmetrische p -blättrige Funktion. Für die Koeffizienten der Funktionenklasse $w_s(z)$, die in $|z| < 1$ sternig sind, findet Verf. folgende genaue Ungleichung

$$|a_{n,s}^{(p)}| \leq \frac{2p(2p+s) \dots (2p+n s - 2s)}{s^{n-1} (n-1)!}, \quad n \geq 2;$$

für die für $|z| < 1$ konvexen Funktionen $w_s(z)$ wird die genaue Ungleichung angegeben:

$$|a_{n,s}^{(p)}| \leq \frac{p(2p+s) \dots (2p+n s - 2s)}{s^{n-1} (n-1)! (n s + p - s)}, \quad n \geq 2.$$

Endlich findet Verf. für Funktionen $f(z)$, die im Einheitskreis analytisch, konvex und p -blättrig oder im Kreisring $0 < q < |z| < 1$ analytisch und schlicht sind, die unteren und oberen Grenzen der Krümmung des Bildes $w = f(z)$ des Kreises $|z| = \varrho$, wo $0 < \varrho < 1$ bzw. $q < \varrho < 1$.

L. Ilieff.

Huckemann, Friedrich: Zur Darstellung von Riemannschen Flächen durch Streckenkomplexe. Math. Z. 65, 213—239 (1956).

Die klassische, zuerst von A. Speiser angewandte Methode der Darstellung Riemannscher Flächen durch Streckenkomplexe beschränkte sich auf solche einfach-zusammenhängenden Flächen, die nur über endlich vielen Grundpunkten verzweigt sind. Die Verwendung von Streckenkomplexen zur Darstellung allgemeinerer Flächenklassen, insbesondere solcher, die kompliziertere als algebraische und logarithmische Singularitäten aufweisen, findet sich verstreut in der neueren Literatur. Eine erste systematische Theorie solcher verallgemeinerter Streckenkomplexdarstellungen wurde vom Ref. [Arch. der Math. 5, 389—400 (1954)] entwickelt. Dabei wurde an der Voraussetzung festgehalten, daß die Fläche eine Zerlegung in Halbblätter gestattet, von denen jedes nur endlich viele Verzweigungspunkte am Rande besitzt. Verf. geht einen Schritt weiter, indem er statt dessen nur voraussetzt, daß alle Grundpunkte auf einer Jordankurve in der komplexen Ebene liegen. — Die hier zur Anwendung kommenden (mit S^* bezeichneten) Streckenkomplexe unterscheiden sich von den bisher betrachteten dadurch, daß von einer Ecke unendlich viele Strecken ausgehen können, die sich gegen gewisse — als „Strahlen“ bezeichnete — Elemente des Komplexes häufen. Jedem Strahl entspricht eine Häufung von Singularitäten am Rande eines Halbblattes der Fläche. Die charakteristischen Eigenschaften des Komplexes S^* werden aufgezählt. Es werden „Randelemente“ von S^* definiert, von denen jedes einer Randstelle der Fläche entspricht. Zu diesen Randelementen gehören: a) die Strahlen, b) diejenigen Elementargebiete, deren Begrenzung unendlich viele Strecken oder mindestens einen Strahl enthält, c) gewisse Folgen von Elementargebieten. Verf. stellt sodann die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, daß zwei Randelementen dieselbe Randstelle der Fläche entspricht. — Als Beispiele werden die Komplexe S^* für die von den Funktionen $z \sin z$, $z^{-1} \sin z$, $e^z - z^{-1}$ erzeugten Riemannschen Flächen angegeben und diskutiert.

P. Seibert.

Huckemann, Friedrich: Über den Einfluß von Randstellen Riemannscher Flächen auf die Wertverteilung. *Math. Z.* 65, 240—282 (1956).

Verf. untersucht die Wertverteilung und Wachstumsordnung der erzeugenden Funktionen einer Klasse Riemannscher Flächen und zieht daraus Folgerungen für das Umkehrproblem der Wertverteilungslehre. Die betrachtete Flächenklasse ergibt sich aus einer Unterklasse der (zuerst von E. Ullrich eingeführten) Riemannschen Flächen mit endlich vielen periodischen Enden, nämlich der Flächen mit logarithmischen und („ein-“ oder „mehrfachen“) Sinusenden, indem die algebraischen Verzweigungspunkte nicht mehr als über endlich vielen Grundpunkten gelegen, sondern allgemeiner verteilt angenommen werden. Das hat zur Folge, daß neben den logarithmischen Windungspunkten durch Häufung algebraischer Singularitäten weitere Randstellen [RS] verschiedenartiger Struktur auftreten können. Jeder RS wird eine „Wachstumsstärke“ zugeordnet, die im Falle eines logarithmischen Windungspunktes gleich 1 und sonst von der Stärke der Konvergenz der erzeugenden Folge von Verzweigungspunkten abhängig ist. — Ergebnisse: 1. Alle betrachteten Flächen sind parabolisch. — 2. Der Satz von Denjoy-Carleman-Ahlfors läßt sich für die betrachtete Flächenklasse dahingehend erweitern, daß die Ordnung der erzeugenden Funktionen genau gleich der halben Summe der Wachstumsstärken aller RS ist. Alle nicht-mittelbaren RS (insbes. also die unmittelbaren RS, auf die sich der Satz von Denjoy-Carleman-Ahlfors bezieht) haben eine Wachstumsstärke ≥ 1 . Die mittelbaren RS dagegen besitzen — je nach der Stärke der Konvergenz der Verzweigungspunkte — entweder verschwindende oder positive Wachstumsstärke. — 3. Es werden die Defekte der erzeugenden Funktionen angegeben. Ein Punkt hat einen positiven Defekt, wenn über ihm mindestens eine RS von positiver Wachstumsstärke liegt. Mit Hilfe dieser Resultate wird das Umkehrproblem der Wertverteilungslehre für endlich viele vorgegebene Defekte gelöst mit der einzigen Einschränkung, daß ihre Summe < 2 ist. Das letztere Ergebnis ist unabhängig auch von A. A. Goldberg in einer vom Verf. nicht erwähnten Arbeit [*Ukrain. mat. Žurn.* 6, 385—397 (1954)] durch Untersuchung einer ähnlichen Flächenklasse bewiesen worden, wobei neben den Defekten auch die Verzweigungsindizes vorge-schrieben werden konnten.

P. Seibert.

Kuramochi, Zenjiro: An estimation of the measure of linear sets. *Proc. Japan Acad.* 32, 105—110 (1956).

E sei die z -Ebene (inklusive ∞ ferner Punkt) und A eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge auf der reellen Achse. Das Gebiet $E - A$ werde durch relativ-kompakte Teilgebiete R_n ausgeschöpft, mit $\bar{R}_n \subset R_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, so daß $R_{n+1} - \bar{R}_n$ in endlich viele „Ringgebiete“ P_{nj} mit Moduln μ_{nj} , $j = 1, \dots, k_n$, zerfällt. Es sei $M_n = \min_{(j)} \mu_{nj}$. Wenn nun die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2/M_n}$ divergiert, so ist A vom linearen Maß null. Verf. setzt unnötigerweise voraus, daß die Berandungskurven von R_n konvex seien. In einem vom Ref. gegebenen hinreichenden Kriterium, damit eine Riemannsche Fläche R zur Klasse O_{AD} gehöre (dies. *Zbl.* 34, 345) wird der minimale Modul M_n und die Zahl k_n herangezogen. In dem obigen vom Verf. betrachteten sehr viel spezielleren Fall werden nur die M_n verwendet. *A. Pfluger.*

Kusunoki, Yukio: Some classes of Riemann surfaces characterized by the extremal length. *Proc. Japan Acad.* 32, 406—408 (1956).

Verf. kündigt einige Resultate an, die in seiner späteren Arbeit (s. folgendes Referat) bewiesen und ergänzt werden.

H. P. Künzi.

Kusunoki, Yukio: On Riemann's period relations on open Riemann surfaces. *Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A* 30, 1—22 (1956).

Verf. interessiert sich für die Perioden Abelscher Integrale auf abstrakten offenen Riemannschen Flächen. Ausgangspunkt bildet der Ahlforssche Satz, nach welchem

zu jeder parabolischen Riemannschen Fläche eine gewisse Ausschöpfung und eine zugehörige kanonische Basis existieren, derart daß irgend zwei harmonische Differentiale du_1, du_2 der betrachteten Klasse der Beziehung

$$D_R(u_1, u_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} \left(\int_{A_i} d\bar{u}_1 \int_{B_i} d\bar{u}_2^* - \int_{A_i} d\bar{u}_2^* \int_{B_i} d\bar{u}_1 \right)$$

genügen. Um nun die entsprechende Aussage zu erhalten, welche sich durch die Perioden von du_1 und du_2^* ergibt, hat Verf. gewisse Bedingungen neu eingeführt, d. h. er untersuchte in diesem Zusammenhang eine Flächenklasse $O' \subset O_g$. Zusätzliche Untersuchungen in dieser Richtung beziehen sich auf die zweite Riemannsche Periodenrelation.

H. P. Künzi.

Ozawa, Mitsuru: On Riemann surfaces admitting an infinite cyclic conformal transformation group. *Kōdai math. Sem. Reports* 8, 152—157 (1956).

Im Anschluß an eine Arbeit von M. Heins (dies. Zbl. 46, 87) beschäftigt sich Verf. mit nicht-kompakten Riemannschen Flächen W , die eine unendlich-zyklische Gruppe $\mathfrak{G} = \{T^n\}$ von konformen Selbstabbildungen zulassen und die genau zwei „Enden“ (ideale Randkomponenten) e_1 und e_2 besitzen, für die gilt $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n p = e_1$ und

$\lim_{n \rightarrow -\infty} T^n p = e_2$. Die Frage ist, wann sich eine solche Fläche als endlichblättrige Überlagerungsfläche der z -Ebene realisieren läßt. Hierfür wird die kompakte Riemannsche Fläche R herangezogen, die aus W durch Identifikation äquivalenter Punkte unter der Gruppe \mathfrak{G} entsteht. Die obige Frage wird dann äquivalent mit der Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems in ganzen Zahlen, dessen Matrix im Wesentlichen die Riemannsche Periodenmatrix $(\tau_{i,j})$ ist.

A. Pfluger.

Tamura, Jirō: A prolongable Riemann surface. *Sci. Papers College general Educ. Univ. Tokyo* 6, 123—127 (1956).

Es sei F eine Riemannsche Fläche, $|t| < 1$ die universelle Überlagerungsfläche von F und \mathfrak{G} die Fuchssche Gruppe von F . \mathfrak{G} heißt Fuchssche Gruppe erster Art, falls alle Punkte von $|t| = 1$ entweder Fixpunkte einer Bewegung aus \mathfrak{G} , oder Grenzwerte solcher Fixpunkte sind. Im entgegengesetzten Fall heißt G Fuchssche Gruppe zweiter Art. Ist \mathfrak{G} von der zweiten Art oder enthält F ideale Randkomponenten mit schlichter Umgebung, so ist F offenbar eine fortsetzbare Riemannsche Fläche. Daß F nur in einem dieser beiden Fälle fortsetzbar ist, wurde von de Possel vermutet [*C. r. Acad. Sci., Paris* 186, 1092—1095; 187, 98—100 (1928)]. M. Heins (dies. Zbl. 60, 231) gab für diese Vermutung einen Beweis, der aber einen Fehler enthält. In dieser Arbeit zeigt Verf. durch ein merkwürdiges Beispiel, daß diese Vermutung nicht zutrifft. Das Beispiel stützt sich auf die Existenz eines Gebiets in der z -Ebene, dessen Komplementärmenge ein Kontinuum enthält, so daß das harmonische Maß des idealen Randes eines beliebigen einfach zusammenhängenden Teilgebiets null ist und jede Randkomponente entweder ein Punkt der reellen Achse oder ein Segment $[a, a + i b]$ (a, b reell und $b > 0$) ist. Die Existenz eines solchen Gebiets ist auch für andere Fragen der Funktionentheorie wichtig.

C. Constantinescu.

Bügel, Karl: Über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. *Math. Nachr.* 15, 87—88 (1956).

Using a well-known theorem of Looman [*Nachr. kgl. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl.* 1923, 97—108 (1923)] and the author's previous result [*Math. Z.* 25, 490—498 (1926)], the author proves: If a function $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$, defined in a domain B , satisfies the Cauchy-Riemann differential equations $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ in B , then the set of points z , for which $f'(z)$ does not exist, is nowhere dense in B .

K. Noshiro.

Berstein, I.: A topological characterization of the pseudoconjugate of a pseudo-harmonic function. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 1, Nr. 1, 45—48 (1956).

Eine stetige reellwertige Funktion $u(p)$, definiert über einer topologischen Fläche S heißt pseudoharmonisch in einem Punkte $p_0 \in S$, wenn eine topologische Abbildung $z = T(p)$ mit $0 = T(p_0)$ existiert, welche eine Umgebung $V_0 \ni p_0$ auf den Kreis $|z| \leq 1$ so abbildet, daß $u(T^{-1}(z))$ harmonisch ist in $|z| < 1$. Ist $u(p)$ der Realteil einer inneren Transformation im Sinne Stoilows und bezeichnet $w(p) = u(p) + i v(p)$ die innere Transformation, so heißt $v(p)$ die pseudokonjugierte Funktion zu $u(p)$. Verf. gibt als notwendige und hinreichende Bedingung für die Pseudokonjugiertheit einer Funktion $v(p)$ bezüglich einer pseudoharmonischen Funktion $u(p)$ an, daß sich $v(p)$ stetig und vollständig monoton auf allen einfachen Kurvenbögen verhalten muß, auf denen $u(p)$ konstant bleibt. Verallgemeinerungen dieses Theorems beschließen die Arbeit, die schon früher in der Rumänischen Zeitschrift „Acad. Republ. popul. Române, Bul. ști. Secț. Ști. mat. fiz.“ 7, 565—581 (1955), erschienen ist.

H. P. Künzi.

Behnke, Heinrich: Funktionentheorie auf komplexen Mannigfaltigkeiten. Proc. internat. Congr. Math. Amsterdam 1954 3, 45—57 (1956).

Rapport sur la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes présenté au Congrès international d'Amsterdam (1954): sur certains points le rapport publié en 1956, résume des travaux parus entre 1954 et 1957, notamment en ce qui concerne les variétés de Stein et les ensembles analytiques, et d'une manière générale les résultats de l'école de Münster. Le lien des travaux récents avec les grands problèmes classiques est heureusement souligné: D'un manière générale ce rapport précis met l'accent plus volontiers sur les méthodes propres de la Théorie des fonctions, ses problèmes internes, que sur les contacts survenus récemment avec d'autres parties de la science (géométrie, théorie des faisceaux, théorie du potentiel). contacts qui ont pris ces dernières années une influence toujours croissante.

P. Lelong.

Grauert, Hans: Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die vollständige Kählersche Metrik. Math. Ann. 131, 38—75 (1956).

Die vorliegende Arbeit enthält die detaillierten Beweise der vom Verf. früher bereits angekündigten Sätze über Kählersche Metriken und Holomorphiegebiete (dies. Zbl. 56, 78). Zunächst werden grundlegende Tatsachen zusammengestellt und mit Hilfe der Cartanschen Idealtheorie bewiesen, daß in einer n -dimensionalen Steinschen Mannigfaltigkeit X jede analytische Menge global als das simultane Nullstellengebilde von höchstens $n + 1$ in X holomorphen Funktionen beschrieben werden kann. Im 2. und 3. Paragraphen werden dann Kählersche Metriken betrachtet. Ist $\tau: X \rightarrow 'X$ eine holomorphe Abbildung und ist $'A$ eine Kählersche Metrik in $'X$, so wird durch $A = 'A \circ \tau$ in X eine positiv-semidefinite Kählersche Metrik A definiert, derart, daß τ bzgl. $A, 'A$ punktal isometrisch ist; besitzt $'A$ in $'X$ das Potential $'R$, so ist $R = 'R \circ \tau$ ein Potential von A in X . Aus der Existenz von hinreichend vielen nichtkonstanten holomorphen Funktionen auf einer Steinschen Mannigfaltigkeit X wird gefolgert, daß es in jeder solchen Mannigfaltigkeit eine positiv definite Kählersche Metrik mit einem globalen Potential gibt. Darüber hinaus zeigt der Verf. (Satz 7), daß sogar vollständige Kählersche Metriken mit globalem Potential auf X existieren; dabei heißt eine Metrik d in einem topologischen Raum R vollständig, wenn es einen Punkt $r^* \in R$ gibt, so daß für jede Folge $r_\nu \in R$, die sich in R nirgends häuft, $d(r^*, r_\nu)$ unbeschränkt ist. Als Hauptsatz A des § 3 folgt dann: Jede komplexe Mannigfaltigkeit, die aus einer Steinschen Mannigfaltigkeit durch Herausheben einer analytischen Menge entsteht, besitzt eine vollständige Kählersche Metrik. Das Problem, welchen Einschränkungen umgekehrt komplexe Mannigfaltigkeiten unterliegen, die eine vollständige Kählersche Metrik

tragen, wird in den restlichen Paragraphen untersucht. Zunächst wird bewiesen (Satz B): Ein n -dimensionales Reinhardt'sches Gebiet G trägt genau dann eine vollständige (reell-analytische) Kählersche Metrik, wenn G durch Herausnehmen von Koordinatenachsen der Dimension $k \leq n - 2$ aus einem holomorph-konvexen Reinhardt'schen Gebiet erzeugt werden kann. Der vorstehende Satz wird auf Hartogssche Gebiete ausgedehnt und dann benutzt, um den folgenden Hauptsatz herzuleiten (Satz C): Jedes unverzweigte Gebiet G über dem C^n mit reell-analytischem Rand, das eine vollständige Kählersche Metrik tragen kann, ist ein holomorph-konvexes Holomorphiegebiet. Der Beweis verwendet entscheidend die Okasche Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die Plurisubharmonizität von $-\ln d_G$ (d_G = euklidische Distanzfunktion). Zum Beweise von Satz C beweist Verf. weiter einen Kontinuitätssatz, dem alle Gebiete G des C^n mit vollständiger Kählerscher Metrik genügen müssen. Aus diesem Kontinuitätssatz ergibt sich überdies (Satz 14): In einer Kählermannigfaltigkeit sind alle analytischen Mengen Minimalflächengebilde. Sind umgekehrt in einem Gebiet G des C^n mit Hermite'scher Metrik A alle eindimensionalen analytischen Mengen Minimalflächengebilde, so ist A eine Kählersche Metrik.

R. Remmert.

Grauert, Hans und Reinhold Remmert: Konvexität in der komplexen Analysis. Nicht-holomorph-konvexe Holomorphiegebiete und Anwendungen auf die Abbildungstheorie. Commentarii math. Helvet. 31, 152—183 (1956).

Un ensemble A de points frontières d'un domaine G est dit mince par les AA. si à tout point $z \in A$ on peut associer un voisinage U_z et une fonction f_z holomorphe dans $U_z \cap G$, ($f \not\equiv 0$), de manière que si z' appartient à $A \cap U_z$, il existe une suite z'_n convergeant vers z' , avec $z'_n \in U_z \cap G$, $f(z'_n) \rightarrow 0$. Un point z frontière de G est dit non essentiel si il existe un ensemble analytique défini dans un voisinage U_z et contenant les points frontières de G qui se trouvent dans U_z . Les AA. montrent qu'un domaine de C^n qui est pseudo-convexe en ses points frontières, sauf, éventuellement, aux points d'un ensemble mince de points essentiels est un domaine d'holomorphie. Cet énoncé subsiste pour les domaines de Riemann au dessus de C^n qui n'ont pas de ramifications intérieures. Par contre, reprenant l'étude d'un exemple déjà traité (ce Zbl. 64, 81), les AA. considèrent l'ensemble analytique X^{k+1} :

$$z_1/w_1 = z_2/w_2 = \dots = z_k/w_k = s$$

défini dans $C^{2k}(z_j, w_j)$ et l'espace analytique correspondant; seul le point correspondant à l'origine de C^{2k} n'est pas uniformisable. La partie obtenue pour $|s| < d < 1$ soit G , possède une projection φ sur un sous-espace C^{k+1} de C^{2k} ; le domaine de Riemann Γ constitué par G muni de φ est un domaine (non univalent) d'holomorphie, pseudo-convexe sauf au point r_0 projeté à l'origine; il n'est pas pseudo-convexe en r_0 . Pour $n \geq 3$, il existe donc des domaines d'holomorphie ramifiés, à un nombre fini de feuilletés, qui ne sont ni pseudo-convexes, ni holomorphiquement convexes.

P. Lelong.

Sakaguchi, Kōichi: On Bloch's theorem for several complex variables. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A 5, 149—154 (1956).

Verf. gibt einen neuen Beweis für die von S. Takahashi gewonnene Übertragung des Satzes von Bloch auf mehrere komplexe Veränderliche (dies. Zbl. 44, 308).

F. Sommer.

Kaizuka, Tetsu: Note on the theorem of Landau. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A 5, 155—157 (1956).

F. Bureau hat den Satz von Landau auf zwei komplexe Veränderliche übertragen (dies. Zbl. 8, 76). Verf. gibt einen neuen einfachen Beweis dieser Übertragung an.

F. Sommer.

Modulfunktionen. Automorphe Funktionen. Fastperiodische Funktionen:

Gunning, R. C.: The structure of factors of automorphy. Amer. J. Math. 78, 357—382 (1956).

D sei eine einfach zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension n und Γ eine Gruppe von holomorphen Automorphismen von D mit (in geänderter aber äquivalenter Formulierung) folgenden Eigenschaften: (1) D besitzt eine unter Γ invariante Kählermetrik, (2) Γ ist diskontinuierlich auf D , (3) der Quotientenraum D/Γ ist kompakt. Verf. untersucht die sogenannten automorphen Faktoren von Γ , d. h. auf $\Gamma \times D$ definierte Funktionen $v_T(z)$, $T \in \Gamma$, $z \in D$, die in D holomorph und von Null verschieden sind und der Gleichung $v_{ST}(z) = v_S(Tz) v_T(z)$ für alle $z \in D$ und $S, T \in \Gamma$ genügen. Eine auf $\Gamma \times D$ definierte Funktion $\sigma_T(z)$ heißt entsprechend ein automorpher Summand, wenn $\sigma_{ST}(z) = \sigma_S(Tz) + \sigma_T(z)$. Es wird bewiesen, daß zu jedem automorphen Summanden σ von Γ ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $T \rightarrow a_T$ von Γ in die additive Gruppe der reellen Zahlen existiert, zu dem es eine holomorphe Funktion $f(z)$ auf D gibt mit $f(Tz) = f(z) + \sigma_T(z) + 2\pi i a_T$. Ist $M(D)$ die multiplikative Gruppe der holomorphen nicht verschwindenden Funktionen auf D , dann kann Γ in natürlicher Weise als Gruppe von Operatoren von $M(D)$ aufgefaßt werden. Ein automorpher Faktor ist dann ein 1-Cozykel von Γ mit Koeffizienten in $M(D)$. Zwei automorphe Faktoren ν und ν' heißen cohomolog, wenn es $h \in M(D)$ mit $\nu_T(z) = [h(Tz)/h(z)] \nu'_T(z)$ gibt. Ein Homomorphismus $T \rightarrow c_T$ von Γ in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrage 1 heißt ein Charakter von Γ ; ν und ν' werden äquivalent genannt, wenn ein Charakter $c = \{c_T\}$ existiert, für den ν und $c \cdot \nu'$ cohomolog sind. Vermöge einer geeigneten Homomorphismengruppe wird die Charakterklasse eines automorphen Faktors definiert und gezeigt, daß zwei solche Faktoren dann und nur dann äquivalent sind, wenn sie die gleiche Charakterklasse definieren. Damit ist eine Klassifikation der automorphen Faktoren geleistet, die vom Verfasser (insbesondere für fixpunktfreie Gruppen Γ) weiter untersucht wird.

M. Koecher.

Myrberg, P. J.: Über automorphe Funktionen. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 118—126 (1956).

Mit Hilfe Poincaréscher Reihen und ihrer Verallgemeinerungen kann man für diskontinuierliche Gruppen die Existenz automorpher Funktionen nachweisen. Sie tatsächlich auf diese Weise zu bilden ist aber sehr schwer, weil der Zusammenhang zwischen den Reihen und den vorgegebenen Nullstellen und Polen sehr kompliziert ist, im Gegensatz zu den einfachen Verhältnissen bei den elliptischen Funktionen. Um ähnlich einfach auch im allgemeinen Fall vorgehen zu können, bestimmt Verf. alle ganzen Funktionen $g(z)$ — er nennt sie automorphe Thetafunktionen — die für jede Substitution S einer gegebenen Fuchschen Gruppe einer Gleichung $g(Sz) = \exp(\lambda u(z) + \eta) \cdot g(z)$ genügen, wo $u(z)$ eine ganze Funktion ist und λ und η von S abhängige Konstanten sind. Es gibt unter diesen Funktionen $g(z)$ eine, die an einer vorgegebenen Stelle und nur dort verschwindet. Mit ihrer Hilfe kann man dann multiplikativ jede automorphe Funktion bilden, deren Nullstellen und Pole gegeben sind. Für dieses $g(z)$ ergibt sich ein Ausdruck, der je eine Poincarésche Theta- und Zetafunktion enthält. In sehr allgemeinen Fällen können aber auch diese Reihen vermieden werden.

G. Lochs.

Bellman, Richard: On a class of functional equations of modular type. Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 626—629 (1956).

Es sei

$$(1) \quad V_a(x, y) = \int_0^\infty e^{-\pi x^2 s - \pi y^2 s^{-1}} s^{-a} ds$$

und

$$f(x, y; u, v; t_1, t_2) = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} V_a((x+m)\sqrt{t_1}, (y+n)\sqrt{t_2}) e^{2\pi i(mu+nv)}$$

($t_1, t_2 > 0$). Mit Hilfe von (1) wird f als Integral über ein Produkt zweier gewöhnlicher Thetareihen dargestellt. Wendet man auf diese die bekannte Transformationsformel an, so ergibt sich

$$f(x, y; u, v; t_1, t_2) = e^{-2\pi i(xu+yv)} (t_1 t_2)^{-1/2} f(v, u; -y, -x; t_2^{-1}, t_1^{-1}).$$

Speziell für $a = 1$, $x = y = u = v = \frac{1}{2}$, $t_1 t_2 = t^2$ erhält man eine Funktion mit Funktionalgleichung vom Modultypus:

$$(2) \quad \sum_{R=1}^{\infty} V_1\left(\frac{Rt}{4}\right) a(R) = -\frac{1}{t} \sum_{R=1}^{\infty} V_1\left(\frac{R}{4t}\right) a(R),$$

wobei $a(R) = \sum_{|(1+2m)(1+2n)|=R} (-1)^{m+n}$, $V_a(|xy|) = x^{2-2a} V_a(x, y)$. Verallgemeinerungen von (2) ergeben sich, wie kurz angedeutet wird, wenn man an Stelle von $V_a(x, y)$ verallgemeinerte Voronoische Funktionen verwendet oder analoge Bildungen über Zahlkörpern oder Matrizenbereichen vornimmt.

H. Maaß.

Pjateckij-Šapiro (Piatetsky-Shapiro), I. I.: Classification of modular groups. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 19—22 (1956) [Russisch].

Verf. setzt seinen letzten Ergebnisbericht (dies. Zbl. 72, 85) über seine Untersuchungen über singuläre Modulgruppen fort. Bei etwas allgemeinerer Formulierung seines Ausgangspunktes (die Algebra \mathfrak{A} wird abstrakt vorgegeben unter der Bedingung, daß sie isomorph zu einer Multiplikatorenalgebra Riemannscher Matrizen ist) klassifiziert er die entsprechenden Modulgruppen nach den möglichen Typen der auftretenden Algebren. Wie in seiner Arbeit über singuläre Modulfunktionen gibt er jeweils die Zurückführung auf eine Gruppe simultaner linear gebrochener Transformationen.

K.-B. Gundlach.

Herrmann, Oskar: Über den Rang der Schar der Spitzenformen zu Hilbertschen Modulgruppen. Math. Z. 64, 457—466 (1956).

Die schon von Gundlach (dies. Zbl. 57, 35) angegebenen Abschätzungen für die Fourierkoeffizienten einer Spitzenform zur gewöhnlichen Hilbertschen Modulgruppe werden hier für den Fall eines reell-quadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{d})$ mit der Diskriminante d numerisch behandelt. Es wird gezeigt, daß von Null verschiedene Spitzenformen ganzer Dimension $-k$ (≤ -3) existieren, falls $k > 9$ oder $d > 109$ vorausgesetzt wird. Der Rang $r(d, -k)$ der linearen Schar der Spitzenformen zur Dimension $-k$ (≤ -3) genügt der Ungleichung

$$r(d, -k) \geq \frac{k \sqrt{d}}{2\pi e \varphi(k)} - 1 \quad \text{mit} \quad \varphi(k) = \sqrt[2k-1]{\frac{2\pi^4 e}{9} \sqrt{k+1}},$$

wobei endlich viele Paare $(d, -k)$ auszunehmen sind.

H. Maaß.

Koecher, Max: Zur Operatorentheorie der Modulformen n -ten Grades. Math. Ann. 130, 351—385 (1956).

Verf. überträgt die von Hecke für Modulformen einer Variablen entwickelte klassische Operatorentheorie, die weitreichende Anwendungen hat, auf Modulformen n -ten Grades. Die Arbeit zeigt zunächst, wie man, von der komplexen Multiplikation Abelscher Funktionen ausgehend, zu dem Ansatz für den Definitionsbereich und Wertevorrat der Operatoren gelangt. Danach wird die Struktur des erhaltenen Operatorenringes studiert. — Bereits früher (M. Sugawara, dies. Zbl. 19, 200, 210; H. Maaß, dies. Zbl. 44, 309) wurden verallgemeinerte Hecke-Operatoren für Modulformen n -ten Grades (C. L. Siegel, dies. Zbl. 21, 203) betrachtet. Dabei wurde verlangt, daß die Operatoren, die ein Spezialfall der vorliegenden Koecher-Operatoren sind, die Schar der Siegelschen Modulformen in sich überführen. Für sie

konnten jedoch nur sehr wenige Gesetze abgeleitet werden, was auf Grund der Koecherschen Resultate verständlich wird. — Es sei \mathfrak{H} eine ganzzahlige, n -reihige nicht ausgearbeitete Matrix und \mathfrak{E} die n -reihige Einheitsmatrix. Man bezeichne

$$\mathfrak{H}^A = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{H} \\ -\mathfrak{H}' & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{H}^B = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & 0 \\ 0 & \mathfrak{H} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{H}^S = \begin{pmatrix} \mathfrak{H} & 0 \\ 0 & \mathfrak{H}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{V} = \mathfrak{E}^A = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{E} \\ -\mathfrak{E} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Gruppe der $2n$ -reihigen ganzzahligen Matrizen \mathfrak{M} , welche $\mathfrak{M}' \mathfrak{H}^A \mathfrak{M} = \mathfrak{H}^A$ erfüllen, werde mit $M_0(\mathfrak{H})$ bezeichnet. Mit $M(\mathfrak{H})$ wird die mit \mathfrak{H}^B transformierte Gruppe bezeichnet, $M(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}^B M_0(\mathfrak{H}) \mathfrak{H}^{B-1}$. $M(\mathfrak{H})$ ist Kongruenzgruppe. Die Modulformen zur Gruppe $M(\mathfrak{H})$ und zur ganzrationalen, negativen Dimension k bilden eine lineare Schar $\{M(\mathfrak{H}), k\}$ endlichen Ranges (Koecher, dies. Zbl. 64, 328). Die Koecherschen Operatoren bilden nun eine gewisse Schar $\{M(\mathfrak{H}_1), k\}$ in eine gewisse Schar $\{M(\mathfrak{H}_2), k\}$ ab. Dies wird in der Bezeichnung der Operatoren dadurch angedeutet, daß \mathfrak{H}_1 als erstes, \mathfrak{H}_2 als zweites Argument genommen wird. Genauer sei $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{R}$ n -reihige Diagonalmatrizen mit ganzen, positiven Diagonalelementen. Bei \mathfrak{U} und \mathfrak{H} sei ferner das j -te Diagonalelement Teiler des $j+1$ -ten. Spaltet man eine

beliebige $2n$ -reihige Matrix \mathfrak{A} in n -reihige Kästchen $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 \\ \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \end{pmatrix}$ auf, so ist es in der Theorie der Modulformen üblich für Funktionen $f(\mathfrak{Z})$ einer n -reihigen Matrix \mathfrak{Z} (sofern die rechte Seite sinnvoll ist) zu setzen $f(\mathfrak{Z}) | \mathfrak{A} = |\mathfrak{A}_3 \mathfrak{Z} + \mathfrak{A}_4|^{-k} f((\mathfrak{A}_1 \mathfrak{Z} + \mathfrak{A}_2) |$

$(\mathfrak{A}_3 \mathfrak{Z} + \mathfrak{A}_4)^{-1})$. Die Operatoren V, V^*, T, T^* werden dann so definiert: 1) Für jedes $f = f(\mathfrak{Z}) \in \{M(\mathfrak{H}), k\}$ und $g = g(\mathfrak{Z}) \in \{M(\mathfrak{H} \mathfrak{U}^2), k\}$ wird der Operator $V(\mathfrak{H}, \mathfrak{H} \mathfrak{U}^2)$ durch $f | V(\mathfrak{H}, \mathfrak{H} \mathfrak{U}^2) = f | \mathfrak{U}^S$ definiert und $V^*(\mathfrak{H} \mathfrak{U}^2, \mathfrak{H})$ derart, daß $g | V^*(\mathfrak{H} \mathfrak{U}^2, \mathfrak{H})$

in $\{M(\mathfrak{H}), k\}$ liegt und daß $V(\mathfrak{H}, \mathfrak{H} \mathfrak{U}^2) V^*(\mathfrak{H} \mathfrak{U}^2, \mathfrak{H})$ die Identität ist. 2) $A(\mathfrak{H}, \mathfrak{H} \mathfrak{R})$ bezeichne die Menge der Lösungen \mathfrak{A} der Matrixgleichung $\mathfrak{A}' \mathfrak{V} \mathfrak{A} = \mathfrak{V}$, für die $\mathfrak{H}^B \mathfrak{A} \mathfrak{H}^{B-1}$ ganzzahlig ist. Für $f \in \{M(\mathfrak{H}), k\}$ und $g \in \{M(\mathfrak{H} \mathfrak{R}), k\}$ werden die Operatoren T und T^* definiert durch

$$f | T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H} \mathfrak{R}) = |\mathfrak{R}|^{-1/2} \sum_{\mathfrak{A}} f | \mathfrak{A}, \quad g | T^*(\mathfrak{H} \mathfrak{R}, \mathfrak{H}) = |\mathfrak{R}|^{-1/2} \sum_{\mathfrak{B}} g | \mathfrak{B}^{-1}$$

Hierbei durchläuft \mathfrak{A} (bzw. \mathfrak{B}) alle diejenigen Matrizen aus $A(\mathfrak{H}, \mathfrak{H} \mathfrak{R})$, die sich nicht nur um einen linken (bzw. rechten) Faktor aus $M(\mathfrak{H})$ (bzw. $M(\mathfrak{H} \mathfrak{R})$) unterscheiden. Beide Summen sind endlich. — Wichtigste Ergebnisse: Verf. beweist im Fall $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2$, $(|\mathfrak{R}_1|, |\mathfrak{R}_2|) = 1$ die Rechengesetze $T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H} \mathfrak{R}_1) T(\mathfrak{H} \mathfrak{R}_1, \mathfrak{H} \mathfrak{R}_0) = T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H} \mathfrak{R}_0)$, $T^*(\mathfrak{H} \mathfrak{R}_0, \mathfrak{H} \mathfrak{R}_1) T^*(\mathfrak{H} \mathfrak{R}_1, \mathfrak{H}) = T^*(\mathfrak{H} \mathfrak{R}_0, \mathfrak{H})$, $T^*(\mathfrak{H} \mathfrak{R}_1, \mathfrak{H}) T(\mathfrak{H}, \mathfrak{H} \mathfrak{R}_2) = T(\mathfrak{H} \mathfrak{R}_1, \mathfrak{H} \mathfrak{R}_0) T^*(\mathfrak{H} \mathfrak{R}_0, \mathfrak{H} \mathfrak{R}_2)$ und eine „Vertauschbarkeit“ für die Operatoren T, V bzw. T^*, V (genommen mit geeigneten Argumenten). Es zeigt sich ferner, daß nach Einführung des Skalarproduktes (f, g) (Koecher, loc. cit.) die Operatoren V und V^* bzw. T und T^* zueinander adjungiert und beschränkt sind. — Eine zusammenfassende Schreibweise erweist sich als zweckmäßig: F_n sei das direkte Produkt aller $\{M(\mathfrak{H}), k\}$ bei festem k . Aus den bisher definierten Operatoren mit zwei Argumenten bildet man in natürlicher Weise Operatoren $V(\mathfrak{U}), V^*(\mathfrak{U}), T(\mathfrak{U}), T^*(\mathfrak{U})$ die F_n auf sich abbilden. Für $(|\mathfrak{U}_1|, |\mathfrak{U}_2|) = 1$ hat man dann die Regeln: $V(\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2) = V(\mathfrak{U}_1) V(\mathfrak{U}_2)$, $V^*(\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2) = V^*(\mathfrak{U}_1) V^*(\mathfrak{U}_2)$, $V(\mathfrak{U}) V^*(\mathfrak{U}) = 1$, $T(\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2) = T(\mathfrak{U}_1) T(\mathfrak{U}_2)$, $T^*(\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2) = T^*(\mathfrak{U}_1) T^*(\mathfrak{U}_2)$, $T(\mathfrak{U}_1) T^*(\mathfrak{U}_2) = T^*(\mathfrak{U}_2) T(\mathfrak{U}_1)$. — Besonders einfache Resultate, die mit dem klassischen Fall $n=1$ voll übereinstimmen, erhält man für ganze Diagonalmatrizen \mathfrak{U} , bei welchen nur das letzte Diagonalelement von 1 verschieden ist. Verf. beweist dann u. a., daß für solche Matrizen die Operatoren V und T vertauschbar sind und daß die Relation

$$T(\mathfrak{U}_1) T(\mathfrak{U}_2) = \sum_{\mathfrak{D}} T\left(\frac{\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2}{\mathfrak{D}}\right) V(\mathfrak{D})$$

gilt, wobei rechts über alle ganzen \mathfrak{D} zu summieren ist, für die $\mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{U}_2$ ganz sind. Auf einer Teilmenge von F_n , die in natürlicher Weise als Hilbertraum

aufgefaßt werden kann, läßt sich die obige Relation auf die Operatoren T^* , V^* übertragen und die Gültigkeit einer Eulerschen Produktentwicklung nachweisen. Es gilt nämlich für $\operatorname{Re} s > \frac{3}{2}$

$$\sum_{\mathfrak{G}} |\mathfrak{G}|^{-s} T(\mathfrak{G}) = \prod_{\mathfrak{P}} (1 - |\mathfrak{P}|^{-s} T(\mathfrak{P}) + |\mathfrak{P}|^{-2s} V(\mathfrak{P}))^{-1},$$

wenn das Produkt über alle Matrizen $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}$ erstreckt wird, deren Determinante eine Primzahl ist.

H. Braun.

Shiga, Kôji: Bounded representations on a topological vector space and weak almost periodicity. Japanese J. Math. 25, 21—35 (1956).

Sei $G = \{a\}$ eine Gruppe und $L = \{x\}$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Die Topologie kann durch ein System $\{\|x\|_\alpha\}$ von Halbnormen beschrieben werden. Eine Darstellung $(L; T(a))$ von G durch lineare stetige Transformationen von L heißt a) totalbeschränkt (t. b.), wenn $T(G)x$ stets t. b. ist und überdies gleichmäßige Beschränktheit vorliegt: $\sup_{\alpha, \|x\|_\alpha \leq 1, a \in G} \|T(a)x\|_\alpha < \infty$, b) vollständig zer-

legbar (c. d.), wenn L die abgeschlossene lineare Hülle der in L enthaltenen irreduzibel-invarianten endlichdimensionalen Teilräume ist. — Satz 3: Jede t. b. Darstellung ist c. d. Verf. beweist diese Aussage, sowie ihre Äquivalenz zum Hauptsatz für L -wertige fastperiodische Funktionen unter folgender Voraussetzung über die Struktur von L : die abgeschlossene konvexe Hülle einer t. b. Menge in L ist stets kompakt. — Beim Beweis wird interessanterweise der Begriff der Kompositionsreihe [von L bezüglich $T(a)$] verwendet; das ist eine wohlgeordnete Schar L_μ abgeschlossener invarianten Teilräume von L , die von L bis 0 reicht, und deren Faktoren $L_\mu/L_{\mu+1}$ endlichdimensional sowie bezüglich der von $T(a)$ induzierten Darstellung irreduzibel-invariant sind. — Im Dualraum L^* von L stehe eine Menge C^* mit folgenden Eigenschaften zur Verfügung: 1. Ist $x \neq 0$, so gibt es ein f in C^* mit $f(T(a)x) \neq 0$ für passendes a in G . 2. Für jedes f in C^* und x in L ist $\varphi(a) = f(T(a)x)$ fastperiodisch. Dann sind folgende Aussagen gleichbedeutend: Satz 1. Zu jedem $x \neq 0$ in L gibt es eine Kompositionsreihe L_μ mit $x \notin L_1$. Satz 2. L^* enthält einen $T(G)$ -invarianten Teilraum L_0^* , welcher L separiert und c. d. ist. Verf. gibt einen direkten Beweis für Satz 1; dabei wird der Hauptsatz für die gewöhnlichen fastperiodischen Funktionen als Aussage über stetige Funktionen auf kompakten Gruppen benützt. Satz 3 wird durch Anwendung von Satz 2 auf den mit der Mackeyschen Topologie versehenen Raum L^* bewiesen. L wird dann nämlich der Dualraum von L^* . K. Jacobs.

Eberlein, W. F.: The point spectrum of weakly almost periodic functions. Michigan math. J. 3, 137—139 (1956).

Verf. beweist (Satz 1): Jede schwach-fastperiodische Funktion $x(t)$ auf einer lokalkompakten abelschen Gruppe G besitzt genau eine Zerlegung $x = x_1 + x_2$, x_1 fastperiodisch, $M_t(|x_2(t)|^2) = 0$. Damit wird ein seit einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 34, 64) offenstehendes Problem gelöst; vgl. hierzu W. Maak, (dies. Zbl. 46, 311). Dort finden sich auch die genauen Definitionen des Begriffs „schwach-fastperiodisch“ und des Mittelwertes M_t . Die fastperiodische Komponente x_1 von x wird folgendermaßen gewonnen: Man bestimmt eine Moore-Smith-Folge (x_α) von fastperiodischen $x_\alpha \geq 0$ mit $M_t(x_\alpha) = 1$ so, daß für jedes fastperiodische y die gefalteten Funktionen $x_\alpha * y$ gleichmäßig gegen y gehen; dann ist $\lim_{\alpha} x_\alpha * x = x_1$ (schwach);

die $x_\alpha * x$ sind fastperiodisch; nach dem Satz von Mazur kann man also x_1 gleichmäßig durch fastperiodische Funktionen approximieren: x_1 ist fastperiodisch. Die Fourierreihen von x und x_1 stimmen überein. — Verf. beweist ferner (Satz 2): Ein Charakter $x(t)$ von G tritt in der Fourierreihe von x dann und nur dann wirklich auf, wenn man ihn gleichmäßig auf G durch Linearkombinationen von Vershobenen von x approximieren kann.

K. Jacobs.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Wintner, Aurel: On the expansion of solutions of ordinary differential equations according to powers of the initial constants or of parameters. *Rivista Mat. Univ. Parma* 7, 271—282 (1956).

Es handelt sich um die Differentialgleichung $dx/dt = f(x, \mu, t)$ mit einem Parameter μ . Dabei wird $f(x, \mu, t)$ für $|x| < 1$, $|\mu| < 1$, $0 \leq t \leq a$ als stetig vorausgesetzt und in bezug auf x und μ sogar als regulär: $f(x, \mu, t) = \sum f_{ij}(t) x^i \mu^j$ mit $f_{00}(t) = 0$; außerdem sei $|f(x, \mu, t)| < 1$. Die Gleichung soll für $|\mu| < 1$, $0 \leq t \leq a$ durch eine Reihe $x = \sum \varphi_k(t) \mu^k$ mit $\varphi_0(t) = 0$ integriert werden. Die Koeffizienten $\varphi_k(t)$ erhält man durch Einsetzen sukzessive, und es handelt sich um die Konvergenz. Wegen $|f(x, \mu, t)| < 1$ ist nach Cauchy $|f_{ij}(t)| \leq 1$, und es liegt nahe, die Majorante $dx/dt = \sum 1 \cdot x^i \mu^j = (1 - x)^{-1} (1 - \mu)^{-1} - 1$ zu benutzen. Das hat Poincaré getan, aber erst der Referent konnte den dazugehörigen genauen Konvergenzradius für μ ermitteln (dies. Zbl. 14, 305); er ist gleich $\sum (n!)^{-1} n^{n-1} (a + 1)^{n-1} e^{-n(a+1)}$ ($n \geq 1$). Der Verf. bemerkt nun, daß dieser Radius für alle Differentialgleichungen gilt, bei denen $|f_{ij}(t)| \leq 1$ ist. Da sind natürlich alle mit $|f(x, \mu, t)| < 1$ dabei, aber noch viele andere. Wenn man sich nur für die engere Klasse mit $|f(x, \mu, t)| < 1$ interessiert, so ist zu hoffen, daß man dafür einen günstigeren Radius angeben kann. In der Tat gelingt es dem Verf. einen solchen zu finden, der zunächst ziemlich kompliziert ist, dann aber nach geeigneten Abschätzungen erkennen läßt, daß er für $a \geq \log 2$ mindestens gleich $(e^a - 1)^{-1}$ und für $a \leq \log 2$ mindestens gleich 1 ist.

O. Perron.

Dennis, S. C. R.: The determination of eigenfunctions of the Sturm-Liouville equation. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 9, 371—383 (1956).

Es wird (1) $y''(x) + [q(x) + \lambda r(x)] y(x) = 0$ ($0 \leq x \leq l$) mit (2) $y'(0) = h_1 y(0)$, $y'(l) = h_2 y(l)$ betrachtet. $y(x)$ wird als Reihe nach den (trigonometrischen) Lösungen von $y''(x) + \alpha^2 y(x) = 0$ mit (2) angesetzt und so (1), (2) in ein unendliches lineares Gleichungssystem umgeschrieben. Dies kommt natürlich im wesentlichen auf die entsprechende Anwendung des Rayleigh-Ritzschen Verfahrens hinaus. Nach Diskussion spezieller Randbedingungen werden numerische Resultate für zwei Beispiele gegeben.

F. W. Schäfke.

Lidskij (Lidskiĭ), V. B.: On the completeness of the eigen- and associated functions of a non self-adjoint differential operator. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 110, 172—175 (1956) [Russisch].

Let $q(x)$ be real, $r(x)$ possibly complex, both being bounded and summable in any finite interval, and as $|x| \rightarrow \infty$ let $q(x) \rightarrow \infty$, $r(x)/q(x) \rightarrow 0$. Then the eigenfunctions of $(1 - y'' + q(x) y = \lambda y)$ are complete in $L^2(-\infty, \infty)$, and it is a question of whether the same is true of $-y'' + \{q(x) + r(x)\} y = \lambda y$, where here the „associated functions“ must be included in the event of the resolvent having multiple poles (M. V. Keldyš, this Zbl. 45, 394). The author establishes as sufficient the additional condition that $\lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x) |x|^{-\alpha} \geq c > 0$ for some $\alpha > 0$; he does not impose restrictions on the eigen-values of (1) (cf. M. A. Najmark, this Zbl. 56, 343, and J. Schwartz, this Zbl. 56, 349). The proof depends on the complete continuity of the operators $\sqrt{r} A^{-1/2}$, $A^{-1/2} \sqrt{r}$, where $A^{1/2}$ is the positive-definite root of A defined by $A y = -y'' + q(x) y$, taking it that $q(x) \geq 1$. Appeal is made to a result for Hilbert space of Keldyš (loc. cit.).

F. V. Atkinson.

Orlov, S. A.: On the theory of the resolvent of a one-dimensional regular boundary problem. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 111, 538—541 (1956) [Russisch].

L'A. reprend ses études sur les solutions aux limites d'équations différentielles ordinaires du type de Fuchs d'une forme spéciale qu'il écrit symboliquement de la

manière suivante (1) $ly - \lambda y = 0$ (v. ce Zbl. 53, 58). On suppose que $\Phi(x, \lambda) \equiv (\varphi_1(x, \lambda), \dots, \varphi_{2n}(x, \lambda))$ soit un vecteur-fonction, dont les coordonnées $\varphi_k(x, \lambda)$ ($k = 1, 2, \dots, 2n$) représentent les solutions de l'équation (1) vérifiant les conditions initiales $\eta(\varphi_1, 0) = (1, 0, \dots, 0)$, $\eta(\varphi_2, 0) = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\eta(\varphi_{2n}, 0) = (0, 0, \dots, 0, 1)$. L'A. résume en cinq théorèmes les relations entre les éléments de sa théorie des „indices de défaut“ concernant les solutions limites de l'équation linéaire différentielle ordinaire étudiée.

N. Saltykow.

Orlov, S. A.: The structure of resolvents and spectral functions of unidimensional linear selfadjointed singular differential operators of order $2n$. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 1175—1177 (1956) [Russisch].

L'A. revient sur sa théorie des „indices de défaut“ d'équations linéaires différentielles ordinaires de la forme symbolique $ly - \lambda y = 0$ qu'il avait étudié dans ses travaux antérieurs (v. ce Zbl. 53, 58 et le rapport précédent). Sept nouveaux théorèmes sont actuellement donnés. Leurs rapports sont discutés avec les anciennes recherches de l'A., ainsi qu'avec celles d'autres auteurs: M. G. Krejn (ce Zbl. 39, 102), I. M. Glazman (ce Zbl. 41, 231) et K. Kodaira (ce Zbl. 54, 39).

N. Saltykow.

Gambill, Robert A.: A fundamental system of real solutions for linear differential systems with periodic coefficients. Rivista Mat. Univ. Parma 7, 311—319 (1956).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 58, 314) hat Verf. eine hinreichende Bedingung für die Stabilität der Lösungen des Systems $\ddot{y}_j + \sigma_j^2 y_j + \lambda \sum_{h=1}^n \varphi_{jh}(t) y_h = 0$ gegeben. In der vorliegenden Arbeit werden explizite Darstellungen für die Lösungen in Potenzreihen nach Potenzen von λ bis zur dritten Potenz gegeben, die im allgemeinen recht umfangreich sind.

W. Haacke.

Fogagnolo-Massaglia, Bruna: Sulle vibrazioni quasi-armoniche di un sistema dissipativo con elasticità costante a tratti. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 7 (1953/54), 167—181 (1956).

In (1) $\ddot{q} + 2c\dot{q} + \omega^2(t)q = 0$ sei $\omega(t) = \omega(t + T)$ und $\omega = m$ für $0 < t < \frac{T}{2}$, $\omega = M$ für $\frac{T}{2} < t < T$. Verf. bestimmt eine Konstante c^* und eine Funktion $T^*(c)$ derart, daß für $c \leq c^*$ und für $T^*(c) \leq T(c)$ alle Lösungen von (1) gegen Null für $t \rightarrow \infty$ streben.

W. Haacke.

Erdélyi, A.: Asymptotic solutions of differential equations with transition points. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 92—101 (1956).

This is a survey of the contributions of Jeffreys, Langer, Cherry, Tricomi, Bohnenblust, and the author and his students to the problem of obtaining first and higher approximations to solutions of second order ordinary differential equations with transition (turning) points. Brief mention is made of the work of Meksyn and Wasow concerning equations of the fourth order.

H. A. Antosiewicz.

Langer, Rudolph E.: The solutions of a class of ordinary linear differential equations of the third order in a region containing a multiple turning point. Duke math. J. 23, 93—110 (1956).

L'A., proseguendo le sue precedenti ricerche sulla rappresentazione asintotica degli integrali dell'equazione

$$(1) \quad v''' + \lambda^2 z v' + 3\mu \lambda^2 v = 0,$$

studia ora l'equazione

$$(2) \quad u''' + \lambda^2 p(z, \lambda) u' + \lambda^2 q(z, \lambda) u = 0,$$

con

$$(3) \quad p(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z) \lambda^{-n}, \quad (4) \quad q(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z) \lambda^{-n},$$

nelle ipotesi che $p_n(z)$ e $q_n(z)$ siano funzioni olomorfe in un intorno di $z = 0$, $p_0(0) = 0$, $p'_0(0) = 1$, $\int_0^z p_0^{1/2}(z) dz \neq 0$ per $z \neq 0$, e le serie (3) e (4) siano convergenti per $|\lambda| \geq H$, (H costante). In ogni regione

$$(h - \frac{3}{2})\pi + \varepsilon \leq \arg \xi \leq (h + \frac{1}{2})\pi - \varepsilon, \quad \xi = \frac{1}{2} i \lambda \int_0^z p_0^{1/2}(z) dz,$$

ε positivo arbitrario, h intero positivo, l'A. costruisce le espressioni asintotiche di tre integrali indipendenti dell'equazione (2) $u_{h,0}(z)$, $u_{h,1}(z)$, $u_{h,2}(z)$ e delle loro derivate. Queste formule si conseguono associando all'equazione (2) un'equazione del tipo (1). G. Sansone.

Urabe, Minoru and Yasutaka Sibuya: On center of higher dimensions. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 19, 87—100 (1955).

Le point d'équilibre O du système différentiel $dx_\nu/dt = \xi_\nu(x)$ ($\nu = 1, \dots, n$) est dit centre si toute courbe solution passant par un point assez voisin de O est fermée. On suppose que les ξ_ν sont holomorphes en O et que la matrice formée des coefficients des termes du premier degré dans ξ_ν ne se réduit pas à la matrice nulle. Si l'on suppose de plus que la période de la solution ne dépasse pas un certain nombre fini, une transformation régulière amène le système donné au système

$$dy_{2j-1}/dt = -2m_j\pi y_{2j}/\omega(y), \quad dy_{2j}/dt = 2m_j\pi y_{2j-1}/\omega(y) \quad (j = 1, \dots, m), \\ dy_k/dt = 0 \quad (k = 2m + 1, \dots, n),$$

où $\omega(y)$ est holomorphe en O .

M. Hukuhara.

Sibuya, Yasutaka: Remarques sur la théorie des centres aux dimensions supérieures. J. math. Soc. Japan 8, 1—6 (1956).

L'A. traite d'abord le cas exclu dans le mémoire analysé ci-dessus c'est-à-dire le cas où la matrice formée des coefficients des termes du premier degré dans ξ_ν se réduit à la matrice nulle. Alors, si toute solution admet une période ne dépassant pas un nombre fini, les ξ_ν s'annulent identiquement. Ensuite, au lieu de supposer que l'origine est un centre, on suppose l'existence d'une série formelle

$$\omega \approx \omega_0 + \sum \omega_{p_1 \dots p_n} a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n},$$

qui satisfait formellement aux relations $\varphi_\nu(\omega, a) = a_\nu$ ($\nu = 1, \dots, n$), où $x_\nu = \varphi_\nu(t, a)$ représentent la solution telle que $x_\nu(0) = a_\nu$. Dans cette hypothèse, la série formelle converge et l'origine est un centre. M. Hukuhara.

Sibuya, Yasutaka: Sur les solutions bornées d'un système des équations différentielles ordinaires non linéaires à coefficients périodiques. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I 7, 333—341 (1956).

On suppose que les seconds membres du système différentiel $dx_j/dt = f_j(x_1, \dots, x_n, t)$ ($j = 1, \dots, n$) sont holomorphes en O par rapport à x_1, \dots, x_n , s'annulent en O et admettent une période ω par rapport à t . S'il existe une solution $x_j = \varphi_j(t, \eta_1, \dots, \eta_\varrho)$ ($j = 1, \dots, n$) qui s'annule pour $\eta_1 = \dots = \eta_\varrho = 0$ et reste bornée pour $|\eta_\nu| < \delta$, ($\nu = 1, \dots, \varrho$) et $0 \leq t < +\infty$, cette solution converge uniformément vers une solution presque périodique pour $t \rightarrow +\infty$. Si l'on suppose que la solution reste bornée dans $-\infty < t < \infty$, elle est nécessairement presque périodique. M. Hukuhara.

Schäffer, Juan Jorge: Analytische Parameterabhängigkeit der fastperiodischen Lösungen von nichtlinearen Differentialgleichungen. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 5, 204—237 (1956).

Hauptresultat der Arbeit ist der folgende Satz: W sei eine abgeschlossene Menge des R^m , W_j ($j = 1, 2, \dots, m$) seien die Projektionen von W auf die Koordinatenachsen, $W_0 = \bigcap_{j=1}^m W_j$. $f(x, y)$ sei eine Funktion von $(x, y) \in R^n \times R^m$ mit Werten aus

R^n , die in einer offenen Menge, die $R^n \times W_0$ enthält, definiert und analytisch ist. $p(t, \lambda)$ gehöre zur Klasse $\Sigma_{m \times 1}(r_1)$, $r_1 > 0$, mit Werten in W . (Für $r > 0$ ist dabei $\Sigma_{\nu \times \mu}(r)$ die Klasse der für $-r \leq \lambda \leq r$ bezüglich t gleichmäßig fastperiodischen (g. f. p.) reellen

Matrizen $A(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \lambda^k$, wo $A_k(t)$ g. f. p. $(\nu \times \mu)$ -Matrizen und $\sum_{k=0}^{\infty} |A_k| r^k < \infty$; $|A_k| = \sup_t \|A_k(t)\|$, $\|(\alpha_{ik})\| = \left(\sum_{i,k} \alpha_{ik}^2\right)^{1/2}$. $x_0(t)$ sei eine g. f. p. Lösung (n -Vektor) von

$$(1) \quad dx/dt + f(x, p(t, \lambda)) = 0 \quad \text{für } \lambda = 0. \quad \text{Die lineare Differentialgleichung}$$

$$d\tau/dt + (\partial/\partial x) f(x_0(t), p(t, 0)) \tau + q(t) = 0$$

($\partial f/\partial x$ bezeichnet die $(n \times n)$ -Funktionalmatrix) besitze für jedes beschränkte $q(t)$ mindestens eine entweder für $t \geq 0$ oder für $t \leq 0$ beschränkte Lösung. Dann existieren ein $r_0 > 0$ und $x(t, \lambda) \in \Sigma_{n \times 1}(r_0)$ so daß $x(t, 0) = x_0(t)$ und $x(t, \lambda)$ für $|\lambda| \leq r_0$ Lösung von (1) ist. Der Beweis erfordert umfangreiche Vorbereitungen. Dazu werden neben den Grundtatsachen der Theorie der g. f. p. Funktionen Ergebnisse der Theorie der asymptotisch fastperiodischen Funktionen von Fréchet und Verschärfungen eines Stabilitätssatzes von Perron herangezogen.

F. W. Schäfke.

Hufford, George: Banach spaces and the perturbation of ordinary differential equations. Ann. Math. Studies 36, 173—195 (1956).

On considère le système (1) $dx/dt = X(x, t, \varepsilon)$, $X(x, t + T, \varepsilon) = X(x, t, \varepsilon)$, $X(x, t, 0) = X_0(x)$. On suppose que le système $dx/dt = X_0(x)$ a une solution périodique $x = u(t)$, $u(t + 1) \equiv u(t)$, telle que le système aux variations correspondant admette un seul nombre caractéristique égal à zéro. Alors pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit il existe une courbe fermée unique C telle que toute solution du système (1) qui part d'un point de cette courbe revient dans un point de la même courbe après le temps T ; ce fait permet de considérer les solutions du système (1) au voisinage de la solution $x = u(t)$ comme des mouvements sur le tore. Pour la démonstration on introduit de nouvelles coordonnées liées à la courbe $x = u(t)$ et une transformation dans l'espace des courbes fermées, organisé comme espace de Banach. L'existence de la courbe C résulte d'un théorème de Kyner (voir ce Zbl. 73, 335).

A. Halanay.

Morimoto, Hiroshi: On the singular perturbation of the linear system with periodic coefficients. Math. Japonicae 4, 95—100 (1956).

Verf. zeigt, daß

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\lambda} f_{i\lambda}(t) x_{\lambda} + \varepsilon f_i(x_1, \dots, x_n, t, \varepsilon), \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

$$\varepsilon \frac{dx_n}{dt} = \sum_{\lambda} f_{n\lambda}(t) x_{\lambda} + \varepsilon f_n(x_1, \dots, x_n, t, \varepsilon)$$

genau eine für $0 \leq t \leq T$ und $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ stetige periodische Lösung mit der Periode T hat, die für $\varepsilon = 0$ mit der periodischen Lösung des ausgearteten Systems zusammenfällt. Dabei seien die $f_{i\lambda}$ und f_{λ} in $t \bmod T$ periodisch und für $|x_{\lambda}| \leq d$ reell und stetig differenzierbar, $f_{nn}(t) < 0$. Die periodische Lösung $p_{\lambda}(t)$ des ausgearteten Systems muß der Bedingung $|p_{\lambda}(t)| \leq d$ genügen, außerdem darf eine gewisse Jacobische Determinante nicht verschwinden.

W. Haacke.

Seifert, George: A rotated vector approach to the problem of stability of solutions of pendulum-type equations. Ann. Math. Studies 36, 1—16 (1956).

The equation considered is $\vartheta'' + f(\vartheta, \alpha) \vartheta' = g(\vartheta)$ where $\vartheta' = d\vartheta/dt$. It is assumed that $f(\vartheta, \alpha)$ is defined and has continuous derivatives for $\alpha > 0$, $-\infty < \vartheta < \infty$; $f(\vartheta, \alpha) > 0$ and $\partial f/\partial \alpha > 0$ in this domain and that $f(\vartheta + 2\pi, \alpha) = f(\vartheta, \alpha)$. Concerning $g(\vartheta)$ it is assumed that g has continuous second derivatives everywhere,

$g(\vartheta) = g(\vartheta + 2\pi)$, $g(\vartheta)$ has zeros ϑ_i for each of which $g'(\vartheta_i) \neq 0$ and $\int_0^{2\pi} g(\vartheta) d\vartheta > 0$.

If the equation has a solution $\vartheta(t, \alpha)$ such that $\vartheta'(t, \alpha) = y = y(\vartheta, \alpha)$ is periodic in ϑ with period 2π , then $\vartheta(t, \alpha)$ is called a periodic solution of the second kind. Let L^* be the set of all α for which periodic solutions of the second kind exist. Let P_2^* be the class of functions $y(\vartheta, \alpha) = \vartheta'(t, \alpha)$ where $\vartheta(t, \alpha)$ is a periodic solution of the second kind of the given equation and $\alpha \in L^*$. Let P_2 be the subset of P_2^* consisting of the positive functions of P_2^* and let L be the subset of L^* for which $y(\vartheta, \alpha) \in P_2$ exist. It is shown that P_2 is not vacuous and that L^* is connected. L is shown to be an open interval with 0 as greatest lower bound and $y(\vartheta, \alpha) \in P_2$ is shown to be a strictly decreasing function of α for $\alpha \in L$. The case $f(\vartheta, \alpha) = \alpha f(\vartheta)$ has been treated earlier by the author (this Zbl. 67, 67) and it is known that in this case P_2 is not vacuous. It is shown here that in this case L has a finite upper bound.

W. R. Utz.

Dragoş, L.: A propos d'un oscillateur de masse qui varie avec la vitesse. An. Univ. C. I. Parhon Bucureşti, Ser. Şti. Natur. Nr. 12, 41—43, russ. und französ. Zusammenfassung 43—44 (1956) [Rumänisch].

Application à l'équation du second ordre, „presque linéaire“, ε très petit:

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x + \varepsilon [\omega_1^2 \sin \nu t - \omega^2 x] x^2 = \omega_1^2 \sin \nu t,$$

d'une méthode de Bogoljubov et Mitropolskij.

A. Froda.

Meksyn, D.: Integration of the boundary-layer equations. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 237, 543—559 (1956).

Faßt man die Differentialgleichung $f''' + ff'' = \lambda(1 - f'^2)$ mit $\lambda = \text{const}$ formal auf als eine lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung für die unbekannte Funktion $f''(\sigma)$, so wird $f''(\sigma) = e^{-F(\sigma)} \varphi(\sigma)$, wobei $F(\sigma) = \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma$ in $\sigma = 0$ stationär und $\varphi(\sigma)$ langsam veränderlich ist. Mit dem Ansatz $f(\sigma) = \sum_{n=2}^\infty a_n \sigma^n / n!$, der die Randbedingungen $f(0) = f'(0) = 0$ berücksichtigt, hängt die Lösung nur noch von dem Parameter $a_2 = a$ ab, welcher aus der Randbedingung $1 = f'(\infty) = \int_0^\infty e^{-F(\sigma)} \varphi(\sigma) d\sigma$ zu bestimmen ist. Ein derartiges Integral läßt sich mittels der Paßmethode (steepest descent) durch eine unendliche Reihe darstellen, die im allgemeinen (nicht im Fall der Blasiusgleichung $\lambda = 0$) zwar divergiert, aber mittels der Euler-Transformation leicht summiert werden kann. Ähnlich kann man auch im Falle der allgemeinen Gleichung $f''' + ff'' = \lambda(1 - f'^2) + 2\alpha(f' f_\alpha - f_\alpha f'')$ vorgehen, in der f' bzw. f_α die partiellen Ableitungen von $f(\sigma, \alpha)$ nach σ bzw. α bedeuten und $\lambda = \lambda(\alpha)$ gegeben ist. Die Ergebnisse dieser — durch Zahlenbeispiele illustrierten Methode — stimmen gut mit theoretischen Ergebnissen von Hartree und experimentellen Resultaten von Schubauer überein.

J. Weissinger.

Graffi, Dario: Su una equazione funzionale non lineare della fisica-matematica. Atti Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., Anno 244°, Rend., XI. Ser. 3, Nr. 2, 64—69 (1956).

In einer früheren Untersuchung (dies. Zbl. 26, 121) untersuchte Verf. $\ddot{y} + f(y, \dot{y})\dot{y} + \varphi(y) = 0$, wobei $f(y, \dot{y}) < 0$ für $|y|, |\dot{y}|$ klein, $f(y, \dot{y}) > 0$ für $|y|, |\dot{y}|$ groß vorausgesetzt wurde. Diese Untersuchung wird hier erweitert, indem für $\varphi(y)$ eine Funktion $F(y(\tau)) = \sum_{s=1}^n A_s(y_s(t - h_s))$ gesetzt wird. Dabei sind die h_s Konstante, $A_s(z)$ stetige Funktionen. Es wird gezeigt, daß bei Erfüllung gewisser weiterer Bedingungen von einem gewissen t an die Lösung „oszillatorisch“ ist.

W. Haacke.

Hahn, Wolfgang: Zur Stabilität der Lösungen von linearen Differential-Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten. Math. Ann. 131, 151—166; Bemerkungen dazu *ibid.*, 132, 94 (1956).

Verf. gibt für einen zuerst von E. M. Wright begründeten Stabilitätssatz einen Beweis, der mit einfachsten Sätzen über Laplace-Transformationen aus-

kommt. Die Differential-Differenzengleichung $\sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{p_j} a_{ij} y^{(i)}(x - h_j) = F(x)$, $\max p_j = p_0 > 0$ und $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_k$, hat für $F(x) = 0$ unendlich viele Teillösungen $y_{jk}(x) = x^k \exp(r_j x)$, wobei die r_j die Wurzeln der charakteristischen

Gleichung $A(s) = \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{p_j} a_{ij} s^i \exp(-s h_j) = 0$ sind. Für $p_0 \geq 1$ ist jede Lösung $y(x)$

der homogenen Gleichung durch eine nach diesen Teillösungen fortschreitende absolut und für $x \geq x_0 > 0$ gleichmäßig konvergente Reihe darstellbar, wenn gewisse Spannen ausgeschlossen werden. Aus $\Re r_j > 0$ für $p_0 > 1$ bzw. $\Re r_j \geq -\alpha$, $\alpha > 0$, für $p_0 = 1$ ($j = 1, 2, \dots$) folgt $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$. Im Falle $F(x) < K \exp(-\beta x)$, $\beta > 0$,

gilt die gleiche Stabilitätsaussage für die inhomogene Gleichung. H. Wittich.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie;

Mambriani, Antonio: Sul concetto di „specie“ di un'equazione differenziale. Rivista Mat. Univ. Parma 7, 141—144 (1956).

Verf. kommt auf eine in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 67, 319) von ihm vorgeschlagene Einteilung der Differentialgleichungen in „Arten“ (Klassen, species) zurück, um die dort über den Begriff der Art gemachten Ausführungen zu vervollständigen. Ist $z = z(x_1, \dots, x_n)$ die gesuchte Lösung einer Differentialgleichung, dann wird die betreffende Differentialgleichung von der „ersten Art“ genannt, wenn es genau einen „Pluriderivator“ \mathfrak{D} gibt, so daß die Differentialgleichung in die Gestalt

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, z, \mathfrak{D} z, \mathfrak{D}^2 z, \dots, \mathfrak{D}^m z) = 0$$

gebracht werden kann. Die Differentialgleichung wird von der „zweiten Art“ genannt, wenn sie nicht von der ersten Art ist, und wenn es genau zwei Pluriderivatoren \mathfrak{D}_1 und \mathfrak{D}_2 gibt, so daß die Differentialgleichung in die Gestalt

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, z, \mathfrak{D}_1 z, \mathfrak{D}_2 z) = 0$$

gebracht werden kann, wenn sie von der ersten Ordnung ist, in die Gestalt

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, z, \mathfrak{D}_1 z, \mathfrak{D}_2 z, \mathfrak{D}_1^2 z, \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 z, \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1 z, \mathfrak{D}_2^2 z) = 0,$$

wenn sie von der zweiten Ordnung ist, usw. Sie ist von der „dritten Art“, wenn es genau drei Pluriderivatoren $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ gibt, so daß die Differentialgleichung auf die Gestalt

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, z, \mathfrak{D}_1 z, \mathfrak{D}_2 z, \mathfrak{D}_3 z) = 0$$

gebracht werden kann, wenn sie von der ersten Ordnung ist, usw. Auf diese Weise ergibt sich eine Einteilung der Differentialgleichungen in solche erster, zweiter, ... m -ter Art (m natürliche Zahl). — Verf. zeigt, daß die Differentialgleichungen $\Phi \equiv x^2 r - y^2 t + x p - y q = 0$ und $\Phi \equiv x r + (x + y) s + y t + x p + y q - z = 0$ nicht von der ersten, sondern von der zweiten Art sind. W. Quade.

Cinquini-Cibrario, Maria: Equazioni e sistemi di equazioni alle derivate parziali a caratteristiche reali. Atti V. Congr. Un. Mat. Ital. 125—153 (1956).

In questa conferenza sono esposti in sintesi i principali risultati e metodi di indagine relativi ai problemi tipici per un'equazione alle derivate parziali del 2° ordine $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$. Introdotta le strisce caratteristiche come elementi di indeterminazione per il problema di Cauchy l'A. osserva che quando è soddisfatta la condizione di iperbolicità $F_s^2 - 4 F_r F_t > 0$ le proprietà valide nel campo

analitico si trasportano in quello reale. Vengono quindi passati in rapida, ma esauriente rassegna i principali problemi (di Darboux, di Goursat, misti) relativi al caso iperbolico. L'esposizione, corredata da un'ampia ed accurata bibliografia, non trasalascia di fare cenno alle equazioni di ordine > 2 ed ai sistemi di equazioni. Sono messi in particolare evidenza i numerosi contributi italiani, antichi e recenti, generalmente poco conosciuti.

R. Conti.

Fava, Franco: Sulle varietà integrali del sistema

$$x_{uv} = a_1 x_u + a_2 x_v + a_3 x_w + a x, \quad x_{uw} = L x_{vw} + b_1 x_u + b_2 x_v + b_3 x_w + b x.$$

Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 90, 81—116 (1956).

Fava, Franco: Sulle varietà integrali del sistema:

$$x_{uv} = a_1 x_u + a_2 x_v + a_3 x_w + a x, \quad x_{uu} = L x_{vw} + b_1 x_u + b_2 x_v + b_3 x_w + b x.$$

Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 15, 121—162 (1956).

I sistemi qui considerati costituiscono due delle otto forme canoniche a cui è stato ricondotto il sistema di due equazioni di Laplace per una funzione di tre variabili (P. Buzano, questo Zbl. 12, 224): di altre due forme canoniche l'A. si è occupato in precedenti lavori (questo Zbl. 66, 156). Sotto l'ipotesi che le varietà integrali non verifichino equazioni del 2° ordine o di ordine superiore che non siano combinazioni lineari di quelle del sistema considerato o delle sue conseguenze differenziali, l'A. determina per ciascun sistema otto condizioni di integrabilità. I lavori sono essenzialmente dedicati all'interpretazione geometrica di dette condizioni per il tramite di „elementi caratteristici“: anzitutto le „superficie caratteristiche“ soddisfacenti a equazioni del 3° ordine lineari e omogenee (3 famiglie per il 1° sistema, 2 per il 2°) e su di esse le „linee caratteristiche“ (4 per ciascun punto per il 1° sistema, 2 per ciascun punto per il 2° sistema) e infine certe configurazioni punto-retta-piano (e per il 2° sistema anche S_3) appartenentisi. Le condizioni di integrabilità s'interpretano nel senso che, variando x su una superficie caratteristica, i corrispondenti elementi delle predette configurazioni descrivono delle varietà il cui spazio tangente lungo l'elemento generatore ha dimensione minore dell'ordinario.

P. Buzano.

Nakamori, Kanzi: Ein Anfangswertproblem für ein nicht-lineares hyperbolisches System von partiellen Differentialgleichungen in zwei unabhängigen Veränderlichen. Yokohama math. J. 4, 81—94 (1956) [Esperanto].

Le système des équations

$$\partial u_j / \partial x + \lambda_j(x, y, u) \partial u_j / \partial y = f_j(x, y, u) \quad (j = 1, \dots, n)$$

est étudié sous l'hypothèse que les dérivées de λ_j et de f_j par rapport à y, u_1, \dots, u_n soient continues. Les valeurs initiales sont données sur le segment: $x = 0, |y| \leq b$. Pour établir le théorème d'existence pour le problème de Cauchy, le théorème d'existence des points invariants dans l'espace fonctionnel est utilisé. On établit ensuite des théorèmes de comparaison à l'aide de la fonction $S(x)$ de Kamke.

M. Hukuhara.

Šilov, G. E.: Über einen Satz vom Typus des Phragmén-Lindelöfschen Satzes für Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. 5, 355—366 (1956) [Russisch].

Proof of the following theorem: A solution of a system of differential equations $\partial u(x, t) / \partial t = P((2\pi i)^{-1} \partial / \partial x) u(x, t)$, where P is a square matrix of differential operators in $x = (x^1, \dots, x^n)$ with constant coefficients, is a polynomial in t if 1) the characteristic roots of $P(s)$ are all real for real s

2) $|u(x, 0)| < C(1 + |x|)^q, |u(x, t)| < C_\varepsilon e^{\varepsilon |t| + A_\varepsilon |x|^\gamma}$ for every $\varepsilon > 0; \gamma < 1$.

The idea of the proof, which is expressed in terms of the notions of Gel'fand and the author (this Zbl. 52, 116), is to prove first that $F(t) = \int u(x, t) \varphi(x) dx$ is a polynomial in t when φ is the Fourier transform of a function with compact support whose derivatives of order k are $O(C^k k^{b_k})$ where $1 < b < 1/\gamma$; the result then follows by letting such functions converge to delta functions. The condition on φ implies that $\varphi(x) = O(e^{-|x|^{1/b}})$ so that F exists and is $O(e^{\epsilon|t|})$ when t is real. A solution of the equation $\partial\Phi/\partial t = P^*((2\pi i)^{-1} \partial/\partial x) \Phi$ which equals φ when $t = 0$ can be obtained and estimated by Fourier transforms for all complex values of t and since $F(t) = \int u(x, 0) \Phi(x, t) dx$ it follows that F is an entire function of exponential type of polynomial growth for imaginary t , so that the usual Phragmén-Lindelöf theorem can be applied.

L. Hörmander.

Gurevič (Gurevich), B. L.: New types of fundamental and generalized function spaces and the Cauchy problem for systems of difference equations involving differential operations. Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 1001—1003 (1956) [Russisch].

Some extensions and improvements of uniqueness theorems due to Gel'fand and Šilov (this Zbl. 52, 116) and the author (this Zbl. 56, 317) are given. The equations studied are of the form $\partial u/\partial t = Pu$ where u is a vector and P a matrix of difference-differential operators with constant coefficients. The same methods as in the quoted papers are used.

L. Hörmander.

Miles jr., E. P. and Ernest Williams: The Cauchy problem for linear partial differential equations with restricted boundary conditions. Canadian J. Math. 8, 426—431 (1956).

Gli AA. costruiscono esplicitamente una soluzione di un'equazione lineare alle derivate parziali della forma $(') \Phi(D, x_1, x_2, \dots, x_n)u + \Psi(D, t)u = 0$, essendo Ψ un operatore differenziale ordinario di ordine s rispetto a t , con le condizioni iniziali $u|_{t=0} = P(x_1, \dots, x_n)$, $\partial^j u/\partial t^j|_{t=0} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s-1$) nell'ipotesi che applicando alla funzione P l'operatore Φ un conveniente numero k di volte si ottenga per risultato zero $[\Phi^k(P) \equiv 0]$. Altri due teoremi, relativi al caso $s = 2$, riguardano, il primo la risoluzione esplicita del problema iniziale $u|_{t=0} = 0$, $\partial u/\partial t|_{t=0} = Q(x_1, \dots, x_n)$ per la $(')$, il secondo la risoluzione del problema iniziale $u|_{t=0} = P$, $\partial u/\partial t|_{t=0} = Q$ per l'equazione delle onde nelle quattro variabili x_1, x_2, x_3, t , supposte $P = P(x_1, x_2, x_3)$ e $Q = Q(x_1, x_2, x_3)$ funzioni poliarmoniche degli ordini p e q rispettivamente.

R. Conti.

Nagumo, Mitio: On linear hyperbolic system of partial differential equations in the whole space. Proc. Japan Acad. 32, 703—706 (1956).

Etude du problème de Cauchy pour les systèmes hyperboliques; l'A. utilise certains des résultats de Leray (Hyperbolic differential equations, Princeton 1953), et une méthode d'intégrale d'énergie. L'A. dit que les résultats s'appliquent aux systèmes paraboliques; et c'est vrai, mas cela repose sur des résultats de Mizohata (ce Zbl. 72, 331); or, aucun résultat du type Mizohata n'est mentionné dans le texte.

J. L. Lions.

Weinstein, A.: Elliptic and hyperbolic axially symmetric problems. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 264—269 (1956).

Verf. gibt einen Überblick über neuere Resultate über die Eigenschaften der Lösungen $u(x_1, \dots, x_m, y)$ der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{k}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = \pm \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} \right)$$

($k =$ reeller Parameter). Siehe die Besprechungen der Arbeiten von A. Weinstein, dies. Zbl. 46, 107; 53, 253; 56, 93, L. E. Payne und A. Weinstein, dies. Zbl. 48, 81, L. E. Payne, dies. Zbl. 48, 190, J. B. Diaz and H. F. Weinberger, dies. Zbl. 52,

324 und E. K. Blum, dies. Zbl. 56, 93, sowie die Arbeiten von A. Weinstein in Summa Brasil. Math. 3, 125—146 (1955) und M. Hyman in Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 408—413 (1954). *A. Huber.*

Corduneanu, C.: La dépendance des solutions des équations hyperboliques par rapport aux coefficients et aux données sur les caractéristiques. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 1, Nr. 1, 41—44 (1956).

Supposto che $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y)$, $d = d(x, y)$ siano funzioni continue in un dato rettangolo $0 \leq x \leq \alpha$, $0 \leq y \leq \beta$, che $f = f(x)$ sia continua in $0 \leq x \leq \alpha$, insieme con la derivata $f'(x)$, e che $g = g(y)$ sia continua in $0 \leq y \leq \beta$ insieme con la derivata $g'(y)$, l'A. mostra con un semplice esempio che le soluzioni $z = z(x, y)$ in R del problema $z_{xy} + a z_x + b z_y + c z = d$, $z(x, 0) = f(x)$, $z(0, y) = g(y)$ possono non dipendere con continuità dai dati a, b, c, d, f, g , rispetto alla metrica lagrangiana ($\|a\| = \max_R |a|$, ecc.). L'A. dimostra tuttavia che se oltre variare di poco i dati a, b, c, d, f, g anche le variazioni totali di f e di g (oppure quella di a rispetto alla x e quella di b rispetto alla y) subiscono incrementi sufficientemente piccoli, nella metrica suddetta, allora la soluzione z subisce un incremento che non supera un numero positivo prefissato. [Questo articolo è la traduzione francese di un lavoro dello stesso A. scritto in romeno in Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 7, 313—317 (1955).] *R. Conti.*

Hornich, Hans: Über Schwingungen mit periodischer Störung und Lösung. Monatsh. Math. 60, 223—230 (1956).

Verf. behandelt die Differentialgleichung

$$\partial^2 u / \partial x^2 - \partial^2 u / \partial y^2 = \sum a_{nm} \cos (n x + m \lambda y), \quad (n \geq 0, m \geq 0),$$

deren rechte Seite in bezug auf x die Periode 2π und in bezug auf y die Periode $2\pi/\lambda$ hat. Er setzt $a_{00} = 0$, $\sum |a_{nm}| < \infty$ voraus und fragt nach Lösungen u , die ebenfalls diese Perioden haben; dabei kommt er zu folgenden Feststellungen: Wenn λ rational ist, dann gibt es Fälle, in denen keine solche Lösung existiert (durch Beispiel belegt). Wenn λ irrational ist und die Kettenbruchentwicklung für λ beschränkte Teilnenner hat, dann gibt es stets solche Lösungen. Man gewinnt sie durch die Transformation $x - y = 2\sigma$, $x + y = 2\tau$ und dann sukzessive Integration nach τ und σ . Wenn die Kettenbruchentwicklung für λ beliebig große Teilnenner aufweist, dann kommt es darauf an, ob die Reihe $\sum |a_{nm}| \cdot |\lambda^2 m^2 - n^2|^{-1}$ konvergiert oder divergiert. Im Konvergenzfall gibt es eine wieder ähnlich wie vorhin zu gewinnende Lösung mit den gewünschten Perioden, im Divergenzfall im allgemeinen aber nicht. *O. Perron.*

Onicescu, O.: Quelques remarques sur la solution du système de Cauchy pour l'intérieur d'une courbe de Jordan, comme un problème de Cauchy. An. Univ. C. I. Parhon Bucureşti, Ser. Şti. Natur. Nr. 10, 9—13, russ. und französ. Zusammenfassung 13 (1956) [Rumänisch].

Consider the Cauchy's system

$$\partial U / \partial x = \partial V / \partial y; \quad \partial V / \partial x = -\partial U / \partial y.$$

A simple method of iteration for integrating this system is used, assuming the values of the functions U and V known on the boundary. The relations between these values so that the function $L(z) = U(x, y) + i V(x, y)$ has in the interior of the considered domain given singularities, are specified. Firstly, the circular domain $|z| = 1$ is investigated and next, taking into account the results obtained for this case, a domain bounded by a simple convex Jordan curve is considered.

R. Theodorescu.

Lax, Anneli: On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics. *Commun. pure appl. Math.* 9, 135—169 (1956).

Detto $L(\xi, \eta)$ un polinomio di grado m si consideri l'equazione alle derivate parziali lineare (') $L(\partial/\partial x, \partial/\partial t) u = 0$ nelle due variabili indipendenti x, t e nell'incognita $u = u(x, t)$. Data una curva C del piano x, t che non sia tangente alle caratteristiche della (') in alcun punto il problema di Cauchy per la (') consiste nella ricerca della u quando si assegni su C la u e le sue derivate normali degli ordini $1, 2, \dots, m-1$. Tale problema viene detto ben posto quando esiste un intero k tale che ogni insieme di dati di Cauchy k volte differenziabili determina una sola soluzione della (') in un intorno (laterale) della C . Detto a_{ij} il coefficiente di $\partial^i u / \partial x^i \partial t^j$ in L e posto $p_h(z) = a_{0h} z^h + a_{1h-1} z^{h-1} + \dots + a_{h0}$ per $h = 0, 1, \dots, m$, l'A. prova che se le a_{ij} sono costanti il problema di Cauchy per la (') è ben posto allora e solo quando a) le radici di $p_m(z) = 0$ sono reali, ed inoltre b) detto r il massimo intero tale che $(z - \lambda)^r$ divide $p_m(z)$, $(z - \lambda)^{r-s}$ divide $p_{m-s}(z)$ per $s = 0, 1, \dots, r-1$, oppure b') il massimo comune divisore di $p_m(z), \partial p_m(z)/\partial z, \dots, \partial^s p_m(z)/\partial z^s$ divide $p_{m-s}(z)$ per $s = 1, 2, \dots, m-1$. Le a), b) (a), b')) ammettono una naturale estensione al caso della (') a coefficienti a_{ij} variabili; tali condizioni restano sufficienti perchè il problema di Cauchy sia ben posto. *R. Conti.*

Vasilach, Serge: Sur le problème de Cauchy pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \lambda^2 u = f(x, y, z).$$

Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 1. Nr. 2, 51—60 (1956).

Verf. betrachtet das Anfangswertproblem für die Gleichung

$$\partial^2 \Delta_3 u / \partial t^2 + \mu^2 \partial^2 u / \partial z^2 - \lambda^2 u = f(x, y, z)$$

mit $u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z)$, $u_t(x, y, z, 0) = u_1(x, y, z)$ für $0 \leq t < \infty$ und $-\infty < x, y, z < \infty$. Dabei steht Δ_3 für $\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$. Die Lösung wird explizit konstruiert durch Verwendung der Laplace- und Fouriertransformation. Bezüglich t wird die einseitig unendliche Laplace-Transformation

$$\varphi(x, y, z, p) = \mathfrak{L} u \equiv \int_0^\infty e^{-pt} u(x, y, z, t) dt,$$

bezüglich x, y, z die zweiseitig unendliche Fourier-Transformation

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, p) = \mathfrak{F} \varphi \equiv \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \varphi(x, y, z, p) dx dy dz$$

benutzt. Nach Durchführung der Transformation $\Phi = \mathfrak{F} \mathfrak{L} u$ kann Φ sofort berechnet werden. Die Rücktransformation gelingt explizit durch Verwendung lehrreicher Kunstgriffe. *G. Hellwig.*

Asral, Bediz: On the solution of the Cauchy problem for parabolic equations. *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* 21, 65—83 (1956).

L'A. considera il problema iniziale $\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(x, t) = F(x)$ per l'equazione parabolica

$\partial^2 \varphi / \partial x^2 - \partial \varphi / \partial t + k(x) \varphi = 0$ allo scopo di pervenire ad una formula analoga a quella di Poisson valida per l'equazione del calore ($k(x) \equiv 0$). Il procedimento che conduce a tale formula passa attraverso l'integrazione dell'equazione differenziale ordinaria $R'' + (\lambda^2 + k(x)) R = 0$ il che impone certe restrizioni sulla classe delle funzioni $k(x)$. Facendo uso dei concetti della teoria delle distribuzioni, supposto che il dato iniziale $F(x)$ appartenga allo spazio $D^{(n-1)}$ delle funzioni di x continue aventi per supporto un compatto fissato K , l'A. ottiene la soluzione

$$\varphi(x, t) = (4\pi t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{v=0}^n P_v(x) \Phi^{(v)}(\alpha) e^{-(x-\alpha)^2/4t} d\alpha$$

dove $\Phi(x)$ è una funzione legata alla F da un'equazione differenziale lineare e le P_v sono funzioni di k e delle sue prime n derivate. L'A. esamina in dettaglio l'espressione delle P_v in corrispondenza a talune delle k ammissibili e conclude accennando alla possibilità di estendere il procedimento al caso di $n + 1$ variabili indipendenti.

R. Conti.

Dennis, S. C. R. and G. Poots: A solution of the heat transfer equation for laminar flow between parallel plates. *Quart. appl. Math.* 14, 231—236 (1956).

Das Problem, das die Verff. betrachten, führt auf $\alpha^2 \partial^2 \vartheta / \partial x^2 + \partial^2 \vartheta / \partial y^2 = 16 \pi^{-3} (y - y^2/\pi) \partial \vartheta / \partial x$ mit $\vartheta = 0$ für $x > 0$, $y = 0$ oder π ; $\vartheta = 1$ für $x = 0$; $\vartheta \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ bei $0 < y < \pi$. Es wird der Ansatz $\vartheta(x, y) = 2\pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \sin ny$ ($n = 1, 3, 5, \dots$) gemacht und das Problem so auf die Lösung eines unendlichen linearen Gleichungssystems zurückgeführt. Eine Tafel gibt numerische Resultate.

F. W. Schäfke.

Krzyżański, M.: Sur l'allure asymptotique des solutions d'équation du type parabolique. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* 4, 247—251 (1956).

Betrachtet werden Lösungen u der parabolischen Differentialgleichung $a u_{xx} + b u_x + c u - u_t = f(x)$, mit $a > 0$, $b \leq B$, $c \leq 0$ für $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$ und den (asymptotischen) Randbedingungen $\lim_{t \rightarrow \infty} u(0, t) = l_0$; $\lim_{t \rightarrow \infty} u(1, t) = l_1$ für große Werte von t . Es läßt sich zeigen, daß $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = w(x)$ gleichmäßig in $[0, 1]$ gilt, wenn w die Lösung des Randwertproblems $a w'' + b w' + c w = f(x)$, $w(0) = l_0$, $w(1) = l_1$ ist. Die Aussage läßt sich auf nichtlineare parabolische Differentialgleichungen der Form $u_t = F(x, u, u_x, u_{xx})$ verallgemeinern, wenn man nur fordert, daß $F_r(x, v, p, r) \geq a_0 > 0$ und $F_v(x, v, p, r) \leq 0$ gilt. Die Grenzfunktion w erhält man als Lösung der Differentialgleichung $F(x, w, w_x, w_{xx}) = 0$. Beide Aussagen lassen sich leicht auf den Spezialfall der 1. Behauptung mit $f = 0$, $l_0 = l_1 = 0$ zurückführen, den man durch Konstruktion einer Funktion V beweist, die die folgenden Eigenschaften besitzt: $V > 0$ in Σ : $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$; $L[V] \leq 0$ im Innern von Σ ; $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x, t) = 0$ gleichmäßig in $0 \leq x \leq 1$. Für $(x, t) \in \Sigma$ gilt dann die Ungleichung $|u(x, t)| \leq \delta + k V(x, t)$, wobei δ und k Konstanten bedeuten, von denen δ beliebig klein gewählt werden darf. Auf S. 251 ist jeweils die unabhängig Veränderliche t im Argument von F zu streichen.

H. Witting.

Aronson, D. G.: Linear parabolic differential equations containing a small parameter. *J. rat. Mech. Analysis* 5, 1003—1014 (1956).

On considère l'équation du type parabolique

$$(1) \quad L_\varepsilon(u) \equiv \varepsilon u_{xx} + a(x, y) u_x - b(x, y) u_y + c(x, y) u = d(x, y),$$

le paramètre $\varepsilon > 0$ tendant vers zéro et l'équation réduite

$$(2) \quad L_0(v) \equiv a(x, y) v_x - b(x, y) v_y + c(x, y) v = d(x, y).$$

Soit R le domaine du plan x, y limité par deux arcs \bar{S}_2 et \bar{S}_3 et deux segments \bar{S}_1 et \bar{S}_4 des caractéristiques $y = y_1$ et $y = y_2$ ($y_1 < y_2$); soit $\Sigma = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3$. On considère le problème aux limites (3) $L_\varepsilon(u) = d(x, y)$, $u = \varphi$ sur Σ , φ étant une fonction donnée de l'arc s de Σ . Soit I un subarc de l'un des S_i ($i = 1, 2, 3$) non tangent à aucune caractéristique de (2) et tel que les caractéristiques de (2) qui entrent à R sur I en sortent aux points d'un subarc J de la frontière de R non tangent à aucune caractéristique de (2) et ne contenant pas de points de I . On appelle multilatéral régulier un domaine fermé, limité par I, J et par les caractéristiques de (2) joignant les extrémités correspondants de I et J . Soit $u(x, y; \varepsilon)$ la solution du problème (3) continue dans la fermeture \bar{R} du domaine R , admettant

les dérivées u_x, u_y, u_{xx} continues dans $R + S_4$. L'A. démontre un théorème concernant la relation qui subsiste dans un multilatéral régulier M entre $u(x, y; \varepsilon)$ et la solution $v(x, y)$ de (2) se réduisant à φ sur I . Nous omettons ici les détails de ce théorème. Dans la seconde partie du travail l'A. démontre un théorème relatif à l'équation $L_\varepsilon(u) = \varepsilon g(x, y)$.

M. Krzyżański.

Marchasev (Markhacev), G.: On a boundary problem for the equation $\frac{\partial}{\partial x} \Delta u = 0$. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 926—928 (1956) [Russisch].

L'A. cherche à simplifier la solution de l'équation $(\partial/\partial x) \Delta u = 0$, dans le cercle $K(x^2 + y^2 \leq 1)$, aux limites $u|_\gamma = f_1(\theta)$, $u|_d = f_2(y)$, γ étant la circonférence du cercle K ; d le diamètre vertical $-1 \leq y \leq 1$; f_1 et f_2 étant deux fonctions données. D'après Hadamard chaque solution u est décomposable: $u = v + w$ avec $\Delta v = 0$ et $\partial w/\partial x = 0$. Désignant $\mu(\theta) = v|_\gamma$, on obtient pour définir $\mu(\theta)$ la formule

$$\mu(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu(\psi) \frac{1 - \varrho_\theta^2}{1 + \varrho_\theta^2 - 2\varrho_\theta \sin \psi} d\psi + F(\theta)$$

$\varrho_\theta = \sin \theta$, $F(\theta) = f_1(\theta) = f_2(\sin \theta)$. Introduisant les variables $y = \sin \theta$, $\eta = \sin \psi$, la formule précédente devient

$$\mu(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \mu(\eta) \frac{1 - y^2}{1 + y^2 - 2y\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} + F(y).$$

Le noyau de cette équation intégrale s'écrit sous la forme

$$K(y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} \sum_{k=0}^{\infty} (2y)^k T_k(\eta),$$

$T_k(\eta)$ désignant le k -ième polynome de Tchebychev. L'A. cherche la résolvante de l'équation intégrale sous la forme

$$I(y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} \sum_{p, q=0, p \leq q}^{\infty} \gamma^{pq} T_p(y) T_q(\eta),$$

les nombres p et q étant, en même temps, pairs ou impaires. *N. Saltykow.*

Fichera, Gaetano: Sulle equazioni alle derivate parziali del seconde ordine ellittico-paraboliche. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 15, 27—47 (1956).

Dans un ouvert A de l'espace euclidien à r dimensions, l'A. considère l'opérateur

$$E(u) = \sum a_{hk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum b_h(x) \frac{\partial u}{\partial x_h} + c(x) u, \quad h, k = 1, \dots, r;$$

on suppose que la forme quadratique $\sum a_{hk}(x) \lambda_h \lambda_k$ est semi définie positive (opérateur elliptique-parabolique positif). Les coefficients sont des fonctions réelles, avec des hypothèses convenables de régularité; on suppose que la frontière Σ de A est régulière. On cherche à résoudre un „problème de Dirichlet“ pour E , i.e.: on cherche u solution de $E(u) = f$, u étant donnée sur une partie convenable de la frontière; l'A. détermine cette partie et donne de nombreux exemples. Définition des solutions faibles, par le procédé usuel d'intégrations par parties; notons que l'A. se place dans des espaces de Banach — par exemple des $L^p(A)$, $p \neq 2$. A l'aide de travaux antérieurs (Fichera, Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali, Trieste, 25—28 Agosto 1954, 174—227 (1955)) l'A. montre que l'existence de solutions faibles résulte de majorations a priori pour l'adjoint E^* de E .

J. Lions.

Stampacchia, Guido: Su un problema relativo alle equazioni di tipo ellittico del secondo ordine. *Ricerche Mat.* 5, 1—24 (1956).

Soit D un ouvert borné d'un espace euclidien à n dimensions, de frontière FD ayant des plans tangents à normale lipschitzienne. On suppose que D est divisé en deux ouverts D_1, D_2 au moyen d'une variété Σ de dimension $(n-1)$ régulière. On considère E_i , $i = 1, 2$, opérateur différentiel elliptique auto adjoint, négatif, dans D_i . On cherche u_i solution de $E_i u_i - c_i u_i = f_i$, dans D_i , u_i vérifiant des conditions du type Dirichlet-Neumann sur $F D_i - \Sigma$ et une condition de passage sur Σ : $u_1 = u_2$ et une condition correspondante: $\partial u_1 / \partial \nu_1 = -\partial u_2 / \partial \nu_2$, ν_i normale intérieure. 1^{ère} partie: existence et unicité de solutions faibles, ce qui est standard (méthodes et résultats); 2^{ème} partie: a) interprétation des conditions aux limites; à signaler une intéressante interprétation des conditions aux limites sur Σ ; b) étude de la régularité à la frontière, en particulier sur $\Sigma - \Sigma \cap F D$; là aussi d'intéressantes considérations (voisines, dans un cas particulier, de la méthode des quotients différentiels de Nirenberg).

J. L. Lions.

Greco, Donato: Il problema di derivata obliqua per certi sistemi di equazioni a derivate parziali di tipo ellittico in due variabili. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. Ser. 42, 1—24 (1956).

L'A. étudie avec deux variables seulement un système de m équations linéaires aux dérivées partielles du 2^e ordre, dont chacune ne porte que sur une fonction u_i et est du type classique elliptique. Les coefficients et les contours sont assez réguliers et les coefficients des u_i minorent une constante < 0 . On cherche une solution (u_i) satisfaisant à m conditions linéaires mixtes à la frontière. Grâce au potentiel généralisé de simple couche, on traduit le problème en un système d'équations intégrales à valeurs principales, dont l'étude est classique et fournit en particulier un critère nécessaire et suffisant d'existence. On introduit aussi un „problème adjoint“ qui conduit à des critères de résolubilité et d'unicité du problème initial. Même dans le cas déjà diversement traité d'une seule équation, quelques améliorations sont apportées.

M. BreLOT.

Greco, Donato: Sul problema di Lauricella per una particolare equazione del quarto ordine. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. 11, 394—401 (1956).

On considère pour deux variables un opérateur différentiel linéaire du 4^e ordre à coefficients constants ne contenant que les dérivées du 4^e ordre

$$\mathfrak{L} = \sum_{h+k=4} A_{h,k} \frac{\partial^4}{\partial x_1^h \partial x_2^k}, \text{ tel que } \Phi = \sum_{h+k=0} A_{h,k} t_1^h t_2^k$$

soit définie positive. Pour un domaine plan simplement connexe assez régulier Ω (avec dérivées 4^e continues par rapport à l'arc, des fonctions définissant la frontière), on cherche une fonction u continue dans $\bar{\Omega}$, à dérivées 4^e continues, satisfaisant à $\mathfrak{L} u = 0$ et $u, du/dn$ données sur la frontière. On se ramène aussitôt à $\mathfrak{L} = \mathcal{M} \cdot \Delta$ (\mathcal{M} opérateur du 2^e ordre qu'on suppose $\neq \Delta$) et on cherche à résoudre le problème pour une somme $u_1 + u_2$ telle que $\Delta u_1 = 0$, $\mathcal{M} u_2 = 0$. Cela permet, moyennant une adaptation convenable, d'utiliser l'étude des systèmes d'équations développée dans l'article rapporté ci-dessus. On conclut que le problème proposé admet une solution unique, si les données sur la frontière ont une régularité convenable.

M. BreLOT.

Levitan, B. M.: Einige Fragen der Spektraltheorie selbstadjungierter Differentialoperatoren. *Uspechi mat. Nauk* 11, Nr. 6 (72), 117—144 (1956) [Russisch].

This is an expository paper, dealing primarily with the development of the subject since 1950. The subsections are: 1. Eigenfunction expansions for ordinary differential operators using abstract Hilbert space arguments. 2. The same thing

treated in a concrete manner. 3. Eigenfunction expansions for partial differential operators. 4. Asymptotic formulas for spectral functions of differential operators and local theorems on eigenfunction expansions. 5. Asymptotic formulas for the eigenvalues of the Schrödinger operator with a non-bounded potential function. 6. Inverse spectral problems. — At the end of the paper there is an extensive bibliography.

L. Gårding.

Levitan, B. M.: Über die Entwicklung nach den Eigenfunktionen der Gleichung $\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, \dots, x_n)\} u = 0$. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* 20, 437—468 (1956) [Russisch].

Levitan, B. M.: Über die Entwicklung nach Eigenfunktionen einer selbstadjungierten partiellen Differentialgleichung. *Trudy Moskovsk. mat. Obšč.* 5, 269—298 (1956) [Russisch].

The first paper contains proofs of results concerning the spectral properties of the self-adjoint operator defined by the Neumann boundary condition for the operator $\Delta - q$ studied in some region in R^n . The results were announced earlier with weaker differentiability assumptions on q (this *Zbl.* 56, 97). In the second paper the interest is concentrated upon a self-adjoint elliptic operator with analytic coefficients in a bounded region. The results and methods are analogous to those in the first paper. In particular, an explicit expression depending only on the coefficients of the operator is found which approximates the spectral function with the error $O(\lambda^{(n-1)/2} \log \lambda)$.

L. Gårding.

Szegő, G.: Relations between different capacity concepts. *Proc. Confer. Differential equations, Maryland 1955*, 139—145 (1956).

L'A. compare pour une plaque plane la capacité logarithmique c et la capacité newtonienne C . Il utilise des idées de l'ouvrage „Isometric inequalities“ de Polya-Szegő (ce *Zbl.* 44, 383), où il est suggéré que $C/c \leq 2/\pi$. On sait que C s'exprime au moyen de l'intégrale de Dirichlet de la fonction harmonique égale à 1 sur la plaque et s'annulant à l'infini dans l'espace; C est majoré par la même intégrale pour toute autre fonction satisfaisant à ces conditions-limites. On cherche à se rapprocher du cas harmonique inconnu et à mettre en évidence dans le calcul la capacité c . On parvient ainsi à $C/c \leq 1,07 \times 2/\pi$.

M. Brelot.

Choquet, Gustave: Les noyaux réguliers en théorie du potentiel. *C. r. Acad. Sci., Paris* 243, 635—638 (1956).

Let E be a locally compact space, and let μ be a non-negative Radon measure defined in E . Then a kernel G is a mapping of $E \times E$ into \bar{R}_+ (that is, $[0, \infty]$) such that for each $x \in E$, $G(x, y)$ is measurable in y for each measure μ . The potential U^μ of μ for the kernel G is defined by $U^\mu \equiv \int G(x, y) d\mu(y)$. Then the author defines G to be regular if for each measure μ with compact support $K \subset E$, the fact that the restriction of U^μ to K is finite and continuous implies that U^μ is continuous in E . The author then studies conditions which are necessary and sufficient that a kernel be regular, as well as more convenient sufficient conditions for regularity.

O. Read.

Ohtsuka, Makoto: Sur un espace complet de mesures positives dans la théorie du potentiel. *Proc. Japan Acad.* 32, 311—313 (1956).

H. Cartan a démontré (ce *Zbl.* 26, 227), pour certains noyaux de composition sur un groupe localement compact G , que l'espace des mesures positives d'énergie finie portées par un compact fixe est complet pour la norme-énergie. Ce résultat est généralisé en remplaçant G par un espace localement compact quelconque Ω , et en considérant des noyaux $\Phi(P, Q)$ qui sont des fonctions positives définies sur $\Omega \times \Omega$, symétriques, continues hors de la diagonale, strictement de type positif, et satisfaisant au „principe de continuité“ (voir analyse suivante).

J. Deny.

Kishi, Masanori: On a theorem of Ugaheri. Proc. Japan Acad. 32, 314—319 (1956).

Un noyau $\Phi(P, Q)$ défini sur $\Omega \times \Omega$ (Ω = espace localement compact) vérifie le principe de continuité lorsqu'il satisfait au théorème suivant, démontré dans le cas newtonien par F. Vasilescu (ce Zbl. 11, 115): si la restriction d'un potentiel $U^\mu(P) = \int \Phi(P, Q) d\mu(Q)$ au support de la mesure $\mu \geq 0$ est continue, U^μ est continu dans Ω tout entier. L'A. étudie, pour un noyau symétrique strictement de type positif, les relations entre le principe de continuité et le principe du maximum généralisé de T. Ugaheri [Bull. Tokyo Inst. Techn. 4, 149—179 (1953)]. Une étude voisine, concernant des noyaux dissymétriques, a été faite indépendamment par G. Choquet (v. la deuxième analyse ci-dessus). J. Deny.

Matsushita, Shin-ichi: Théorème de Krein-Milman et le balayage de mesures dans la théorie du potentiel. II, III. Proc. Japan Acad. 32, 29—34; 125—130 (1956).

L'A. continue son étude du potentiel basée dans un article antérieur (ce Zbl. 66, 345) sur l'étude pour un compact K dans R^n ($n \geq 3$) des formes linéaires $\int f d\mu$ (μ mesure de Radon fixée sur K) des fonctions f , traces des potentiels finis continus de masses situées sur un compact (variable) de $\mathbb{C} K$. Il cherche à en déduire les théorèmes essentiels du balayage ordinaire, extrémisation, problème de Dirichlet, en interprétant les éléments extrémaux de l'ensemble des formes correspondant aux mesures $\mu > 0$ ($\mu(K) = 1$) dans le dual de l'ensemble des f . Ce sont en effet les formes correspondant aux mesures ponctuelles placées aux points-frontière „stables“ de K . Mais contrairement à ce que pense l'A., il n'y a rien d'analogue pour les points-frontière réguliers de l'intérieur de K et l'ensemble des trois articles serait à reprendre complètement. M. Brelot.

Variationsrechnung:

Hestenes, Magnus R.: Hilbert space methods in variational theory and numerical analysis. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 229—236 (1956).

Die Theorie der in der Variationsrechnung wichtigen Funktionale quadratischen Charakters kann weitgehend einheitlich entwickelt werden, indem man quadratische Formen in einem Hilbertschen Raum untersucht. Verf. berichtet zunächst über eigene Arbeiten in dieser Richtung (dies. Zbl. 45, 208). Es wird erläutert, welche Begriffe der Variationsrechnung und der Theorie der quadratischen Formen einander entsprechen. Z. B. wird eine quadratische Form $J(x)$ elliptisch genannt, wenn sie in der Gestalt (*) $J(x) = K(x) + D(x)$ mit vollstetigem $K(x)$ und positiv definitem $D(x)$ darstellbar ist. Diese Eigenschaft einer Form $J(x)$ ist der verschärften Legendreschen Bedingung äquivalent. — Verf. erläutert dann, wie sich einige Ideen auf allgemeinere Probleme übertragen lassen. So entspricht der Aufteilung (*) der quadratischen Form $J(x)$ die Darstellung $J(C) = J^*(C) + E^*(C)$ des Integrals $J(C) = \int_a^b f(t, x, \dot{x}) dt$, wobei $J^*(C)$ das Hilbertsche Integral und $E^*(C)$ das Integral über die Weierstraßsche E -Funktion bedeuten. — Ferner wird bemerkt, daß sich die Theorie der Variationsrechnung zu einem großen Teil aus einer Theorie der Linienintegrale zusammen mit einem Minimax-Prinzip entwickeln läßt. — Als Beispiel dafür, daß die Variationsrechnung und die Theorie des Hilbertschen Raumes in der Theorie der numerischen Analysis eine wichtige Rolle spielen können, wird das Verfahren der konjugierten Gradienten genannt. Dieses Verfahren — ursprünglich zur Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme entwickelt — läßt sich auf lineare Probleme in einem Hilbertschen Raum übertragen (siehe R. M. Hayes, Diss. Univ. of California at Los Angeles). J. Schröder.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Mysovskich, I. P.: Beweis für die Existenz eines Eigenwertes bei einem symmetrischen Kern. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 2 (68), 199—200 (1956) [Russisch].

Kurzer, einfacher Beweis der Existenz eines Eigenwertes eines reellen, symmetrischen, stetigen Kernes $K(s, t)$ einer Integralgleichung ($a \leq s, t \leq b$). Er wird nur mit den grundlegenden, in der Theorie der Integralgleichungen ohnehin geläufigen Überlegungen geführt. Es genügt, die Existenz eines Eigenwertes des iterierten Kernes $K_2(s, t)$ zu beweisen. Der Grundgedanke besteht darin, daß für jeden positiven Wert μ_0 , der so gewählt ist, daß im Kreis $|\mu| \leq |\mu_0|$ der komplexen Ebene kein Eigenwert von $K_2(s, t)$ existiert, jede im Intervall (a, b) normierte, reelle Funktion $\varphi(s)$ als Lösung einer inhomogenen Integralgleichung

$$\varphi(s) - \mu_0 \int_a^b K_2(s, t) \varphi(t) dt = f(s)$$

aufgefaßt und daher mit Hilfe der Resolvente $R_2(s, t; \mu)$ des Kernes K_2 in der Form

$$\varphi(s) = f(s) + \mu_0 \int_a^b R_2(s, t; \mu_0) f(t) dt$$

hingeschrieben werden kann. R_2 wird hierin in bekannter Weise durch die Reihe der iterierten Kerne von K_2 ausgedrückt und daraus wird durch einige Integralumformungen abgeleitet, daß

$$1 - \mu_0 \int_a^b \int_a^b K_2(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt > 0$$

gilt. Das Doppelintegral ist wegen der Symmetrie des Kernes K gleich

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(s, t) \varphi(s) ds \right]^2 dt$$

und fällt daher stets positiv aus. Wenn nun kein Eigenwert von K_2 existieren würde, so könnte man μ_0 beliebig groß wählen und daraus würde zunächst $\int_a^b K(s, t) \varphi(s) ds = 0$ und sodann $K(s, t) = 0$ folgen. — Der Beweis liefert zugleich die für die Theorie der Integralgleichungen mit symmetrischem Kern grundlegende Ungleichung

$$\int_a^b \int_a^b K_2(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt \leq \frac{1}{|\lambda_1|^2},$$

wo λ_1 den absolut kleinsten Eigenwert von K bedeutet, die aussagt, daß der zum Kern K gehörige Integraloperator $\int_a^b K(s, t) \varphi(s) ds$ beschränkt mit der Schranke $1/|\lambda_1|$ ist (Anschluß an die Theorie der linearen Operatoren!), und mit ihrer Hilfe die weitere, ebenfalls grundlegende Ungleichung

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt \right| \leq \frac{1}{|\lambda_1|}$$

für jede normierte Funktion $\varphi(s)$.

E. Svenson.

Il'in, V. P.: Verallgemeinerung einer Integralungleichung. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 4 (70), 131—138 (1956) [Russisch].

Bewiesen wird: Sind die Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$ und $g(y_1, \dots, y_m)$ summierbar im ganzen Raum der n bzw. m Veränderlichen samt ihrer p -ten bzw. q -ten Potenz ($m \leq n$, $1/p + 1/q > 1$), so konvergiert das Integral

$$I = \int \dots \int_{r^\lambda}^{n+m} f(x_1, \dots, x_n) g(y_1, \dots, y_m) dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_m$$

mit

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=m+1}^n x_i^2}, \quad \lambda = n \left(1 - \frac{1}{p}\right) + m \left(1 - \frac{1}{q}\right),$$

und es besteht die Ungleichung $I \leq K(m, n, p, q) \|f\|_{L_p^{(n)}} \cdot \|g\|_{L_q^{(m)}}$ mit einer von f und g unabhängigen Konstanten K . Für diese gilt eine Abschätzung durch ein Produkt zweier Integrale von Wurzelausdrücken über den Raum R_{n-m} bzw. R_m mit einem Koeffizienten, in den die Oberfläche der Einheitskugel im R_m eingeht. Diese Ungleichung ist eine Verallgemeinerung der Hilbert-Rieszschen Ungleichung, die aus ihr für $m = n = 1$ entsteht. Für $m = n$ und ohne Angabe der Abschätzung für K ist sie bereits von Sobolev angegeben worden mit einem anderen Beweis (s. dies. Zbl. 22, 148). Der neue Beweis wird durch eine längere Rechnung geführt, die in einer fortlaufenden Abschätzung von I nach oben bei wiederholter Anwendung der Hölderschen Ungleichung besteht. Dabei kann man f und g nichtnegativ annehmen und darüber hinaus auf Grund eines Hilfssatzes von Sobolev $f(x_1, \dots, x_n)$

als nichtwachsende Funktion von $r_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}$ für fast alle x_{m+1}, \dots, x_n und $g(y_1, \dots, y_m)$ desgl. von $r_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m y_i^2}$. — Als unmittelbare Folgerung daraus auf Grund eines bekannten Satzes der Funktionalanalysis wird gezeigt, daß das Integral

$$U(y_1, \dots, y_m) = \int \dots \int \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{r^\lambda} dx_1 \dots dx_n$$

unter den gemachten Voraussetzungen einen beschränkten Operator im Banachschen Raum $L_p^{(n)}$ (mit dem zugeordneten Raum $L_{q'}^{(m)}$) darstellt mit der Schranke $K(m, n, p, q)$:

$$\|U\|_{L_{q'}^{(m)}} \leq K(m, n, p, q) \|f\|_{L_p^{(n)}} \quad \left(q' = \frac{m}{\lambda - n(1 - 1/p)}\right).$$

E. Svenson.

Sofronov, I. D.: On certain properties of singular operators and solutions of singular integral equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 940—942 (1956) [Russisch].

Ohne Beweis werden im Raum H_α der periodischen Funktionen $\varphi(x)$ (Periode 2π), die der Hölderschen Bedingung mit einem Exponenten $0 < \alpha \leq 1$ genügen ($A_\varphi^{(\alpha)} = \sup_{x, x' \in [0, 2\pi]} |\varphi(x) - \varphi(x')|/|x - x'|^\alpha$ sei die entsprechende Höldersche Konstante von φ), eine Reihe von Sätzen angegeben über das Verhalten der singulären Operatoren

$$G_0 \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{t-x}{2} \varphi(t) dt, \quad G \varphi = a(x) \varphi(x) + \frac{n(x, x)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{t-x}{2} \varphi(t) dt,$$

$$T \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [n(t, x) - n(x, x)] \operatorname{ctg} \frac{t-x}{2} \varphi(t) dt, \quad K \varphi = G \varphi + T \varphi$$

bezüglich der Übertragung der Gültigkeit der Hölderschen Bedingung durch sie und über die Abschätzung der Konstanten A nach der Transformation; ferner ein auf den gleichen Funktionenraum bezogener Satz über die Differenzierbarkeit von

$I(x) = \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{t-x}{2} \varphi(t, x) dt$. Mit Hilfe dieser Sätze kann man den in der Mono-

ographie über singuläre Integralgleichungen von Muschelišvili (1947; engl. Übersetzung s. dies. Zbl. 41, 226) enthaltenen Satz beweisen: Ist die Gleichung

$$K\varphi \equiv a(x)\varphi(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(t, x) \operatorname{ctg} \frac{t-x}{2} \varphi(t) dt = f(x)$$

für jede rechte Seite eindeutig lösbar und genügen alle ihre Koeffizientenfunktionen der Hölderschen Bedingung mit einem Exponenten $0 < \alpha \leq 1$, so genügt ihr auch die Lösung, und zwar für jeden Exponenten $0 < \beta < \alpha$. Darüber hinaus kann man den Satz ergänzen durch eine Abschätzung der Konstanten $A_{\varphi}^{(\beta)}$, die allerdings reichlich kompliziert ausfällt. Auch über die Frage der wiederholten Differenzierbarkeit der Lösung kann man eine Aussage machen: Wenn alle Koeffizienten der Gleichung m mal (gegebenenfalls partiell) differenzierbar sind und sämtliche Ableitungen der Hölderschen Bedingung mit dem Exponenten α genügen, so zeigt die Lösung das gleiche Verhalten für jeden Exponenten $\beta < \alpha$. *E. Svenson.*

Sofronov, I. D.: On the approximate solution of singular integral equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 37—39 (1956) [Russisch].

Zur praktischen Lösung der im vorstehenden Referat erwähnten singulären Integralgleichung schlägt Verf. zwei algebraische Systeme linearer Gleichungen mit endlich vielen Unbekannten vor, die die Eigenschaft haben, Näherungslösungen zu liefern, und die bequem mit Rechenmaschinen lösbar sind. Es sind dieses

$$(1) \quad a_i \tilde{\varphi}_i + \sum_{k=0}^{n-1} a_{ik} \tilde{\varphi}_k = f_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

mit den Bezeichnungen $x_i = i h$, $h = 2\pi/n$, $a_i = a(x_i)$, $f_i = f(x_i)$,

$$a_{ik} = \frac{1}{2\pi} \int_{x_k-1}^{x_k+1} n(t, x_i) \operatorname{ctg} \frac{t-x_i}{2} \eta_k(t) dt,$$

$$\eta_k(t) = \frac{t-x_{k-1}}{h} \quad \text{für } t \leq x_k, \quad = \frac{x_{k+1}-t}{h} \quad \text{für } t \geq x_k.$$

Bei der Berechnung von a_{ii} wird der Hauptwert des Integrals genommen.

$$(2) \quad a_i \tilde{\varphi}_i + \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} n_{ik} \operatorname{ctg} \frac{x_k - x_i}{2} \tilde{\varphi}_k = f_i \quad (i = 0, 1, \dots, 2n-1)$$

mit $x_i = i h$, $h = \pi/n$, $n_{ik} = n(x_i, x_k)$, $a_i = a(x_i)$, $f_i = f(x_i)$. Σ' bedeutet, daß nur über die k summiert wird, für die $k-i$ ungerade ausfällt. — Für genügend große n ist die Lösbarkeit beider Systeme gesichert. Aus den Lösungen wird im ersten Fall durch lineare, im zweiten durch trigonometrische Interpolation eine kontinuierliche Näherungslösung der vorgelegten Gleichung gewonnen und in beiden Fällen werden Abschätzungen für die Norm der Abweichung von der wahren Lösung angegeben. Diese haben aber ebenfalls eine recht komplizierte Form.

E. Svenson.

Schaefer, Helmut: Über singuläre Integralgleichungen und eine Klasse von Homomorphismen in lokalkonvexen Räumen. Math. Z. 66, 147—163 (1956).

Die Arbeit des Verf. gliedert sich in drei Teile. Im ersten Abschnitt werden die zur Herleitung der Lösbarkeitseigenschaften singulärer Integralgleichungen erforderlichen Hilfsmittel bereitgestellt. Sei \mathfrak{X} ein (nicht notwendig separabler) Hilbert-Raum. Eine linear-stetige Abbildung von \mathfrak{X} in sich heiße σ -Transformation (oder auch verallgemeinerter Fredholmscher Operator) genau dann, wenn $T(\mathfrak{X})$ abgeschlossen und der Quotientenraum $\mathfrak{X}/T(\mathfrak{X})$ und der Nullraum $\mathfrak{N}(T)$ von T endlich-dimensional sind. Es kann dann gezeigt werden, daß die Menge Σ aller σ -Transformationen eine Halbgruppe bildet, welche überdies offen in der Banach-Algebra \mathfrak{R} der

linear-stetigen Abbildungen von \mathfrak{X} in sich ist. Bezeichnet man mit Φ das Ideal der linear-vollstetigen Abbilden von \mathfrak{X} in sich, so gilt ferner $\Sigma + \Phi \subseteq \Sigma$. Der Beweis dafür wird mittels der folgenden Charakterisierung von Σ erbracht: Sei $T \in \mathfrak{R}$ und $\dim \mathfrak{X} \geq \aleph_0$; es gilt — unter dieser Voraussetzung — $T \in \Sigma$ genau dann, wenn Elemente S_1, S_2 aus Σ existieren, so daß $S_1 T S_2 = I$ ($=$ Identität) ist. Nun kann das Verhalten eines Fredholmschen Operators bzgl. der Gleichung $Tx = y$ durch die sog. „determinantenfreien“ Sätze charakterisiert werden; insbesondere stimmen die (endlichen) Dimensionen der mit T verknüpften Nullräume überein, was bei σ -Transformationen i. a. nicht mehr der Fall ist. Die Differenz dieser Dimensionen, die Charakteristik $\kappa(T)$ von T , genügt dann dem „logarithmischen“ Gesetz $\kappa(T_1 T_2) = \kappa(T_1) + \kappa(T_2)$. Verf. zeigt unter Benutzung der obigen Charakterisierung von Σ , daß Σ darstellbar ist als Vereinigung offener Mengen, auf denen κ konstant ist. Schließlich wird mittels der Rieszschen Theorie für Operatoren der Form $T_0 + \lambda K$ ($T_0 \in \Sigma$, $K \in \Phi$) ein zu den Resultaten der Fredholmschen Theorie analoger Satz hergeleitet. Im zweiten Abschnitt wendet Verf. die erzielten Ergebnisse auf singuläre Integralgleichungen der Form

$$(*) \quad a(z) \varphi(z) + \frac{b(z)}{\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \lambda \int_{\mathfrak{C}} k(z, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta = \psi(z) \quad (z \in \mathfrak{C})$$

an (\mathfrak{C} stetig gekrümmte Jordankurve, die den Ursprung der z -Ebene im Inneren enthält). Es kann unter der Regularitätsvoraussetzung: $a^2(z) - b^2(z) \neq 0$ auf \mathfrak{C} gezeigt werden, daß die linke Seite von (*) eine σ -Transformation auf dem Hilbert-Raum $L^2(\mathfrak{C})$ der auf \mathfrak{C} quadratisch summierbaren (komplexwertigen) Funktionen darstellt, woraus Verf. dann die gewünschten Aussagen über die Lösbarkeit der Gleichung (*) und die Dimensionen der zugehörigen Nullräume gewinnt. Mit der Übertragung der Theorie auf beliebige lokalkonvexe Räume beschäftigt sich, der dritte Abschnitt. Die hier als σ -Transformationen bezeichneten Homomorphismen sind naturgemäße Verallgemeinerungen der vorher in Hilbert-Räumen betrachteten verallgemeinerten Fredholmschen Operatoren. Es zeigt sich, daß alle wesentlichen Merkmale verallgemeinerter Fredholmscher Operatoren erhalten bleiben. An Stelle der oben angegebenen Charakterisierung (für Hilbert-Räume) tritt jetzt der folgende Satz: Es seien $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ beliebige lokalkonvexe Räume. Eine linear-stetige Abbildung T ist genau dann σ -Transformation (von \mathfrak{C}_1 in \mathfrak{C}_2) wenn zwei linear-stetige Abbildungen S_1, S_2 von \mathfrak{C}_1 in \mathfrak{C}_2 existieren, für welche gilt:

$$S_1 T = I - L_1 \quad \text{und} \quad T S_2 = I - L_2,$$

wo L_i eine linear-stetige Abbildung endlichen Ranges von \mathfrak{C}_i in sich ist ($i = 1, 2$). Dabei können S_1, S_2 so gewählt werden, daß $S_1 = S_2$ gilt und die L_i (stetige) Projektionsoperatoren sind.

H. Pachale.

Maravall Casesnoves, Dario: Neue Typen von Differential- und Integrodifferentialgleichungen. Neue Oszillationsphänomene. Revista Acad. Ci. Madrid 50, 287—435 (1956) [Spanisch].

Es werden unter Verwendung der Laplace- und Fourier-Transformation folgende Typen von Funktionalgleichungen behandelt: I. Die homogene Integrodifferentialgleichung

$$\sum_{r=0}^n a_r y^{(r)}(t) + \sum_{s=0}^m \int_0^\infty K_s(\tau) y^{(s)}(t - \tau) d\tau = 0.$$

II. Die entsprechende inhomogene Gleichung, insbesondere für den Fall, daß die rechte Seite eine Schwingung $M \cos \omega t$ ist. III. Systeme von Gleichungen des vorigen Typs. IV. Gleichungen, bei denen die a_r Funktionen von t und die Integrationsgrenzen variabel sind. V. Gleichungen, bei denen die Integrationsgrenzen

nicht 0 und ∞ , sondern beliebige Zahlen a, b sind. VI. Integrodifferentialgleichungen in partiellen Ableitungen. VII. Differentialgleichungen nichtganzer Ordnung, ein Spezialfall der obigen Gleichungen mit variablen Integralgrenzen. VIII. Beispiele aus Geometrie und Mechanik. IX. Der Differentiationsindex wird als stetige Variable betrachtet, nach der nunmehr differenziert wird. Die hieraus entspringenden Differentialgleichungen werden betrachtet. X. Stochastische Differentialgleichungen vom Typus $dy = (\mu_1 dx + \sqrt{\mu_2 dx} \eta) y$ und Verallgemeinerungen. *G. Doetsch.*

Zygmund, A.: Hilbert transforms in E^n . Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 140—151 (1956).

Um die eindimensionale Hilbert-Transformation (1) $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt$ auf

den n -dimensionalen Euklidischen Raum E^n mit den Punkten $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ zu verallgemeinern, wird das Integral (1) als Faltung aufgefaßt und der Kern $1/\pi x$ durch einen allgemeineren der Form $K(x) = \Omega(x')/|x|^n$ ersetzt, wo x' den Schnittpunkt des Strahls Ox mit der Oberfläche der Einheitskugel Σ bedeutet. Je nach der Wahl der auf Σ definierten Funktion Ω erhält man verschiedene Hilbert-Transformierte

$$\tilde{f}(x) = f * K = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{f}_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} f(y) K(x-y) dy$$

(das Integral erstreckt über E^n). Im Fall $n = 1$ besteht Σ aus den Punkten $x' = \pm 1$, und für $K(x) = 1/\pi x$, $\Omega(x') = \text{sign } x'$ ergibt sich (1). Satz 1. K erfülle die Bedingungen: (i) Das Integral von Ω über Σ ist 0, (ii) Ω genügt einer Lipschitz-Bedingung der Ordnung $\alpha > 0$. Für $f \in L^p(E^n)$, $p \geq 1$, existiert $\tilde{f}(x)$ fast überall. Für $p > 1$ ist $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leq A_p \|f\|_p$, $\|\tilde{f}\|_p \leq A_p \|f\|_p$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\tilde{f} - \tilde{f}_\varepsilon\|_p = 0$, $\|\tilde{f}_*\|_p \leq A_p \|f\|_p$

mit $\tilde{f}_*(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|x-y|>\varepsilon} f(y) K(x-y) dy \right|$. Satz 2. Wenn Ω nur (i) erfüllt und

ungerade ist, so konvergiert $\tilde{f} = f * K$ für $f \in L^p(E^n)$, $p > 1$, fast überall, und \tilde{f}_* erfüllt dieselbe Ungleichung wie in Satz 1. Satz 3. Wenn Ω gerade, $\Omega(x') \log^+ |\Omega(x')|$ über Σ integrierbar und (i) erfüllt ist, so gelten die Aussagen von Satz 1 für alle $f \in L^p(E^n)$, $p > 1$. Der Begriff der Hilbert-Transformation wird auf den Fall periodischer Funktionen in Analogie zu der „konjugierten Funktion“

$f^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(y) \frac{1}{2} \text{ctg } \frac{1}{2} (x-y) dy$ ausgedehnt, indem ein Kern konstruiert wird,

der alle Gitterpunktsvektoren des E^n als Perioden hat und für $n = 1$ mit $\frac{1}{2} \text{ctg } \frac{1}{2} (x-y)$ zusammenfällt. Ferner wird das Analogon zu der „diskreten“

Hilbert-Transformation $\tilde{\xi}_\mu = \sum_{\nu \neq \mu} \frac{\xi_\nu}{\mu - \nu}$ und zu der Transformation

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \frac{h(t)}{t} dt \quad \text{mit} \quad h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} d\gamma(u)$$

(radiale Kerne) betrachtet. *G. Doetsch.*

Mehra, A. N.: On Meijer transform of two variables. Bull. Calcutta math. Soc. 48, 83—94 (1956).

Whittakers Funktion $W^{k,m}(z)$ benutzend, behandelt Verf. die Integralabb. \mathfrak{M}_2 $\varphi(p, q) = p q \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-\frac{1}{2} (p x + q y) \right] W_{k+1/2, m}(p x) W_{k_1+1/2, m_1}(q y) (p x)^{-k-1/2} (q y)^{-k_1-1/2} f(x, y) dx dy$, die die von Meijer (dies. Zbl. 25, 184) eingeführte \mathfrak{M}_1 von einer auf zwei Veränderliche ausdehnt. Sonderfälle: A) $k = \pm m$, $k_1 = \pm m_1$; \mathfrak{M}_2

wird die zweistufige Laplacesche Abbildung (A.). — B) $k = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$, $m = \pm \frac{1}{4}$, $k_1 = \frac{1}{2}n_1 - \frac{1}{4}$, $m_1 = \pm \frac{1}{4}$; \mathfrak{M}_2 wird die zweistufige A. durch das Produkt $D_n D_{n_1}$ von Funktionen des parabolischen Zylinders. — C) $k = \frac{1}{2}n + l$, $m = \pm \frac{1}{2}n$, $k_1 = \frac{1}{2}n_1 + l_1$, $m_1 = \pm \frac{1}{2}n_1$ mit natürlichen l, l_1 ; \mathfrak{M}_2 wird die zweistufige A. durch das Produkt $L_l^n L_{l_1}^{n_1}$ Laguerrescher Polynome. — Der weitere Inhalt der Arbeit gliedert sich in drei Teile: I. Allgemeine für \mathfrak{M}_2 gültige Regeln. — II. A. einfacher Funktionen wie $f(x, y) = a) x^n y^{m_1}$ (lies so); b) $(x + y)^n$ mit natürlichem n ; c) $(xy)^{n/2} J_n [2(xy)^{1/2}]$, mit d), e) $n = \pm \frac{1}{2}$; f) $x^\lambda y^\mu e^{-ax-by}$; g) $H_\nu [2(xy)^{1/2}]$ mit Struves Funktion $H_\nu(z)$; h) $L_\nu [2(xy)^{1/2}]$ mit Struves Funktion $L_\nu(z)$ imaginären Arguments; i) $I_\nu [2(xy)^{1/2}]$ mit ebensolchen Besselschen Funktionen; j) $\frac{2^n x^n y^n}{n! n!} F_{03}(n+1, \frac{1}{2}n+1, \frac{1}{2}n+\frac{1}{2}; x^2 y^2)$. — III. Verschiedene Ergebnisse über \mathfrak{M}_2 mit besonderen Parameterwerten, darunter der Ausdruck gewisser Doppelintegrale über das Urgebiet, in deren Integranden p und q auftreten, durch abbrechende Reihen von Bildfunktionen. Der erste dieser vier Sätze besagt: Ist $\varphi_{n-r, n-r}(p, q)$ das $(L_{n-r}^{\alpha+2r} L_{n-r}^{\alpha+2r})$ -Bild [s. o. B)] von $f(x, y)$ (lies so auf S. 89, Z. — 4), dann ist

$$p q \int_0^\infty \int_0^\infty (p q x y)^{-n} e^{-p x - q y} L_n^\alpha(p x + q y) f(x, y) dx dy \\ = \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r (\alpha + 2r) \Gamma(\alpha + r)}{(n-r)! r! \Gamma(\alpha + n + r + 1)} \varphi_{n-r, n-r}(p, q).$$

Beispiel: $f(x, y) = (xy)^{n/2} J_n [2(xy)^{1/2}]$; II, c) mit $k = \frac{1}{2}\alpha + n$, $m = \frac{1}{2}\alpha + r$ ist zu benutzen.

L. Koschmieder.

Rooney, P. G.: On some properties of certain fractional integrals. Trans. roy. Soc. Canada, Sect III, III. Ser. 50, 61—70 (1956).

Soit $f(x)$ une fonction définie pour $0 < x < +\infty$. Posons

$$\mathfrak{S}_{r,s} f(x) = \frac{x^{-r-s}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x-t)^{r-1} t^s f(t) dt, \quad \mathfrak{R}_{r,s} f(x) = \frac{x^s}{\Gamma(r)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{r-1} t^{-r-s} f(t) dt.$$

Dans le cas $r=1$, $s=0$, l'A. a montré (ce Zbl. 66, 350) que, si f appartient à l'un des espaces $A(\alpha, p)$, $M(\alpha, p)$ de G. G. Lorentz, il en est de même de $\mathfrak{S}_{r,s} f$, $\mathfrak{R}_{r,s} f$ (moyennant certaines conditions sur α, p). Ici, on étend ces résultats au cas général. — La transformée de Laplace de $\mathfrak{S}_{r,s} f$ est du type

$$\mathfrak{B}_{k,m} f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st/2} W_{k+1/2, m}(s t) (s t)^{m-1/2} f(t) dt,$$

où W est une fonction de Whittaker; appliquant ses résultats antérieurs (loc. cit.), l'A. en déduit que, si $f \in A(\alpha, p)$ (resp. $M(\alpha, p)$), $s^{-1} \mathfrak{B}_{k,m} f(s^{-1}) \in A(\alpha, p)$ (resp. $M(\alpha, p)$) (moyennant certaines conditions sur α, p). Résultats analogues en partant de $\mathfrak{R}_{r,s} f$.

J. Dixmier.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Deprit, André: Sous-espaces vectoriels d'un espace localement convexe séparé. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 42, 1012—1017 (1956).

L'A. donne une démonstration simple de la décomposition d'un espace vectoriel trouvé par le rapporteur (v. ce Zbl. 57, 337) par rapport à deux systèmes de suites monotones de sous-espaces, en supposant l'espace localement convexe séparé.

M. Hukuhara.

Pavel, Monica: Quelques propriétés des rétractes linéaires. An. Univ. C. I. Parhon București, Ser. Ști. Natur. Nr. 10, 19—21, russ. und französ. Zusammenfassung 21—22 (1956) [Rumänisch].

Einige Transitivitäts- und Erweiterungseigenschaften linearer Transformationen werden mit Hilfe des Begriffes eines linearen Retraktes formuliert und bewiesen.
T. Ganea.

Kasahara, Shouro: Sur un théorème de Gelfand. Proc. Japan Acad. 32, 131—134 (1956).

Soient E un espace localement convexe séparé, \mathfrak{S} un ensemble de disques fermés bornés de E tel que $\mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(E, E)$ soit séparé, A une sous-algèbre de $\mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(E, E)$ contenant 1 et les endomorphismes de rang 1 de E . Si l'ensemble des éléments inversibles de A est ouvert, E est normable. (Erratum: l. 5 de la prop. 1, remplacer "des" par "les"). D'autres propositions assurent que E' ou F sont complets si certains sous-espaces de $\mathfrak{L}(E, F)$ le sont.
J. Dixmier.

Gurevič, L. A.: Über äquivalente Systeme. Trudy Sem. funkcional. Analizu 56, Nr. 2, 47—54 (1956) [Russisch].

Two countable sets $\{e_i\}$ and $\{e_i^*\}$ of elements in a Banach space B are said to be equivalent if and only if there is an isomorphic (i. e., linear, one-to-one, continuous) transformation U of B onto itself such that $U e_i = e_i^*$. The author proves certain theorems concerning the relation between equivalence and each of the following: completeness (the closed linear span of $\{e_i\}$ is B itself); minimality (no e_i belongs to the closed linear span determined by the others); regularity ($\{e_i\}$ is complete and minimal, and the corresponding system $\{f_i\}$ of functionals such that $f_i(e_k) = \delta_{i,k}$ is such that $f_i(x) = 0$ for all i implies $x = 0$); being a basis (each $x \in B$ is uniquely representable as $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$ for some numbers ξ_i); being a basis of unconditional convergence (the series $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) f(e_i)$ converges absolutely for each $x \in B$ and each $f \in B^*$); and being a Riesz basis $\{\Phi_i\}$ in a Hilbert space H (the convergence of the numerical series $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2$ implies the convergence of $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \Phi_i$, and $\sum_{i=1}^{\infty} |(f, \Phi^i)|^2$ converges for each $f \in H$, where $\Phi^i \in H$ and $(\Phi_i, \Phi^k) = \delta_{i,k}$). Errata: P. 48, l. 23, replace " α_i " by " a_i " and " ψ_i " by " ψ "; p. 49, lines 6 and 9, replace " e_i " by " e_i^* " in the expression for $U x$; p. 54, lines 3 and 5, replace "(18)" by "(19)".
L. F. Meyers.

Singer, Ivan: Sur l'extension des fonctionnelles linéaires. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 1, Nr. 2, 99—106 (1956).

Ist E ein reeller Banachraum, M ein linearer Teilraum von E , φ ein lineares Funktional aus M^* , Φ eine Teilmenge aus M^* , so wird gesetzt:

$$\mathfrak{F}_{\varphi} = (f : f \in E^*, \|f\| = \|\varphi\|, f = \varphi \text{ auf } M), \quad \mathfrak{F}_{\Phi} = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \mathfrak{F}_{\varphi}.$$

Im folgenden besteht Φ stets nur aus Elementen gleicher Norm r . Es wird gezeigt: \mathfrak{F}_{Φ} ist genau dann konvex (w^* -abgeschlossen, regulär-konvex), wenn Φ die betreffende Eigenschaft in M^* hat. \mathfrak{F}_{Φ} ist genau dann eine Wand der Kugel S_{E^*} um 0 mit Radius r in E^* , wenn Φ eine Wand der entsprechenden Kugel $S_{M^*} \subset M^*$ ist. (Eine Menge $\mathfrak{R} \subset E^*$ heißt regulär-konvex, wenn es zu jedem $g \in E^*$, $g \notin \mathfrak{R}$, ein $x_0 \in E$ gibt, so daß $\sup_{f \in \mathfrak{R}} f(x_0) < g(x_0)$; norm-beschränkte \mathfrak{R} , wie sie hier vorkommen, sind genau dann regulär-konvex, wenn sie konvex und w^* -abgeschlossen sind; eine konvexe Teilmenge W einer konvexen Menge S heißt eine Wand von S , wenn jede offene Strecke aus S , die mit W Punkte gemein hat, ganz in W liegt.) Insbesondere

ist also \mathfrak{F}_φ ($\varphi \in M^*$) stets konvex und w^* -abgeschlossen; es ist eine Wand, wenn φ Extrempunkt von S_{M^*} ist. Mit Krejn-Milman folgt daraus, daß sich jeder Extrempunkt von S_{M^*} zu einem ebensolchen von S_{E^*} fortsetzen läßt; S_{E^*} hat also mindestens soviele Extrempunkte wie S_{M^*} . An einem einfachen Beispiel wird abschließend gezeigt, daß umgekehrt ein Extrempunkt von S_{E^*} nicht notwendig die Erweiterung eines Extrempunktes von S_{M^*} zu sein braucht. Verf. bemerkt, daß diese Ergebnisse in einer anderen Arbeit von ihm über „beste Approximation in B -Räumen“ angewendet werden.

H. Günzler.

Arens, Richard and Kenneth Hoffman: Algebraic extension of normed algebras. Proc. Amer. math. Soc. 7, 203—210 (1956).

Soit A une algèbre complexe normée commutative avec unité. Soit $\alpha(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n \in A[X]$. Soit $t > 0$ tel que $\|a_0\| + \|a_1\| t + \dots + \|a_{n-1}\| t^{n-1} \leq t^n$. La norme

$$\|c_0 + c_1 X + \dots + c_p X^p\| = \|c_0\| + \|c_1\| t + \dots + \|c_p\| t^p$$

sur $A[X]$ est telle que l'idéal $(\alpha(X))$ soit fermé et que la restriction à A de l'application canonique $A[X] \rightarrow B = A[X]/(\alpha(X))$ soit isométrique. D'où un plongement de A dans une algèbre normée B où $\alpha(X)$ a une racine. Si l'intersection des idéaux maximaux fermés de A est $\{0\}$, B possède la même propriété pourvu que le discriminant de $\alpha(X)$ ne soit pas diviseur de zéro. Etude du cas où cette dernière condition n'est pas vérifiée.

J. Dixmier.

Willcox, Alfred B.: Some structure theorems for a class of Banach algebras. Pacific J. Math. 6, 177—192 (1956).

Soit R une algèbre de Banach à élément unité; soit $S(R)$ l'ensemble des idéaux bilatères maximaux, avec la topologie de Stone-Jacobson. L'A. dit que R est une (GS)-algèbre si $S(R)$ est séparé. (Lorsque R n'a pas d'élément unité, cas qu'on laissera de côté dans cette revue, on impose que l'algèbre déduite de R par adjonction d'une unité soit une (GS)-algèbre.) Exemples: les algèbres de Banach commutatives régulières, l'algèbre d'un groupe compact, les AW^* -algèbres, l'algèbre des matrices à n lignes et n colonnes à éléments fonctions dérivables sur $[0, 1]$. — Il s'agit de généraliser aux (GS)-algèbres certains résultats de Šilov sur les algèbres commutatives régulières, et les raisonnements sont en général du même type que ceux de Šilov. Par exemple, si R est fortement semi-simple, si tout idéal fermé primaire est maximal, et si une „condition de Ditkin généralisée“ est satisfaite, tout idéal bilatère fermé I tel que la frontière du spectre de I ne contienne aucun ensemble parfait est l'intersection des idéaux maximaux le contenant. Pour tout $M \in S(R)$, soit $J(M)$ l'ensemble des $x \in R$ tels que $x \in N$ pour tout $N \in S(R)$ assez voisin de M , et $J(M)^c$ l'adhérence de $J(M)$; si R est fortement semi-simple, $J(M)^c$ est le plus petit idéal fermé primaire contenu dans M ; l'A. considère la famille des algèbres primaires $R/J(M)^c$, pour $M \in S(R)$, et étudie partiellement les relations entre R et cette famille d'algèbres primaires.

J. Dixmier.

Rosenblum, Marvin: On the operator equation $BX - XA = Q$. Duke math. J. 23, 263—269 (1956).

Let \mathfrak{B} be a Banach algebra with elements A, B, Q, \dots and identity element I . The author studies the operator $T(Q) = BQ - QA$ over \mathfrak{B} . The main results are: (i) $\sigma(T) \subset \sigma(B) - \sigma(A) = \{\lambda - \mu; \lambda \in \sigma(B), \mu \in \sigma(A)\}$, where $\sigma(A)$ [resp. $\sigma(B)$] is the spectrum of A (resp. B) as element of \mathfrak{B} , and $\sigma(T)$ the spectrum of T as operator on \mathfrak{B} ; (ii) if $f(\lambda)$ is a complex-valued function holomorphic in an open set including $\sigma(B) - \sigma(A)$, then

$$f(T)(Q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b(D)} f(B - zI) Q (zI - A)^{-1} dz,$$

where D is a suitable domain containing $\sigma(A)$, $b(D)$ its boundary and $f(T)$ [resp. $f(B - zI)$] is Dunford's extension by T (resp. by $B - zI$) of $f(\lambda)$. Applications to a theorem of Heinz see: this Zbl. 43, 326) and to the case of finite matrices are also given.

C. Foias.

Isiwata, Takesi: Structures of a uniform space X and $C(X)$. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A 5, 174—184 (1956).

Let X be a completely regular T_1 -space and $B(X)$ the totality of all real-valued bounded continuous functions defined over X . In this paper the author considers $B(X)$ as a Banach algebra with the usual definition of addition, multiplication and norm. A subalgebra S of $B(X)$ is called completely regular if for any closed set K of X and any point x_0 of $X - K$ there exists $\varphi \in S$ such that $|\varphi(x_0)| = \|\varphi\|$, $\sup \{\varphi(x) | x \in K\} < \|\varphi\|$; S is called analytic if S contains all constant functions on X . The main theorem reads as follows: There exists a one-to-one correspondence between the family of all equivalence classes of totally bounded uniformities (= uniform structures) of X and the family of closed, analytic, completely regular subalgebras of the Banach algebra $B(X)$. Some related results and applications are given.

K. Morita.

Isiwata, Takeshi: On a completely regular space X and $T(X)$. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A 5, 227—236 (1956).

Let X be a completely regular T_1 -space and $B(X)$ the Banach algebra consisting of all real-valued bounded continuous functions on X . A subalgebra S of $B(X)$ is called an sp-subalgebra if for any distinct points x_1 and x_2 of X there exists $\varphi \in S$ such that $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Let $\beta(X)$ be the Čech-compactification of X ; an upper semi-continuous decomposition of $\beta(X)$ is called an X -decomposition of $\beta(X)$ if each set of the decomposition contains at most one point of X . The author first studies the relations between the family of sp-subalgebras of $B(X)$, the set of all X -decompositions of $\beta(X)$ and the family $T(X)$ of all topologies weaker than the original topology of X . Next he proves that if X is locally compact then the cardinal number of the set $T_0(X)$ of minimal topologies weaker than the original topology of X is greater than the cardinal number of X and the original topology of X is given as the join of two minimal topologies, and characterizes a space with a unique uniform structure by means of $T(X)$. Finally he generalizes a result of E. Hewitt for Q -spaces (this Zbl. 34, 64) to the case of completely regular spaces.

K. Morita.

Arens, Richard: A Banach algebra generalization of conformal mappings of the disc. Trans. Amer. math. Soc. 81, 501—513 (1956).

Die Theorie von Arens und Singer [s. Trans. Amer. math. Soc. 81, 379—393 (1956), insbesondere wegen der im folgenden benutzten Bezeichnungen und Resultate] wird in mehreren Punkten ergänzt. — 1. Ist G eine vollständig archimedisch geordnete diskrete abelsche Gruppe (also isomorph einer Untergruppe g der additiven Gruppe der reellen Zahlen), G_+ die Menge derjenigen Elemente von G , die größer oder gleich der Identität sind, so sind die Algebren A_0 bzw. A_1 zu gewissen Algebren $AP_0(g)$ bzw. $AP_1(g)$ gleichmäßig fastperiodischer Funktionen Φ' in der Halbebene $R(z) \geq 0$ isomorph und isometrisch: Bezeichnet $\Phi' \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n z}$

die Fourier-Entwicklung von Φ' , so ist $AP_0(g)$ die Menge derjenigen Φ' , deren Exponenten $\lambda_n \leq 0$ sind und zu g gehören. $AP_1(g)$ ist die Menge derjenigen $\Phi' \in AP_0(g)$, für die $\sum_n |a_n| < \infty$ ist. — 2. Eine teilweise geordnete abelsche Gruppe V heißt schwach archimedisch geordnet, wenn jedes Element von V Differenz nicht-negativer Elemente ist und wenn zu jedem $0 \neq v \in V$ ein Homomorphismus h in die additive Gruppe der reellen Zahlen mit $h(v) \neq 0$ und $h(t) \geq 0$ für $t \geq 0$, $t \in V$, existiert. — Ein Charakter ζ von G_+ heißt ein singulärer Charakter von G_+ , wenn

für gewisse $x \in G_+$ $\zeta(x) = 0$ gilt. Die Menge Ω aller singulären ζ ist ein Analogon des „Ursprungs“ in der klassischen Funktionentheorie. Satz: G sei eine schwach archimedisch geordnete diskrete abelsche Gruppe, Φ eine Funktion, die auf Δ ein Element von A_0 darstellt. Genau dann besitzt Φ die Eigenschaft $\Phi(\zeta) = c \zeta(x)$, c fest, für alle $\zeta \in \Delta$, wenn $|\Phi(x)|$ auf Γ konstant ist und wenn $\Phi(\zeta)$ für nichtsinguläres ζ nie verschwindet. 3. Jeder Automorphismus U der Banach-Algebra A_0 induziert einen Homöomorphismus U^T von Δ gemäß $U^T(\zeta)(\Phi) = \zeta(U(f))$, $f \in A_0$. Φ Funktion, die f auf Δ darstellt. Unter den oben (1., 2.) über G gemachten Voraussetzungen werden diejenigen Automorphismen U von A_0 bestimmt, für die $U^T(\Omega) \subseteq \Omega$ gilt. Sie entsprechen den nullpunktstreuen Automorphismen des Einheitskreises. Ist insbesondere G vollständig archimedisch geordnet und besitzt G kein kleinstes positives Element, so ist Ω einelementig, $\Omega = \{\varrho_0\}$, $\varrho_0(x) = 0$ für jedes von der Identität verschiedene $x \in G_+$. Die letztere Voraussetzung bezüglich G ist insbesondere erfüllt, wenn die Algebren $AP_0(g)$, $AP_1(g)$ nicht nur periodische Funktionen enthalten. — Die Bedeutung der obigen Ergebnisse für die Algebren $AP_0(g)$ und $AP_1(g)$ wird herausgearbeitet; insbesondere wird die allgemeine Form der Automorphismen von $AP_0(g)$ und $AP_1(g)$ angegeben.

E. Schieferdecker.

Feldman, Jacob: Some connections between topological and algebraic properties in rings of operators. *Duke math. J.* 23, 365—370 (1956).

Soit A une AW^* -algèbre purement infinie (= proprement infinie dans la terminologie du rapporteur). Il existe un projecteur purement infini $E \in A$ de support central 1 tel que $E \prec F$ pour tout autre projecteur purement infini F de support central 1. Ceci est obtenu en construisant une dimension sur A dont les valeurs, dans le cas d'un facteur, sont des cardinaux. Les autres résultats relient le cardinal maximum des familles de projecteurs non nuls orthogonaux (resp. orthogonaux et équivalents), et (lorsque A est une W^* -algèbre) le cardinal minimum des sous-ensembles faiblement denses de A .

J. Dixmier.

Yen, Ti: Isomorphism of unitary groups in AW^* -algebras. *Tôhoku math. J.*, II. Ser. 8, 275—280 (1956).

Soient M, N deux AW^* -algèbres sans composantes de type I_n , M_u et N_u les groupes d'éléments unitaires de M et N , ϱ un isomorphisme uniformément continu de M_u sur N_u . Alors ϱ se prolonge en la "somme" d'un isomorphisme et d'un anti-isomorphisme de M sur N . Ce résultat était dû à S. Sakai (ce Zbl. 66, 362) lorsque M et N sont des facteurs. Comme Sakai, l'A. utilise une application φ de M_s (ensemble des éléments auto-adjoints de M) dans N_s , définie par $\varrho(\exp ita) = \exp i\varphi(a)$ ($a \in M_s$, t réel).

J. Dixmier.

Mori, Tutosi: On the group structure of Boolean lattices. *Proc. Japan Acad.* 32, 423—425 (1956).

Ist μ eine positive Funktion auf einer Gruppe bezüglich der symmetrischen Differenz $a \Delta b$ aufgefaßten Booleschen Verband B , und ist $\mu(0) = 0$, so ist μ dann und nur dann ein (endlich additives) Maß, wenn für jedes $a \in B$ die Funktion $\mu(a) - 2\mu(x)$ auf der Untergruppe aller x mit $0 \leq x \leq a$ positiv definit ist. Eine Anwendung dieses Satzes ergibt, daß jedes operatorwertige Maß auf B zu einem Projektionsmaß auf einem größeren Hilbertschen Raum fortgesetzt werden kann. Ferner wird gezeigt, daß ein Operatorertring R dann und nur dann einem Produkt von Faktoren vom Typus I isomorph ist, wenn jeder kommutative Teilverband des Verbandes der Projektionen in R genügend viele im Sinn der starken Operatortopologie stetige Charaktere besitzt. Dies ist speziell der Fall, wenn die Gruppe der unitären Operatoren aus R kompakt ist.

G. Köthe.

Maeda, Shûichirô: Lengths of projections in rings of operators. *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A 20, 5—11 (1956).

Soient M une algèbre de von Neumann, Z son centre. Pour tout projecteur $P \in M$, soient $e(P)$ son support central, $[P]$ sa classe pour l'équivalence des projec-

teurs, $[P]^c$ la plus grande des classes cycliques $[a]$ telles que $[a] \leq [P]$ (si elle existe).
 Théorème 1: les 4 conditions suivantes sont équivalentes: (i) il existe un projecteur cyclique Q tel que $e(P) = e(Q)$; (ii) il existe un projecteur de genre dénombrable Q tel que $e(P) = e(Q)$; (iii) $e(P)$ est de genre dénombrable relativement à Z ; (iv) $[P]^c$ existe. Si ces conditions sont remplies, l'A. appelle longueur de P le plus petit cardinal des familles (P_α) de projecteurs cycliques tels que $\sum P_\alpha = P$. Un projecteur $Q \in Z$ est dit uniformément de longueur n si tout projecteur $Q' \in Z$, $Q' \leq Q$ qui est de genre dénombrable relativement à Z a la longueur n .
 Théorème 2: il existe une décomposition unique $1 = \sum Q_n$, où $Q_n \in Z$ et où Q_n est uniformément de longueur n . L'A. définit alors une fonction l_M sur le spectre de Z , liée aux longueurs des projecteurs de Z , et le quotient $l_M/l_{M'}$ donne un invariant unitaire de M . L'ensemble de l'article généralise des résultats de Dye (ce Zbl. 47, 111), Griffin (ce Zbl. 65, 349), Ogawara ce Zbl. 67, 352), Pallu de la Barrière (ce Zbl. 55, 339). *J. Dixmier.*

Nakamura, Masahiro and Hisaharu Umegaki: On a proposition of von Neumann.
 Kodai math. Sem. Reports 8, 142—144 (1956).

Es sei M eine halbendliche W^* -Algebra von Operatoren in einem separablen Hilbertschen Raum mit einer regulären Spur (gage) μ . Bildet p eine Projektion in M , so werde nach v. Neumann (dies. Zbl. 23, 133) definiert $x^p = pxp + (1-p)x(1-p)$ und $C_p = \{x: x \in M, x^p = x\}$. Die Verff. beweisen: Ist p_1, p_2, \dots eine Folge paarweise vertauschbarer Projektionen, so läßt sich die auf der Menge M_μ der μ -integrierbaren x aus M definierte v. Neumannsche Operation $x \rightarrow x^{[p_1|p_2|\dots]} = (L_p) \lim_n x^{[p_1|p_2|\dots|p_n]}$ fortsetzen zu der durch $C = \bigcap_i C_i$ bestimmten bedingten Erwartung $x \rightarrow x^e$ (H.

Umegaki, dies. Zbl. 72, 125), diese hängt nicht von μ ab, und C ist die Menge aller mit allen p_i vertauschbaren Elemente von M . Es ergeben sich die beiden folgenden Corollare, von denen das erste durch v. Neumann loc. cit. ohne Beweis ausgesprochen worden war: Es sei A eine abelsche W^* -Unteralgebra von M . Ist p_1, p_2, \dots eine A erzeugende Folge paarweise vertauschbarer Projektionen, so hängt die auf M definierte Operation $x \rightarrow x^{[p_1|p_2|\dots]}$ nur von A , nicht dagegen von der Folge p_1, p_2, \dots ab (ist M ein Faktor, so ist M_μ das System der Elemente endlichen Ranges, also auch unabhängig von μ). Dann und nur dann ist A maximal abelsch, wenn die durch A bestimmte bedingte Erwartung innerhalb von M_μ mit dieser Operation $x \rightarrow x^{[p_1|p_2|\dots]}$ zusammenfällt. *K. Krickeberg.*

Kramer, Vernon A.: Asymptotic inverse series. Proc. Amer. math. Soc. 7, 429—437 (1956).

Let \mathfrak{H} be a Hilbert space with inner product (Φ, Ψ) , and let $H(t) = H_0 + tH_1 + t^2H_2 + \dots$ be a symmetric operator for $0 \leq t \leq t_0$. Suppose that $H_0 \geq I$ and $H_i \geq 0$ for $i > 0$, [that is: $(H_{0i}\varphi, \varphi) \geq (\varphi, \varphi)$ for all φ belonging to the domain $D(H_0)$ of H_0 and $(H_i\psi, \psi) \geq 0$ for $\psi \in D(H_i)$]; suppose also that H_0 is the classical Friedrichs self-adjoint extension of its contraction to $D(H(t_0))$. Then, if $\hat{H}(t)$ is the Friedrichs extension of $H(t)$ and $H(t)^{-1} = A_0 + tA_1 + t^2A_2 + \dots$, where

$$A_n = \sum_{p_1 + p_2 + \dots + p_r = n} (-1)^r H_0^{-1} H_{p_1} H_0^{-1} H_{p_2} H_0^{-1} \dots H_{p_r} H_0^{-1},$$

is the formal inverse expansion of $H(t)$, the authors main theorem is the following: Let N be fixed, and $\varphi \in \mathfrak{H}$ such that $\varphi \in D(A_i)$ for $i \in N$, and $A_i \varphi \in D(H(t))$ for $i < N$; then

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-N} \left\| \tilde{H}(t)^{-1} \varphi - \sum_{i=0}^N t^i A_i \varphi \right\| = 0.$$

Under an additional assumption on φ , different estimates are given. Corresponding results for $(\tilde{H}(t)^{-1} \varphi, \psi)$ are also obtained. *C. Foias.*

Chaplanov, M. G.: Unendliche Matrizen im analytischen Raume. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 5 (71), 37—44 (1956). [Russisch].

Mit A_r bzw. \bar{A}_r wird der Raum aller $a = (a_1, a_2, \dots)$ mit $\overline{\lim}^n |a_n| \leq 1/r$ bzw. $\overline{\lim}^n |a_n| < 1/r$ bezeichnet. Die Dualität dieser Räume wurde von O. Toeplitz untersucht. Sie haben verschiedene konkrete Deutungen als Räume analytischer Funktionen, wobei sich als Konvergenz die gleichmäßige Konvergenz auf gewissen abgeschlossenen Punktmengen ergibt. Die stetigen linearen Abbildungen der A_r und \bar{A}_r untereinander werden durch unendliche Matrizen dargestellt und es wird eine Einteilung dieser Matrizen in acht verschiedene Klassen gegeben und die Klasse bestimmt, in die die adjungierte Matrix einer gegebenen Matrix fällt. Es werden dann Anwendungen dieser Ergebnisse auf Fragen über Basen und Vollständigkeit von Funktionensystemen besprochen. Ausführlicher wird berichtet über Ergebnisse in der Theorie der Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung der Form (1) $L(y) = a_0(z)y + a_1(z)y' + \dots = f(z)$ mit analytischen $a_i(z)$ und $f(z)$. Es werde vorausgesetzt, daß $L(y)$ jede ganze Funktion aus der Klasse E_σ vom Wachstumstypus höchstens σ in eine für $|x| < R$ analytische Funktion abbildet. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Matrix $\mathfrak{M} = (m_{jk})$, $m_{jk} = a_{jk} + a_{j-1, k-1} + a_{j-2, k-2}/2! + \dots$, a_{jk} der j -te Entwicklungskoeffizient von $a_k(x)$, den Raum $A_{1/\sigma}$ in den Raum A_R abbildet. Die Lösung von (1) ist äquivalent der Lösung der Matrixgleichung $\mathfrak{M}c = b$, c der Vektor der c_k aus $y(z) = \sum \frac{c_k}{k!} z^k$, b der Vektor der b_k aus $f(z) = \sum b_k z^k$. Es werden für den Fall konstanter Koeffizienten $a_i(z) = a_i$ eine Reihe von Aussagen gemacht über die Lösungen von (1), wobei das Verhalten der charakteristischen Funktion $a(z) = \sum a_i z^i$ entscheidend ist. Sind die Koeffizienten linear, $a_i(z) = a_i + b_i z$, so gilt: Es seien $a(z) = \sum a_i z^i$ und $b(z) = \sum b_i z^i$ analytisch für $|z| < R$, $b(z) \not\equiv 0$, $f(z) \in E_\sigma$. Ist $\sigma < R$ und ist $a(z)/b(z)$ in $|z| \leq \sigma$ regulär oder besitzt es nur einfache Pole mit ganzen negativen Residuen, so ist (1) unter gewissen Einschränkungen lösbar; hat $a(z)/b(z)$ $n \geq 1$ Pole, die mehrfach sind oder deren Residuen, falls der Pol einfach ist, keine negative ganze Zahl ist, so ist (1) für jedes $f(z) \in E_\sigma$ lösbar durch eine ganze Funktion aus E_σ , die von $n - m$ willkürlichen Konstanten abhängt, m die Anzahl der verschiedenen Nullstellen von $b(z)$. Auch für den Fall, daß die $a_i(z)$ Polynome höchstens zweiten Grades sind, werden gewisse Ergebnisse referiert. Ohne Beweise und ohne Literaturangaben.

G. Köthe.

Hille, Einar: Some aspect of Cauchy's problem. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 109—116 (1956).

Es wird über Ergebnisse beim abstrakten Cauchyschen Problem, als Lösung einer Differentialgleichung in Banachschen Räumen, [inzwischen in dem Buch von E. Hille und R. S. Phillips: Functional Analysis and Semi-Groups, (dies. Zbl. 78, 100), Kap. 23 dargestellt] berichtet, und es werden einfache Anwendungen auf die eindimensionale Diffusionsgleichung besprochen, bei denen Randbedingungen ähnlich wie bei Feller auftreten.

D. Morgenstern.

Barbašin (Barbashin), E. A.: On two schemes for proving the stability theorems in first approximation. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 9—11 (1956) [Russisch].

L'A. prouve pour des systemes dynamiques de type très général (sans unicité et représentant un demi groupe) deux théorèmes qui donnent un schème de démonstration pour les théorèmes de stabilité par rapport aux perturbations permanentes et pour les théorèmes de stabilité selon la première approximation. Ces schèmes ont été déjà utilisées dans le cas des systèmes d'équations différentielles ordinaires et dans le cas des systèmes d'équations à différences finies. Formulons le second théorème:

Soient $B \geq 1$ et $\alpha > 0$ tels que $\varrho[f(p, t), M] < \delta B e^{-\alpha t}$ pour $\varrho(p, M) < \delta$, $t \geq 0$, $\varrho[g(p, t), f(p, t)] < \frac{1}{4} \varrho(p, M)$ pour $0 \leq t \leq \alpha^{-1} \log 4B$. Alors $\varrho[g(p, t), M] < 4 B \delta \exp(-\alpha t \log 2 / \log 4 B)$ pour $\varrho(p, M) < \delta$, $t \geq 0$. A. Halanay.

Kyner, Walter T.: A fixed point theorem. Ann. Math. Studies 36, 197—205 (1956).

On considère l'espace des fonctions vectorielles $f(\theta)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$, périodiques en θ_k de période ω_k . On définit la transformation $g = T_\gamma(f)$ par les relations $g(\bar{\theta}) = N(\theta)f(\theta) + W[f(\theta), \theta, \gamma]$, $\bar{\theta} = V_{f_\gamma}(\theta) = \theta + \pi + U[f(\theta), \theta, \gamma]$, $W(0, \theta, 0) \equiv 0$, $\partial W(y, \theta, 0)/\partial y|_{y=0} \equiv 0$, $U(0, \theta, 0) \equiv 0$. On suppose que pour $\|f\|$ et $|\gamma|$ suffisamment petits la transformation L_{f_γ} définie par $[L_{f_\gamma} g](\theta) = g[V_{f_\gamma}(\theta)] - N(\theta)g(\theta)$ admet une inverse bornée. Alors il existe $\gamma_0 > 0$ tel que pour $|\gamma| \leq \gamma_0$ T_γ a un point fixe unique f_γ qui dépend continûment de γ et $\lim_{\gamma \rightarrow 0} f_\gamma = 0$. L'existence du point fixe est prouvée en appliquant le théorème de Schauder à la transformation $L_{f_\gamma}^{-1} W(f, \gamma)$, où $[W(f, \gamma)](\theta) = W[f(\theta), \theta, \gamma]$. Le théorème obtenu est applicable dans les cas considérés par M. Marcus et G. Hufford (voir ce. Zbl. 73, 311).

A. Halanay.

Mitrinovitch, Dragoslav S.: Sur un prodédé fournissant des équations fonctionnelles dont les solutions continues et différentiables peuvent être déterminées. Publ. Fac. Electrotechn. Univ. Belgrade, Sér. Math. Phys. 1956, Nr. 5, 8 p. (1956).

Odwaz niech bezpośrednio powiedziane, że tutaj ogólna postać równania funkcyjnego $F_1(x) + G_1(y) = F_2(x)G_2(y)$ przy założeniu warunków różniczkowalności jest dana: $F_1(x) = a_1$, $F_2(x) = a_2$, $G_2(y)$ dowolnie, $G_1(y) = a_2 G_2(y) - a_1$ oraz $G_1(y) = b_1$, $G_2(y) = b_2$, $F_2(x)$ dowolnie, $F_1(x) = b_2 F_2(x) - b_1$ są to dwa możliwe systemy równań. (To samo dotyczy także bez założeń o regularności.) Autor używa swojego wyniku do rozwiązywania (s. 53, 88) poprzednio rozwiązanych i także do ogólniejszych równań różniczkowych funkcyjnych, np. z. B. z

$$\begin{aligned} F_1(x) &= A_0 f^{(m)}(x) + A_1 f^{(m-1)}(x) + \dots + A_{m-1} f'(x) + A_m f(x), \\ G_1(y) &= B_0 f^{(n)}(y) + B_1 f^{(n-1)}(y) + \dots + B_{n-1} f'(y) + B_n f(y), \\ F_2(x) &= C_0 f^{(p)}(x) + C_1 f^{(p-1)}(x) + \dots + C_{p-1} f'(x) + C_p f(x), \\ G_2(y) &= D_0 f^{(q)}(y) + D_1 f^{(q-1)}(y) + \dots + D_{q-1} f'(y) + D_q f(y). \end{aligned}$$

Die Darstellung ist klar und leicht verständlich.

J. Aczél.

Praktische Analysis:

Schröder, Johann: Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstandsbegriff. Math. Z. 66, 111—116 (1956).

Zunächst wird der Begriff des halbgeordneten linearen Raumes \mathfrak{N} (mit Elementen ϱ, σ, \dots) so definiert, daß der Raum der stetigen Funktionen darunter fällt. \mathfrak{N} sei ein bezüglich \mathfrak{N} vollständiger metrischer Raum, d. h. jedem Elementepaar u, v aus \mathfrak{N} sei ein Abstand $\varrho(u, v) \in \mathfrak{N}$ mit den üblichen Eigenschaften zugeordnet. Durch den (nicht notwendig linearen) Operator T werde die Teilmenge \mathfrak{D} von \mathfrak{N} in \mathfrak{N} abgebildet. Ein positiver, stetiger linearer Operator P , der \mathfrak{N} in sich abbildet, heißt eine Schranke von T , wenn für jedes Paar $u, v \in \mathfrak{D}$ gilt: $\varrho(Tu, Tv) \leq P\varrho(u, v)$. Verf. beweist: Besitzt der Operator T eine Schranke P , mit der die Neumannsche Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} P^i \varrho$ bei beliebigem $\varrho \in \mathfrak{N}$ konvergiert und enthält \mathfrak{D} alle

Elemente $w \in \mathfrak{N}$, für die $\varrho(w, u_1) \leq \sigma$ gilt mit $\sigma = (E - P)^{-1} P \sigma_0$ und $\sigma_0 = \varrho(u_1, u_0)$, so liegt die Folge $u_{n+1} = T u_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) bei beliebigem $u_0 \in \mathfrak{D}$ ganz in \mathfrak{D} und konvergiert gegen ein Element u , das die einzige Lösung der Gleichung $u = T u$ aus \mathfrak{D} ist, und es gilt die Fehlerabschätzung $\varrho(u, u_1) = \sigma$. Für die praktische Durchführung der Fehlerabschätzung werden vier Vorschläge gemacht: 1. Man ermittle

$(E - P)^{-1} P$. 2. Man löse $(E - P) \sigma = P \sigma_0$ für das spezielle σ_0 ; bzw. (2') man ermittle ein Element $\tau \geq 0$ und eine Zahl α , so daß $\sigma_0 \leq \alpha \tau$ gilt, und löse die Gleichung $(E - P) \varrho = \alpha P \tau$; dann ist $\sigma \leq \varrho$. 3. Man ermittle ein $\tau \geq 0$ und zwei Zahlen α, γ mit $\sigma_0 \leq \alpha \tau$, $P \tau \leq \gamma \tau$, $\gamma < 1$; dann gilt $\sigma \leq \alpha (1 - \gamma)^{-1} P \tau$ und (größer) $\sigma \leq \alpha \gamma (1 - \gamma)^{-1} \tau$. 4. Man ermittle ein ϱ mit $(E - P) \varrho \geq P \sigma_0$; dann ist $\sigma \leq \varrho$.
J. Weissinger.

Schröder, Johann: Neue Fehlerabschätzungen für verschiedene Iterationsverfahren. Z. angew. Math. Mech. 36, 168—181 (1956).

Die Begriffe und Sätze der vorstehend referierten Arbeit werden kurz wiederholt und dann angewandt auf lineare und nichtlineare Gleichungssysteme, auf die Randwertaufgabe

$$L[y] \equiv \sum_{k=1}^m q_k(x) y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}),$$

$$U_i[y] \equiv \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{ik} y^{(k)}(a) + \beta_{ik} y^{(k)}(b) = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

mit gewissen Stetigkeits- und Lipschitzbedingungen, wobei das homogene Problem nur die triviale Lösung besitze, und auf die Anfangswertaufgabe $u_i'(x) = f_i(x, u_1, \dots, u_m)$, $u_i(a) = c_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Durch den allgemeinen Abstandsbegriff wird es möglich, Vektoren komponentenweise und Funktionen punktweise abzuschätzen und so zu wesentlich schärferen Abschätzungen zu kommen als bisher. Das wird an mehreren durchgeführten Zahlenbeispielen deutlich. Mehrere Abschätzungen werden in Gestalt unmittelbar anzuwendender, allgemeiner Sätze gegeben. Z. B. sei in obigem Randwertproblem $f(x, y)$ eine in einem Gebiet \mathfrak{G} der (x, y) -Ebene stetige Funktion, welche dort der Lipschitzbedingung $|f(x, u) - f(x, v)| \leq l(x) |u - v|$ mit stetigem $l(x)$ genügt; $G(x, \xi)$ sei die Greensche Funktion. Dann gilt: Ist

$$\gamma = \text{Max}_x \int_a^b |G(x, \xi)| l(\xi) d\xi < 1,$$

ist $y_0(x)$ eine in \mathfrak{G} verlaufende, in $[a, b]$ stetige Funktion und enthält \mathfrak{G} alle Punkte x, w mit

$$|w(x) - y_1(x)| \leq \varrho(x) \equiv \frac{\alpha}{1 - \gamma} \int_a^b |G(x, \xi)| l(\xi) d\xi, \quad \alpha = \text{Max}_x |y_1(x) - y_0(x)|,$$

so ist die Iteration $L[y_{n+1}] = f(x, y_n)$, $U_i[y_{n+1}] = c_i$ unbeschränkt durchführbar, die Folge $y_n(x)$ konvergiert gleichmäßig gegen die einzige in \mathfrak{G} verlaufende Lösung $y(x)$ der Randwertaufgabe und es gilt die Fehlerabschätzung $|y(x) - y_1(x)| \leq \varrho(x)$.

J. Weissinger.

Schröder, Johann: Anwendung funktionalanalytischer Methoden zur numerischen Behandlung von Gleichungen. Z. angew. Math. Mech. 36, 260—261 (1956).

Formulierung einiger Sätze über die iterative Lösung der Gleichung $u = T u$ in einem vollständigen metrischen bzw. — bei monotonem T — in einem halbgeordneten Raum. (Vortragsauszug.)

J. Weissinger.

64582 Collatz, L.: Fehlermaßprinzipien in der praktischen Analysis. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 209—215 (1956).

Ist $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in B durch $Q_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{v=0}^p a_v u_v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ anzunähern, so kann die Bestimmung der Koeffizienten a_v auf zwei Arten erfolgen. Entweder man definiert eine Norm und löst die Minimalaufgabe $\|\varepsilon_p\| = \|Q_p - f\| = \text{Min}$ (Fehlerquadratmethode, Prinzip des kleinsten Fehlerbetragsmaximum), oder es werden lineare homogene Ausdrücke L_ϱ gewählt und die a_v aus $L_\varrho(\varepsilon_p) = 0$, ($\varrho = 0, 1, \dots, p$) ermittelt (Kollokation, Orthogonalitätsmethode, Teilgebiets-

methode, Ausgleichsrechnung). Es wird nun gezeigt, daß Fehlerabschätzungen bei den klassischen Problemen partieller Differentialgleichungen am günstigsten ausfallen, wenn man das Prinzip des kleinsten Fehlerbetragsmaximums verwendet, also als Norm der im abgeschlossenen Bereich B stetigen Funktion g den Ausdruck $\|g\| = \max_{\text{in } B} |g|$ wählt. [H. J. Grünsch, dies. Zbl. 47, 97, H. Westphal, dies.

Zbl. 35, 65, S. Agmon, L. Nirenberg und M. H. Protter, Commun. pure appl. Math. 6, 455—470 (1953).] Die Bestimmung der a_p ist analytisch meist schwierig durchzuführen, daher wird auch hier ein Abschätzungssatz nötig. Seien f und u_p im abgeschlossenen beschränkten Bereich B stetig und sei m die untere Grenze von $\max_{\text{in } B} |\varepsilon_p(x_1, x_2, \dots, x_n)| = M(a_0, a_1, \dots, a_p)$. Gibt es nun in B Punkte P_0, P_1, \dots, P_p ,

so daß die Determinante
$$\begin{vmatrix} u_0(P_0) \dots u_0(P_p) \\ \vdots \\ u_p(P_0) \dots u_p(P_p) \end{vmatrix} \neq 0$$
, dann gibt es mindestens ein

Wertesystem (a_0, a_1, \dots, a_p) , für welches $M(a_0, a_1, \dots, a_p) = m$. Gibt es nun zum System u_p einen zweichromen Graph mit den Punkten K_σ und sind alle $a_p = 0$, wenn $\sum_{\sigma=0}^p a_\sigma u_\sigma$ im Innern jeder Kante mindestens einmal verschwindet, ist weiter

$\varepsilon_p(K_\sigma)$ in allen Punkten der einen Klasse positiv und in allen Punkten der anderen Klasse negativ, dann läßt sich m eingrenzen durch das Minimum m' von $|\varepsilon_p(K_\sigma)|$ in $\{K_\sigma\}$ und das Maximum M' von $|\varepsilon_p|$ in B . Ist für den Näherungsausdruck Q'_p $m' = M'$, dann ist Q'_p eine Lösung der Tschebyscheffschen Approximationsaufgabe. Zwei Beispiele erläutern diesen Abschätzungssatz, dessen Anwendung nicht immer ganz einfach sein wird.

F. Selig.

Blanc, Ch. et W. Liniger: Erreurs de chute dans la résolution de systèmes algébriques linéaires. Commentarii math. Helvet. 30, 257—264 (1956).

Verff. berechnen die Momente erster und zweiter Ordnung der durch Abrundung verursachten Fehler η_i der Unbekannten bzw. q_i der Residuen eines linearen Gleichungssystems, das nach der Methode von Gauß-Cholesky gelöst wird. Vorausgesetzt wird dabei, daß eine Produktsumme (mit eventuell anschließender Division durch eine Zahl) in einem einzigen Rechengang gebildet wird und daher als Ganzes Anlaß zu jeweils einem einzigen Rundungsfehler gibt. Die Verteilung dieser elementaren, als stochastisch voneinander unabhängig vorausgesetzten Rundungsfehler muß bekannt sein und wird in den Endformeln als eine Gleichverteilung im Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ angenommen, wobei $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-m}$ bei einer Rechnung mit m Dezimalen ist. Überdies wird in ε linearisiert und vorausgesetzt, daß die vorkommenden Gleichungssysteme nicht ausgeartet sind. Dann ist $E q_i = E \eta_i = 0$ und die $E q_i q_k$ sind lineare Formen in den Varianzen der Elementarfehler mit Koeffizienten, die sich quadratisch aus den Koeffizienten und den Lösungen des Gleichungssystems zusammensetzen.

J. Weissinger.

Rosenbloom, P. C.: The method of steepest descent. Proc. Sympos. appl. Math. 6, 127—176 (1956).

Für eine zweimal stetig Fréchet-ableitbare Funktion $f(y)$ über einem reellen Hilbertraum \mathfrak{H} lassen sich die als innere Produkte schreibbaren linearen Funktionale bilden

$$\partial f(y + \lambda z) / \partial \lambda|_{\lambda=0} = f'(y) \cdot z = (Vf(y), z)$$

und

$$\partial^2 f(y + \lambda z) / \partial \lambda^2|_{\lambda=0} = f''(y) \cdot z^2 = (H(y) z, z).$$

Sie definieren den Gradienten Vf und den Hermiteschen Hesseschen Operator $H(y)$. Ausgehend von einem beliebigen y_0 gelangt man unter gewissen Voraussetzungen zu einem Minimum von $f(y)$, wenn man auf dem Wege $y(t)$ steilsten Abfalls fortschreitet, definiert durch $\dot{y} = -Vf(y)$; $y(0) = y_0$. Die Lösung $y(t) = T_t \cdot y_0$ ist als Ergebnis

einer Halbgruppe stetiger Transformationen $\{T_t\}$ deutbar, angewendet auf y_0 . Sofern $y(t)$ existiert, ist für $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_\infty$ mit y_∞ als eindeutigen Minimum von f in \mathfrak{H} die Halbbeschränktheit von H nach unten, d. h. $(H(y)z, z) \geq A \|z\|^2$ für alle $y, z \in \mathfrak{H}$ mit $A > 0$ hinreichend. Dann gelten Abschätzungen wie $\|y_\infty - y(t)\| \leq \|Vf(y_0)\| \frac{1}{A} e^{-At}$, $0 \leq f(y(t)) - f(y_\infty) \leq \|Vf(y_0)\|^2 \frac{1}{2A} e^{-2At}$ und $f(y_\infty + z) \geq f(y_\infty) + \frac{A}{2} \|z\|^2$ für alle $z \in \mathfrak{H}$. Verf. diskutiert Existenztheoreme für $y(t)$. Von besonderem Interesse ist der Fall $2f(y) = (By, y) - 2(z, y)$ mit Hermiteschem B und $z \in \mathfrak{H}$. Die Gradienten-Gleichung lautet dann $\dot{y} = z - By$. Zur Konstruktion der Halbgruppe wird eine allgemeine Theorie der Hilbertschen Parametrix-Methode entwickelt. Bei geeigneten Voraussetzungen läßt sich $y(t)$ bzw. T_t darstellen durch eine einparametrische Familie $U(t)$ linearer Transformationen in einem linearen topologischen Raum \mathfrak{E} . Dabei sind Volterrasche Integralgleichungen zu lösen. Die Methode dürfte praktisch brauchbarer sein als die Darstellung von T_t durch die Spektralfunktion $E(\lambda)$ von B . Als Beispiele werden Grundprobleme der Variationsrechnung diskutiert. Die Theorie wird dann übertragen auf allgemeinere Fälle, insbesondere auf quasilineare parabolische Gleichungen mit dem Gradienten-Gleichungs-Typus $\dot{y} = \beta(y) - B(y) \cdot y$; $y(0) = 0$ mit $\beta(y)$ stetig, $B(y)$ stetig und linear, sowie auf isoperimetrische Probleme $f(y) = \text{Min.}$ mit Nebenbedingungen $g(y) = 0$, d. h. $\dot{y} = -Vf + \lambda Vg$, $\lambda = \lambda(y) = (Vf, Vg)/\|Vg\|^2$, $y(0) = y_0$.
G. Bertram.

Kostarčuk, V. N. und B. P. Pugačev: Genaue Abschätzung der Verkleinerung des Fehlers bei einem Schritt der Methode des schnellsten Abstiegs. Trudy Sem. funkcional. Analizu 56, Nr. 2, 25—30 (1956) [Russisch].

L. V. Kantorovič (dies. Zbl. 34, 212) hat eine Methode, von ihm die Methode des schnellsten Abstiegs genannt, entwickelt, die zur angenäherten Bestimmung des Minimums des quadratischen Funktionals $F(x) = (Ax, x) - 2(a, x)$ dient, wo A eine symmetrische positiv definite Matrix n -ter Ordnung darstellt, während x (der gesuchte) und a (der gegebene) Spaltenvektor des n -dimensionalen Raumes ist. Er hat auch eine Abschätzung der Konvergenz des Verfahrens angegeben. Die Verf. entwickeln hier eine neue genaue Abschätzung der Verkleinerung des Fehlers bei einem Schritt des Verfahrens und zwar wurde, wie aus einer Fußnote hervorgeht, das Grundergebnis der Arbeit zuerst von Kostarčuk in seiner Dissertation [Untersuchung einiger iterativer Prozesse (russisch, 1953)] mit sehr komplizierten analytischen Mitteln erhalten, während hier ein bedeutend einfacheres Verfahren zur Herleitung des gleichen Ergebnisses vom zweiten Verf. dargelegt wird.

T. P. Angelitch.

Duleau, Jacques: Calcul des ossatures d'immeubles. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1257—1260 (1956).
Duleau, Jacques: Calcul des poutres composées. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1413—1415 (1956).

Ergänzungen zu einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 70, 125) über Verfahren der Gleichungsauflösung.
R. Zurmühl.

Lotkin, Mark: Characteristic values of arbitrary matrices. Quart. appl. Math. 14, 267—275 (1956).

Das iterative Verfahren beruht auf einem Satz von Schur, wonach jede Matrix unitär auf Dreiecksform transformierbar ist mit den charakteristischen Zahlen als Diagonalelementen. Es werden gewisse einfach gebaute unitäre Transformationsmatrizen angegeben, deren wesentliche Elemente — durch Lösen einer kubischen Gleichung — so bestimmt werden, daß die Norm z. B. des oberen Dreiecksteiles der Matrix nach der Transformation abnimmt. Der Prozeß wird solange fortgesetzt, bis diese Norm unter eine gewünschte Schranke gesunken ist, wobei dann die Diagonal-

elemente Näherungswerte der charakteristischen Zahlen der Ausgangsmatrix darstellen. Das Verfahren wird für den Einsatz digitaler Rechenautomaten empfohlen und durch ein einfaches Zahlenbeispiel erläutert.

R. Zurmühl.

Schwarz, Hans-Rudolf: Ein Verfahren zur Stabilitätsfrage bei Matrizen-Eigenwertproblemen. *Z. angew. Math. Phys.* 7, 473—500 (1956). *Nachtrag.* *Ibid.* 9, 79—80 (1958). Diss. Zürich. Basel 1956. 30 S.

Das mit der Eigenwertaufgabe $(A - \lambda E)x = 0$ einer reellen oder komplexen Matrix A verbundene Stabilitätsproblem — Ermittlung der Anzahl der Eigenwerte λ mit positivem Realteil — wird ohne vorherige Aufstellung des charakteristischen Polynoms der Matrix dadurch gelöst, daß die Matrix durch eine endliche Anzahl elementarer Ähnlichkeitstransformationen in eine Normalform bestimmter einfacher Bauart überführt wird, aus der sich die Lösung der Aufgabe unmittelbar ablesen, aber auch das charakteristische Polynom leicht gewinnen läßt. Die bei Durchführung des Verfahrens möglichen Fälle werden eingehend erörtert. Das Verfahren wird an je einem Zahlenbeispiel einer reellen und komplexen Matrix erläutert.

R. Zurmühl.

Li, Ta: A method for the solution of an eigenvalue problem with a complex matrix. *J. aeronaut. Sci.* 23, 705—706 (1956).

Verf. zeigt ein neues Verfahren, um das allgemeine komplexe Eigenwertproblem bei Matrizen auf die Lösung einer Polynomgleichung zurückzuführen. Die Koeffizienten dieser Gleichung sind leicht gemäß einer einfachen Regel mit Hilfe eines Digitalautomaten zu berechnen. Das Verfahren beruht, zum Unterschied von anderen ähnlichen Verfahren, auf einer Ähnlichkeitstransformation der mit numerischen Koeffizienten gegebenen Matrix auf die sog. Frobeniusschen Normalform. Die Transformationsmatrix selbst braucht dabei nicht explizit berechnet zu werden. Ein einfaches Beispiel ist angeführt.

T. P. Angelitch.

Ceschino, Francis: L'intégration approchée des équations différentielles. *C. r. Acad. Sci., Paris* 243, 1478—1479 (1956).

Es werden Formeln der Art $y_{i+1} = y_i + \sum_{k=1}^p \frac{h^k}{k!} (a_k y_i^{(k)} + b_k y_{i+1}^{(k)})$ mit kleinem Taylorrestglied zur Lösung von Differentialgleichungen 1. Ordnung benutzt.

H. Witting.

Slibar, A.: Zur graphisch-numerischen Integration eines Simultansystems von gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Österreich. Ingenieur-Arch. 10, 288—291 (1956).

Die Vorzüge des von E. Braun [Ingenieur-Arch. 8, 198—202 (1937)] zur Behandlung eines Systems mit einem Freiheitsgrad entwickelten Verfahrens werden mit denen des Jacobsenschen Phase-Plane-Delta-Verfahrens (dies. Zbl. 47, 367) verglichen und zur Behandlung eines Systems mit mehreren Freiheitsgraden benützt.

H. Witting.

• **Rjaben'kij, V. S. und A. F. Filippov:** Über die Stabilität von Differenzengleichungen. Unter Redaktion von L. A. Čudov. (Bibliothek der angewandten Analysis und der numerischen Mathematik.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 172 S. R. 4. 25 [Russisch].

Das Buch gibt eine weitreichende Theorie des Differenzenverfahrens für Anfangs- und Anfangsrandwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen, und zwar werden hauptsächlich zwei Fragen behandelt: Die Konvergenz der Lösungen des Differenzenverfahrens gegen die (als existierend angenommene) Lösung der Differentialgleichung, und die Stabilität des Differenzenverfahrens gegenüber kleinen Störungen (z. B. Abrundungsfehlern). Die Sätze werden in großer Allgemeinheit aufgestellt, was durch starke Verwendung funktionalanalytischer Be-

griffe und Methoden möglich wurde. Durch eine große Anzahl von Beispielen (mehr als 40) bleibt der Zusammenhang mit konkreten Problemen gewahrt.

Zunächst wird nur eine Differentialgleichung $Lu = f$ (gegebene Funktion f , gegebener nicht notwendig linearer Differentialoperator L , gesuchte Funktion u) mit den Anfangs- oder Randbedingungen $l_i(u) = \varphi_i$ auf den Randflächen Γ_i ($i = 1, \dots, s$) zugrunde gelegt und ihr in einem Gitter D_h (welches durch Angabe einer Maschenweite h charakterisiert werden kann; die Maschenweite kann in den einzelnen Koordinatenrichtungen verschieden sein) die Differenzengleichung $R_h u_h = f$ und die Differenzenanfangsbedingungen $r_{hi}(u_h) = \varphi_{hi}$ ($i = 1, \dots, s$) für eine Gitterfunktion u_h gegenübergestellt. Die Konvergenzuntersuchungen stützen sich auf einen einfachen allgemeinen Satz: Es seien U, F zwei lineare normierte Räume mit den Normen $\| \cdot \|_U$ bzw. $\| \cdot \|_F$ und es seien A, A_n ($n = 1, 2, \dots$) lineare Operatoren, die Elemente auf U in solche von F überführen. Es habe $Au = f$ bei einem bestimmten gegebenen f eine Lösung u und es gehe $\|Au - A_n u\|_F \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, die A_n mögen gleichmäßig beschränkte inverse Operatoren besitzen: $\|A_n^{-1}f\|_U \leq M \|f\|_F$. Dann strebt die Lösung u_n von $A_n u_n = f$ gegen u ; es gilt $\|u - u_n\|_U \rightarrow 0$. Weitgehend wird mit dem Maximum des Betrages als Norm gearbeitet. Zur Anwendung auf die Differenzengleichungen wird der Begriff der „Korrektheit“ der dem Begriff der Stabilität nahestehend, eingeführt. Korrektheit liegt vor, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit der Eigenschaft: Für ein willkürliches h aus $0 < h < h_0$ und für irgendein \tilde{u}_h wird $R_h \tilde{u}_h = \tilde{f}$ und $r_{hi}(\tilde{u}_h) = \tilde{\varphi}_{hi}$ gebildet; aus $\|f - \tilde{f}\| < \delta$ und $\|\tilde{\varphi}_{hi} - \varphi_{hi}\| < \delta$ soll $\|\tilde{u}_h - u_h\| < \varepsilon$ folgen (die Normen beziehen sich dabei sinngemäß auf die jeweiligen Räume, im Buche ist es stets genau präzisiert). Aus der Korrektheit der Differenzengleichungen kann auf die Konvergenz $\|u - u_h\| \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$ geschlossen werden, und es gilt im Falle einer linearen Anfangswertaufgabe eine Fehlerabschätzung der Form

$$\|u - u_h\| \leq h^k \left(M N + \sum_{i=1}^s M_i N_i \right)$$

und eine Schranke für u :

$$\|u\| \leq N \|f\| + \sum_{i=1}^s N_i \|\varphi_i\|;$$

dabei ist die „Approximationsordnung“ k festgelegt durch

$$\|Lu - R_h u\| \leq h^k M, \quad \|l_i(u) - r_{hi}(u)\| \leq h^k M_i.$$

Im nichtlinearen Fall werden die Abschätzungen komplizierter. Es folgen hinreichende Kriterien für die Korrektheit und eine Anzahl Beispiele.

Kapitel II behandelt verschiedene Formen der Stabilität und Zusammenhänge zwischen ihnen. Es werden eine „Stabilität nach den Anfangsbedingungen“ definiert und verschiedene Arten von Störungen und ihr Einfluß auf die Werte von u_h untersucht. Für das Iterationsverfahren

$$u_h^{(m)} = \sum_{k=1}^q [a_k u_h^{(m-k)} + b_k (R_h u_h^{(m-k)} - f)], \quad r_{hi}(u_h^{(m)}) = \varphi_{hi},$$

wird bewiesen: Es strebt $u_h^{(m)} \rightarrow u_h$ bei beliebigem $f, u_h^{(0)}, u_h^{(1)}, \dots, u_h^{(q-1)}$ genau dann, wenn $\sum_{k=1}^q a_k = 1$ und alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^q - \sum_{k=1}^q (a_k + b_k \varrho) \lambda^{q-k} = 0$$

dem Betrage nach kleiner als 1 sind für alle ϱ , die Eigenwerte des Operators R_h sind. Besonders untersucht wird der Fall $q = 1, a_1 = 1, b_1 = \tau > 0$.

Kapitel III (einige Stabilitätskriterien) bringt die Anwendung der Theorie auf viele Beispiele und die Einordnung einer Reihe in der Literatur bisher aufgestellter

Kriterien. Für die Stabilitätsuntersuchungen von Kapitel IV werden Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^n a_k(t) \frac{\partial^k}{\partial t^k} L_k u(t, x_1, \dots, x_n) = 0$$

und Randbedingungen als homogen angenommen. Zu den Differenzengleichungen

$$\sum_{k=0}^q a_k(t) \frac{\Delta_t^k}{\tau^k} R_{hk} u_h(t, x_1, \dots, x_n) = 0,$$

wobei R_{hk} die Form hat

$$R_{hk} u_h(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{(k_1, \dots, k_n)} b_{hk}^{(k_1, \dots, k_n)} u_h(t, x_1 + k_1 h, \dots, x_n + k_n h),$$

wird eine charakteristische Gleichung aufgestellt, deren Wurzeln $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ sind und mit deren Hilfe notwendige und hinreichende Stabilitätskriterien formuliert werden. Z. B. ist hinreichend für die Stabilität, daß es Konstanten $c_j > 0$ gibt mit: Für alle hinreichend kleinen h gilt $|\lambda| < 1 + c_1 \tau$, in $|1 - \lambda| < c_2$ liegen höchstens p Wurzeln λ und für zwei beliebige λ_l, λ_r , die außerhalb von $|\lambda| < c_4$ liegen, gilt $|\lambda_l - \lambda_r| \geq c_3 (|\lambda_l - 1| + |\lambda_r - 1|)$. Dabei ist τ die Schrittweite in t -Richtung. Kapitel V behandelt Systeme von Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^N \sum_{(k_s)} A_{ij}^{(k_0, \dots, k_n)} \frac{\partial^{k_0 + \dots + k_n} u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

Die Summation läuft über alle ganzen $k_s \geq 0$, deren Summe eine gewisse Zahl M nicht übertrifft. Die A_{ij} seien gegebene Konstanten. Es werden Verfahren zur Konstruktion von stabilen Differenzengleichungssystemen angegeben. Auch hier spielen wieder die Wurzeln λ_r einer komplizierteren algebraischen Gleichung eine entscheidende Rolle. Für ein hyperbolisches System kann die Stabilität gezeigt werden, falls alle $|\lambda_r| \leq 1$ sind und $|\lambda_{r_1} - \lambda_{r_2}| > \varepsilon$ gilt für $r_1 \neq r_2$ und wobei $\varepsilon > 0$ von τ unabhängig ist; es ergibt sich insbesondere Stabilität, falls τ/h kleiner als eine gewisse Konstante ist. Entsprechend werden parabolische Systeme untersucht.

Wenn $k_0 p + \sum_{s=1}^n k_s \leq n_j p$ gilt, heißt das System p -parabolisch. Auch hier werden über die Wurzeln einer gewissen charakteristischen Gleichung hinreichende Stabilitätskriterien gewonnen, und Stabilität gezeigt, wenn τ/h^p eine gewisse Konstante nicht übersteigt. Im Anhang wird bewiesen, daß man zu einer beschränkten Gitterfunktion $\tilde{\psi}(x_1, \dots, x_n)$ bei Vorgabe einer natürlichen Zahl p eine Funktion $\psi(x_1, \dots, x_n)$ angeben kann, die stetige partielle Ableitungen bis zur p -ten Ordnung einschließlich besitzt, und für die Beträge der Ableitungen können Schranken angegeben werden. Für die Differenz zweier interpolierender Funktionen ψ werden ebenfalls Schranken für die Ableitungsbeträge aufgestellt.

L. Collatz.

Blanc, Charles: Sur l'intégration approchée d'équations du type parabolique. Z. angew. Math. Phys. 7, 146—152 (1956).

Für verschiedene Differenzenverfahren zur Lösung des Anfangsproblems $\partial X / \partial t - q \partial^2 X / \partial x^2 = F(x, t)$, $X(x, 0) = G(x)$ wird der bei einem Schritt gemachte Verfahrensfehler nach der Methode der stochastischen Fehlerauswertung bestimmt. In einer Zahlentabelle kann dieser Fehler in Abhängigkeit von den beiden Schrittweiten h, k für drei verschiedene Verfahren entnommen werden, wobei das Mehrstellenverfahren am besten abschneidet. In einer weiteren Arbeit soll der bei mehreren Schritten gemachte Fehler behandelt werden, wobei dann wohl auch ein Hinweis auf die für Konvergenz und Stabilität notwendigen Relationen zwischen h, k gegeben wird.

J. Weissinger.

Bertram, G.: Fehlerabschätzung für die zweite Randwertaufgabe der ebenen Potentialtheorie. Z. angew. Math. Mech. 36, 1—35 (1956).

Sei \mathfrak{B} ein Bereich mit stückweise glatter, doppelpunktfreier Berandung Γ in der w -Ebene, der durch $w = w(z)$ konform auf den schlichten Einheitskreis abgebildet sei; u sei die Lösung des zweiten Randwertproblems: $\Delta u = 0$ in \mathfrak{B} , $\bar{u}_n \equiv \partial u / \partial n = f(s)$ auf Γ ; \bar{u} sei eine in \mathfrak{B} harmonische, in $w(0)$ mit u übereinstimmende Funktion. $U = \bar{u} - u$ der Fehler der „Näherung“ \bar{u} . Aus der Greenschen Lösungsformel für den Kreis werden zwei Fehlerabschätzungen hergeleitet: $|U| \leq |\bar{U}_n| \cdot M_{\mathfrak{B}}$ mit

$$M_{\mathfrak{B}} = \text{Max}_{\varphi} \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |w'(e^{i\vartheta})| \cdot \log \left| \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2} \right| d\vartheta \right\}$$

und

$$|U| \leq N_{\mathfrak{B}} \cdot \sqrt{\int_0^{2\pi} \bar{U}_n^2 |w'(e^{i\vartheta})| d\vartheta}$$

mit

$$N_{\mathfrak{B}} = \text{Max}_{\varphi} \frac{1}{\pi} \sqrt{\int_0^{2\pi} |w'(e^{i\vartheta})| \cdot \log^2 \left| \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2} \right| d\vartheta}.$$

Für eine Anzahl von Bereichsformen (Kreis, Halbkreis, Quadrat, Rechteck) werden die Konstanten $M_{\mathfrak{B}}$, $N_{\mathfrak{B}}$ berechnet bzw. abgeschätzt und die in den Abschätzungen auftretenden nur vom Bereich abhängigen Funktionen tabelliert, so daß die Anwendung auf konkrete Probleme, deren einige detailliert durchgerechnet werden, ohne großen Arbeitsaufwand erfolgen kann. In einem Anhang werden für Kreisbereiche weitere Abschätzungen, insbesondere auch für die Ableitungen von U , hergeleitet und zum Teil auf die Kugel übertragen.

J. Weissinger.

Eve, J. and H. I. Scoins: A note on the approximate solution of the equations of Poisson and Laplace by finite difference methods. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 7, 217—223 (1956).

Wird die 1. Randwertaufgabe der Poissonschen Differentialgleichung $\nabla^2 \Phi(x, y) + \varrho(x, y) = 0$ für einen abgeschlossenen Bereich der (x, y) -Ebene näherungsweise über Differenzengleichungen durch Relaxation gelöst, dann empfiehlt sich eine schrittweise Verkleinerung des quadratischen Gitters durch jeweilige Hinzunahme der Quadratmittelpunkte. So entstehen abwechselnd „Quadratgitter“ und „Diagonalgitter“. Die Verff. zeigen durch Reihenentwicklung: Die Näherungswerte in festen Punkten oszillieren bei geeigneter Durchführung des Prozesses monoton gegen die Lösung des Differentialgleichungsproblems, sofern ϱ harmonisch ist. Die Gitterpunktswerte stellen sich dar in der Form $w = A \pm B \cdot h^2 + O(h^4)$ (h = Maschenweite), wobei A und B nur ortsabhängig sind und das Vorzeichen von B von Schritt zu Schritt wechselt. Vielfach lassen sich Verfeinerungsschritte einsparen durch eine Extrapolationstechnik, durch die zu einer gegebenen Fehlertoleranzspanne die erforderliche Maschenweite bestimmt wird.

G. Bertram.

Plainevaux, J. E.: Détermination graphique directe de la valeur moyenne d'une fonction. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 42, 939—949 (1956).

Verf. entwickelt ein Verfahren zur unmittelbaren graphischen Bestimmung von $\mu(x) = F(x)/x$, wo $F(x) = \int_0^x f(x) dx$, ohne vorherige Ermittlung von $F(x)$. Die Bildkurve der Funktion von $y = f(x)$ wird in ein (O, x, y) -Koordinatensystem eingetragen und das Intervall O, x in eine geeignete Anzahl von Teilintervallen Δx_i eingeteilt und in jedem die mittlere Ordinate y_{mi} wie beim Verfahren der graphischen Integration von $y = f(x)$ nach Massau ermittelt. Dann wird $\mu(x)$ abschnittsweise als gewogenes

Mittel aus den y_{mi} mit den Gewichtungsfaktoren Δx_i bestimmt und zwar allein mit Hilfe von Parallelen zu O, x und O, y , also unter Vermeidung der bei der gewöhnlichen graphischen Integration benutzten Parallelen zu der Tangentenrichtung der Integralkurve. Auch die Tangente in einem Punkte P der Bildkurve von $\mu(x)$ sowie deren Krümmungsmittelpunkt lassen sich angeben. Schließlich läßt sich aus der Bildkurve $\mu(x)$ auch die Kurve des unbestimmten Integrals von $f(x)$ ermitteln. Einige Überlegungen und Versuche über die Genauigkeit des Verfahrens werden mitgeteilt.

F. Reutter.

Bögel, Karl: Über ein für Stabilitätsuntersuchungen geeignetes Normdiagramm der Gleichungen dritten Grades. Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau 2, 1—3 (1956).

Die Lösungen der Schwingungsgleichung $\ddot{x} + a_2 \dot{x} + a_1 x + a_0 = 0$ (a_2, a_1, a_0 reell) sind bekanntlich stabil, wenn alle drei Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der charakteristischen Gleichung $(1) \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ einen negativen Realteil haben. Verf. transformiert (1) auf die zweiparametrische Form $(2) c^3 + c^2 + A_1 c + A_0 = 0$ mit den Wurzeln $\bar{c}, d + i\nu, d - i\nu$, die gegenüber der üblichen Normalform $\mu^3 + p\mu + q = 0$ den Vorteil hat, daß (1) und (2) gleichzeitig stabil sind. Faßt man A_1 und A_0 als rechtwinklige Koordinaten und die Gleichungen (2) als Punkte in diesem System auf, so hat man ein Normdiagramm für (1). Die Kurven $\bar{c} = \text{const}$ und $d = \text{const}$ sind Geraden, und zwar derselben Schar. Die Kurven $\nu = \text{const}$ sind punktwise konstruierbar. Damit lassen sich aus dem Normdiagramm die Wurzeln vorgegebener Gleichungen (2) ablesen. Der Stabilitätsbereich ist durch $A_1 > A_0 > 0$ bestimmt. Da in diesem Bereich die Geraden $\bar{c}, d = \text{const}$ nahezu durch den Nullpunkt gehen, lassen sich leicht Näherungslösungen angeben. Sieben große Diagramme ermöglichen die praktische Anwendung des vorgeschlagenen Verfahrens. *H. Tolle.*

Stammberger, A.: Ein Nomogramm zur Umwandlung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten. Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau 2, 79 (1956).

Verf. erinnert an die Möglichkeit, die Umrechnung zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten nomographisch vorzunehmen. Für die Winkel $5^\circ \leq \varphi \leq 70^\circ$ benutzt er drei parallele Leitern, während er für die restlichen Winkel die Verwendung von Kreisnomogrammen vorschlägt. *H. Tolle.*

● **Montgomery, G. A.:** Digital calculating machines and their application to scientific and engineering work. London — Glasgow: Blackie & Son Limited 1956. 262 p. 30 s. net.

Verf. gibt eine allgemeine, ziemlich elementare Einführung in das Gebiet der digitalen Rechenmaschinen (Handrechner und Automaten), wobei der Schwerpunkt auf den technisch-wissenschaftlichen Anwendungen liegt. Das Buch will weder numerische Methoden noch allzu viele technische Details der Maschinenkonstruktionen vermitteln, vielmehr wird versucht, die digitalen Rechengeräte unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zu übersehen und zu klassifizieren. Dies geschieht in der Weise, daß zunächst nach Maßgabe der Speichermöglichkeiten für Zahlen einerseits und Befehle andererseits eine grobe Einteilung in vier Gruppen gemacht wird. In der ersten Gruppe, wo überhaupt keine Speicher vorhanden sind (also nur Handmaschinen), werden noch verschiedene Typen unterschieden, je nach Art der zur Verfügung stehenden Rechenwerksregister. *E. Stiefel.*

Piloty, Robert: Betrachtungen über das Problem der Datenverarbeitung. Elektronische Rechenmaschinen und Informationsverarbeitung 5—8 (1956).

Billing, Heinz: Schaltkreis- und Speichertechnik. Elektronische Rechenmaschinen und Informationsverarbeitung 9—14 (1956).

Booth, Andrew D.: Input-output for digital computing machines. Elektronische Rechenmaschinen und Informationsverarbeitung 15—20 (1956).

Aiken, Howard H.: The future of automatic computing machinery. Elektronische Rechenmaschinen und Informationsverarbeitung 31—35 (1956).

Müller, Wilhelm Hendricus: An electronic computer enters an airplane-factory. Elektronische Rechenmaschinen und Informationsverarbeitung 192—193 (1956).

Wippermann, Friedrich: Über die Verwendung von Rechenautomaten für die Wettervorhersage. Elektronische Rechenmaschinen und Informationsverarbeitung 194—197 (1956).

Lederle, Trudpert: Berechnung von Sternephemeriden. Elektronische Rechenmaschinen und Informationsverarbeitung 202—203 (1956).

Constantinescu, Paul: Sur le décroissement du nombre des contacts en utilisant circuits en pont. An. Univ. C. I. Parhon București, Ser. Ști. Natur. Nr. 11, 45—67 russ. und französ. Zusammenfassung 68—69 (1956) [Rumänisch].

Étant donnée la formule de structure (la conductibilité totale) entre deux noeuds, l'A. se propose d'obtenir un schéma équivalent, en ce qui concerne le fonctionnement, avec un nombre plus petit de contacts. C'est pour cela qu'on démontre trois théorèmes qui permettent d'associer à une conductibilité totale donnée, une succession de matrices de conductibilités directes qui sont équivalentes en ce qui concerne le fonctionnement, avec la matrice initiale, et qui contiennent des circuits en pont. Les trois théorèmes sont appliqués à la synthèse des schémas avec une seule borne d'entrée et une seule borne de sortie. L'application des théorèmes aux schémas avec un nombre quelconque de bornes d'entrée et de sortie est faite dans d'autres travaux qui contiennent ce travail. (Résumé de l'A.)

M. Nedelcu.

Constantinescu, Paul: Sur des schémas obtenus en employant les congruences des entiers dans la théorie des mécanismes automatiques. An. Univ. C. I. Parhon București, Ser. Ști. Natur. Nr. 12, 23—32, russ. und französ. Zusammenfassung 32 (1956) [Rumänisch].

L'A. expose la construction des schémas ayant la formule de structure: $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$, comme une application des théorèmes établis dans le travail précédent. C'est en utilisant les circuits en pont que ces schémas se représentent symétriquement. On démontre par induction le théorème: La construction d'un schéma, ayant la formule de structure $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$, demande $4(n-1)$ contacts. (Résumé de l'A.)

M. Nedelcu.

• Fox, L.: Mathematical tables. Vol. 1: The use and construction of mathematical tables. (National physical laboratory.) London: H. M. Stationery Office 1956. IV, 60 p. 17 s. 6 d. net.

1945 wurde die mathematische Abteilung des National Physical Laboratory (N. P. L.) gegründet. Eines der Ziele dieser Abteilung ist die Herstellung neuer mathematischer Tafeln sowie die Erweiterung und Überprüfung existierender Werke. Funktionen, die ein weites Anwendungsfeld besitzen und von fundamentaler Bedeutung sind, sollen weiter — dabei leistet das N. P. L. oft wesentliche Unterstützung — in „Royal Society Mathematical Tables Series“ herausgegeben werden. Die Vertafelungen anderer Funktionen, die für die Praxis wichtig, aber nicht von so allgemeiner Bedeutung sind, sollen in „N. P. L. Mathematical Tables Series“ veröffentlicht werden. Band I — gegliedert in 3 Teile — ist als Einführung gedacht und enthält die theoretischen und praktischen Unterlagen, die zur Benutzung und Herstellung von Tafelwerken von Bedeutung sind. Die eigentlichen Tafelwerke der Serie sollen dann z. B. die Interpolation nicht mehr behandeln, es sei denn, daß eine spezielle Methode herangezogen wird. Gleichzeitig ist damit eine einheitliche Bezeichnung und Standardisierung der Formeln festgelegt worden. — Teil A: Benutzung mathematischer Tafelwerke. Nach einer Klassifikation der Tafelwerke

mit Betrachtungen über die Auswahl der zu tabellierenden Funktion, über die Darstellung und Genauigkeit, wird darauf hingewiesen, daß es oft zweckmäßig ist, Hilfsfunktionen zu tabellieren, manchmal mit dem Originalargument, manchmal mit einem Hilfsargument. Die Benutzung von Hilfsfunktionen führt in vielen Fällen zu Interpolationserleichterungen, zum Umgehen von Singularitäten usw. Im Rahmen der Interpolation einer Tafel mit einem Eingang wird zunächst die Verwendung der Taylorreihe gezeigt, dann die der finiten Differenzenformeln unter Berücksichtigung des bekannten Differenzenrückwurfs. Nach Behandlung der Lagrangeschen Formel und der Tschebyscheffschen Polynome folgen: Vergleich der verschiedenen Interpolationsmethoden, inverse Interpolation, Berechnung der 1. und 2. Ableitungen, bestimmte Integrale, Interpolation bei Funktionen zweier Veränderlicher sowie bei Funktionen, die von einer komplexen Variablen abhängig sind. — Teil B: Herleitung der Formeln und Fehleranalysis. Es werden die Fehler, die bei der Interpolation und allgemein bei finiten Differenzenprozessen entstehen können, besprochen und ausführlich die Rückwurfformeln mit einfachem und mehrfachem Rückwurf behandelt. Letzterer spielt gerade bei spezielleren Tafelwerken, bei denen keine einfache Interpolation angestrebt werden kann, eine besondere Rolle. Bereits in Teil A waren die Grundlagen der Verwendung der Tschebyscheffschen Polynome zur Erzeugung der ökonomisierten Polynome besprochen worden. Hier wird näher noch auf die Theorie und den begangenen Fehler eingegangen. Danach finden Berechnungen der Ableitungen und bestimmter Integrale Berücksichtigung mit Formeln, die teils mit normalen, teils mit modifizierten Differenzen, teils mit Koeffizienten von ökonomisierten Polynomen arbeiten. In einem Anhang werden Bezeichnungen und eine Formelzusammenstellung mit Fehlertermen gebracht. — Teil C: Die Konstruktion mathematischer Tafeln. Es werden einige Fragestellungen besprochen, die bei der Herstellung von Tafeln bzw. Tafelwerken auftreten können, wie Auswertung von unendlichen Reihen, Berechnung von Nullstellen algebraischer oder transzendenter Ausdrücke, Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen (Anfangs- und Randwertprobleme), Lösung von Integralgleichungen und Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Es handelt sich dabei meistens um kurze Hinweise, es wird nur das für eine etwaige Vertafelung Wichtige berührt. — Abschließend werden verschiedene Techniken angegeben, die sich auf iterative Methoden, Rekursionsformeln, Genauigkeit, Stabilität und Unter- tafelung beziehen. So wird bei den iterativen Methoden auf die Aitkensche Konvergenzbeschleunigung eingegangen. — Für alle Tafelbenutzer und Interessenten an derartigen Tafelwerken stellt der 1. Band eine begrüßenswerte Zusammenstellung dar, in der die theoretischen und praktischen Kenntnisse aufgeführt sind, die man bei einer zweckmäßigen Benutzung oder bei der Herstellung einer Tafel benötigt. Im Falle einer knappen Darstellung sind meist die betreffenden Literaturangaben hinzugefügt, die eine weitergehende Orientierung ermöglichen. *H. Unger.*

• **Tables of Whittaker functions. (Wave functions in Coulomb field.)** (Report No. 9, Numerical Computation Bureau.) Tokyo: Yano-Tsuneta Memorial Society 1956. 66 p. \$ 3.00.

Es werden Tabellen der Whittaker-Funktion $W_{km}(z)$ für $m = \frac{1}{2}$, $k = +i\xi$, $z = -ix$ gegeben. Sie stellen die Lösungen der Schrödinger-Gleichung im anziehenden Coulombfeld mit $E > 0$ dar. Für den Ausdruck

$$e^{-\pi\xi/2} e^{-i(l\pi/2 - \sigma_l)} W_{i\xi, l+1/2}(-ix) = G_{\xi, l}(x) + i F_{\xi, l}(x), \quad (1)$$

$\{\sigma_l(\xi) = \arg \Gamma(l+1-i\xi)$, Γ Eulersche Γ -Funktion] verhält sich der Imaginärteil $F_{\xi, l}(x)$ für kleine x regulär wie x^{l+1} , während der Realteil $G_{\xi, l}(x)$ singulär ist. Für kleine x empfiehlt es sich, von $G_{\xi, l}(x)$ den zu $\log x$ proportionalen Anteil abzuspalten:

$$\Gamma_{\xi}(x) = G_{\xi, 0}(x) - \frac{1}{2} (\xi/C_{\xi}^2) \log x \cdot F_{\xi, 0}(x),$$

wobei $C_{\xi} = (dF_{\xi,0}(x)/dx)_{x=0} = \sqrt{\pi\xi/2} (1 - e^{-2\pi\xi})$ ist. Für große x schließlich wird entsprechend dem asymptotischen Verhalten

$$G_{\xi,0}(x) + i F_{\xi,0}(x) = e^{i[x/2 + \xi \log x + \sigma_0(\xi)]} \cdot u(x) e^{i\varphi(x)}$$

und

$$d(G_{\xi,0}(x) + i F_{\xi,0}(x))/i dx = e^{i[x/2 + \xi \log x + \sigma_0(\xi)]} \cdot \frac{1}{2} v(x) e^{i\psi(x)}$$

gesetzt. Die Funktionswerte sind 6-stellig gegeben mit 2. Differenzen in x (bzw. $y = 1/x$) und ξ , und zwar für

- | | |
|--|-------------------------|
| 1) $\xi = 0(0,02) 0,50(0,05) 1,00$; $x = 0(0,05) 1,00$ | F, F', I, I' , |
| 2) $\xi = 0(0,02) 0,50(0,05) 1,00$; $x = 1,00(0,05) 2,00(0,1) 5,00$ | F, F', G, G' , |
| 3) $\xi = 0,1(0,1) 1,0$; $y = x^{-1} = 0(0,005) 0,2$ | u, φ, v, ψ . |

Man beachte die Druckfehler im Ausdruck (1), der Gleichung für C_1 (der Faktor 2ξ ist zu ersetzen durch $\sqrt{\frac{1}{2}\pi\xi}$), vermutlich ein weiterer Fehler entweder in dem Ausdruck für $C_1 D_1$ oder $p_0(\xi)$, dann S. 5, wo unter 3, y anstelle von ξ stehen muß, und schließlich in der Tabelle für große x , wo naturgemäß $\delta^2(y)$ angegeben ist und nicht, wie im Kopf steht, $\delta^2(x)$.
E. Trefftz.

• **Table of square roots of complex numbers.** (Report No. 10.) Tokyo: Numerical Computation Bureau 1956. 21 p.

Diese Tafeln geben für Intervalle $\Delta x = 0.002$ die Werte von U, V, u, v in $\sqrt{1 \pm ix} = U + iV$, $\sqrt{x+i} = u + iv$, $\sqrt{-x+i} = v + iu$ für $0 \leq x \leq 1$ auf elf Stellen. Für Interpolation mit Hilfe der Everettschen Formeln sind die zweiten Differenzen von U, V, u, v bis auf fünf Stellen gegeben.
E. M. Bruins.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

• **Mazurkiewicz, Stefan: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Auf der Grundlage des nachgelassenen Manuskriptes für den Druck vorbereitet von Jerzy Łoś (Mathematische Monographien. Bd. 32.) Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1956. 270 S. z1 27.— [Polnisch].

Die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurden von St. Mazurkiewicz bereits während des ersten Weltkrieges behandelt. Das von J. Łoś jetzt für den Druck umgearbeitete Werk umfaßt zwei Bücher: 1) Die elementare Wahrscheinlichkeitstheorie, 2) Elemente der reellen Funktionentheorie. Die Überschriften der einzelnen Kapitel in 1) sind: Boole'sche Algebra, Ideale und Ereigniskörper, Begriff und einfachste Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit. Das Bernoullische Schema. In 2): Nichtabnehmende Funktionen, n -dimensionale nichtabnehmende Funktionen, Maße in Booleschen Körpern, Maße in euklidischen Räumen, Das Lebesgue-Stieltjessche Integral.

Das Werk ist für reine Mathematiker gedacht, es kann aber auch anderen Lesern manches Interessante zeigen. Es dringt bis zum starken Gesetz der großen Zahlen nicht vor, obwohl Verf. diesen Satz bereits 1917 unabhängig von Cantelli gefunden hat.
H. Steinhaus.

Fortet, Robert M.: Les fonctions aléatoires comme éléments aléatoires dans un espace de Banach. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 356—359 (1956).

Dans de nombreux problèmes, il est possible de considérer certaines fonctions aléatoires comme des éléments aléatoires dans un espace de Banach — et ceci est particulièrement utile si on doit étudier par exemple une fonctionnelle de la fonction aléatoire faisant intervenir celle-ci globalement sur tout l'intervalle. L'A. cite trois

exemples particuliers où il en est ainsi et obtient des théorèmes nouveaux sur les processus de Poisson et de Wiener-Lévy. La méthode employée permet aussi de généraliser le théorème de Glivenko-Cantelli.
R. Féron.

Fortet, Robert M.: Lois des grands nombres pour des éléments aléatoires généraux. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 360—364 (1956).

Verf. skizziert im Zusammenhang einige seiner bereits früher veröffentlichten Ergebnisse [siehe E. Mourier, dies. Zbl. 53, 95, und R. Fortet et E. Mourier, Bull. Sci. math., II. Ser. 78, 14—30 (1954)].
W. Richter.

Thomasian, A. J.: Distances et normes sur les espaces de variables aléatoires. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 447—448 (1956).

Etant donné un espace de variables aléatoires réelles \mathfrak{X} et une fonction f , on dit que la „convergence en f° ” est équivalente à la convergence presque certaine (ou en probabilité) si une condition nécessaire et suffisante pour que la suite de v. a. $\{X_n\}$ converge presque certainement (ou en probabilité) vers 0 est que $f(X_n)$ converge vers zéro. L'A. énonce sans démonstration diverses conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi.
R. Féron.

Fréchet, Maurice: Sur diverses définitions de la moyenne d'un élément aléatoire de nature quelconque. Giorn. Ist. Ital. Attuari 19, 1—15 (1956).

Soit R un élément aléatoire de nature quelconque et $X = \Phi(R)$ un élément correspondant à R et appartenant à un espace Banach B et soit $\pi(g)$ la probabilité que R appartienne à un sous-ensemble g de l'ensemble Δ des déterminations éventuelles de R . Reprenant les définitions d'un de ses précédents articles [Revue sci. 82, 483—513 (1944)], l'A. définit $m \Phi(R)$ comme la limite si elle existe de $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum \Phi(e_K) \pi(e_K)$ où les e_K sont en infinité dénombrable et sont tels que l'oscillation de Φ sur e_K est inférieure à ε . Ces conditions impliquent que l'espace de Banach B est séparable. L'A. montre toutefois qu'on peut généraliser la définition de la moyenne de manière à ce qu'elle s'applique à des espaces de Banach non séparables et qu'alors pour que X ait une moyenne en ce sens nouveau (moyenne I. F.) il faut et il suffit: 1° que X reste presque certainement dans un sous-ensemble séparable de B ; 2° que le nombre aléatoire qu'est la norme $\|X\|$ de X ait une moyenne I. F. On montre que si X a une moyenne I. F., X a au moins une moyenne au sens de S. Doss (ce Zbl. 33, 289) et que si X a une moyenne I. F. la moyenne au sens de Mourier (ce Zbl. 34, 293) existe également et coïncide avec la moyenne I. F.
R. Féron.

Palmer, D. S.: Properties of random functions. Proc. Cambridge philos. Soc. 52, 672—686 (1956).

The author defines concentration of zeros for two correlated stationary random functions, $f(t)$ and $g(t)$, as $X = \lim (T/2h)$ [No. zeros of $f(t)$ within h of a zero of $g(t)$, $(0 < t < T)$] / [No. zeros of $f(t)$, $(0 < t < T)$] [No. zeros of $g(t)$, $(0 < t < T)$]; $(T \rightarrow \infty, h \rightarrow 0, T^2 h \rightarrow \infty)$. He proceeds to find a formula for X in the Gaussian case and to verify it for some special cases with data. The latter sections on waiting times between zeros are not clear to the reviewer.
L. J. Cote.

Levy, Paul: Processus semi-markoviens. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 416—426 (1956).

L'A. définit ainsi la notion de processus semi-markovien: „Parmi les paramètres cachés il peut en exister qui présentent à la fois les deux caractères suivants; d'une part le passé nous renseigne sur leur valeur ou du moins nous conduit à admettre pour eux une loi de probabilité autre que celle qui résulterait de leur état apparent actuel, d'autre part cette circonstance nous conduit à modifier nos prévisions concernant l'avenir... Nous dirons que le processus est semi-markovien s'il y a un et un seul paramètre caché de cette nature, le temps u écoulé depuis le dernier changement

d'état". Pour de tels processus, l'A. étudie la durée de séjours dans les divers états en se bornant au cas où les intervalles de repos forment presque sûrement sur l'axe des temps un ensemble partout dense.

R. Féron.

Dynkin, E. B. and A. A. Juškevič (Jushkevich): Strong Markov processes. Teor. Veroyatn. Primen. 1, 149—154, engl. Zusammenfassg. 155 (1956) [Russisch].

Es sei Ω eine Menge, \mathcal{E} ein metrischer Raum und \mathfrak{B} das System der Borelschen Mengen in \mathcal{E} . Ein stochastischer Prozeß besteht aus einer Abbildung x von $[0, +\infty[\times\Omega$ in \mathcal{E} und einem System $\{P_\xi\}_{\xi\in\mathcal{E}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit der folgenden Eigenschaft: P_ξ ist definiert auf der von allen Mengen der Form $\{\omega : x(t, \omega) \in \Gamma\}$ mit $0 \leq t < +\infty$ und $\Gamma \in \mathfrak{B}$ erzeugten sigma-Algebra, und $P_\xi\{\omega : x(0, \omega) = \xi\} = 1$. Eine zufällige Variable τ mit Werten in $[0, +\infty]$ heißt von der Zukunft unabhängig, wenn bei beliebigem $s \geq 0$ die Menge $\{\omega : \tau(\omega) \leq s\}$ in der von allen Mengen der Form $\{\omega : x(t, \omega) \in \Gamma\}$ mit $0 \leq t \leq s$ und $\Gamma \in \mathfrak{B}$ erzeugten sigma-Algebra liegt. Der Prozeß wird als strikter (zeitlich homogener) Markoffscher Prozeß bezeichnet, wenn für jede von der Zukunft unabhängige zufällige Variable τ alle $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ aus \mathfrak{B} und alle t_i mit $0 < t_1 < \dots < t_n$ die Gleichung

$$P\{x(\tau + t_1) \in \Gamma_1, \dots, x(\tau + t_n) \in \Gamma_n | x(u); u \leq \tau\} = P_{x(\tau)}\{x(t_1) \in \Gamma_1, \dots, x(t_n) \in \Gamma_n\}$$

innerhalb der Menge $\{\omega : \tau(\omega) < +\infty\}$ gilt. Die Definition des (zeitlich homogenen) Markoffschen Prozesses ergibt sich ebenso, wenn nur konstante τ zugelassen werden, und Beispiele zeigen, daß diese Definition wirklich schwächer ist. Die Verf. geben eine gleichwertige, mit Hilfe von Übergangswahrscheinlichkeiten formulierte Definition des strikten Markoffschen Prozesses an und beweisen, daß die folgenden Bedingungen über einen Markoffschen Prozeß dafür hinreichen, daß ein strikter Prozeß vorliegt: $x(t, \omega)$ ist für jedes ω rechtsseitig stetig als Funktion von t , und es handelt sich um einen „Fellerschen Prozeß“, d. h. der Raum C der stetigen beschränkten reellen Funktionen auf \mathcal{E} ist invariant gegenüber allen Transformationen $T_t f(\xi) = \int_{\mathcal{E}} f(x(t, \omega)) dP_\xi(\omega)$. — In einer Fußnote weisen die Verf. auf die während des

Drucks erschienene Arbeit von Hunt (dies. Zbl. 70, 366) hin.

K. Krickeberg.

Dynkin, E. B.: Markov processes and semi-groups of operators. Teor. Veroyatn. Primen. 1, 25—37, engl. Zusammenfassg. 37 (1956) [Russisch].

Untersucht werden die mit einem zeitlich homogenen Markoffschen Prozeß in einem metrischen Raum \mathcal{E} (vgl. das vorangegangene Referat) verknüpften Halbgruppen von Operatoren. Der Prozeß sei gegeben durch seine Übergangswahrscheinlichkeiten $P(t, x, \Gamma)$, $0 \leq t < +\infty$, $x \in \mathcal{E}$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$. Er erzeugt im Banachschen Raum L der abzählbar additiven endlichen Mengenfunktionen auf \mathfrak{B} , mit der Variation als Norm, die Halbgruppe $U_t \varphi(\Gamma) = \int_{\mathcal{E}} P(t, x, \Gamma) \varphi(dx)$ und im Banachschen Raum B

der \mathfrak{B} -meßbaren beschränkten reellen Funktionen auf \mathcal{E} , mit $\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in \mathcal{E}\}$, die Halbgruppe $T_t f(x) = \int_{\mathcal{E}} P(t, x, dy) f(y)$. Neben der starken (gleichmäßigen) Kon-

vergenz in B wird die schwache Konvergenz betrachtet, definiert durch Konvergenz in jedem Punkt und Beschränktheit der Normen. Es sei B_0 der Raum der f mit $\lim_{t \rightarrow 0} \|T_t f - f\| = 0$ und D_A der Definitionsbereich der starken infinitesimalen Erzeugenden A von $(T_t)_{t \geq 0}$. D_A liegt stark dicht in B_0 und wird durch $\lambda E - A$ umkehrbar eindeutig auf B_0 abgebildet, wenn $\lambda > 0$; es ist dann $R_\lambda = (\lambda E - A)^{-1}$ die durch $R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f dt$ definierte Resolvente. Hiermit läßt sich zeigen, daß die

Halbgruppe $(T_t)_{t \geq 0}$ durch A innerhalb von B_0 eindeutig bestimmt ist. Liegt f in D_A , so ist die Funktion $u_t = T_t f$ eindeutig festgelegt als diejenige Lösung von $du_t/dt = A u_t$, die den folgenden Bedingungen genügt: u_t ist stark differenzierbar mit stark stetiger Ableitung, $\|u_t\| < c e^{kt}$ mit passenden Konstanten c und k ,

und $\lim_{t \rightarrow 0} \|u_t - f\| = 0$. Ähnliche Eindeutigkeitsätze gelten mit der schwachen Topologie. Der Prozeß heißt normal, wenn $P(t, x, T)$ als Funktion von (t, x) meßbar ist und $\lim_{t \rightarrow 0} P(t, x, U) = 1$ für jede Umgebung U von x . Solche Prozesse sind sowohl durch ihre schwache als auch durch ihre starke infinitesimale Erzeugende völlig bestimmt. Zum Schluß werden Fellersche Prozesse betrachtet. *K. Krickeberg.*

Dynkin, E. B.: Infinitesimal operators of Markov processes. Teor. Verojatn. Primen. 1, 38—59, engl. Zusammenfassg. 59—60 (1956) [Russisch].

Die Arbeit überträgt das Ergebnis von Feller (dies. Zbl. 57, 98 und 64, 113), nach dem ein (zeitlich homogener) eindimensionaler Markoffscher Prozeß unter passenden Voraussetzungen durch eine Differentialgleichung der Form $\partial u / \partial t = \mathfrak{A} u$ beschrieben wird, in der \mathfrak{A} einen verallgemeinerten Differentialoperator 2. Ordnung bedeutet, auf Prozesse in beliebigen metrischen Räumen. Im Gegensatz zur mehr analytischen Methode Fellers benutzt Verf. wahrscheinlichkeitstheoretische Eigenschaften der Trajektorien. Er stützt sich weitgehend auf die in den beiden vorangegangenen Referaten, deren Bezeichnungen im folgenden verwendet werden, beschriebenen Resultate. Einige Ergebnisse wurden bereits in einer früheren Note [Doklady Akad. Nauk SSSR 105, 206—209 (1955)] angezeigt. — Das Fundament der Arbeit ist die folgende Darstellung der schwachen infinitesimalen Erzeugenden \tilde{A} der Halbgruppe $(T_t)_{t \geq 0}$, die für beliebige strikte Prozesse mit rechtsseitig stetigen Trajektorien abgeleitet wird, während Feller nur Fellersche Prozesse mit stetigen Trajektorien betrachtete:

$$(*) \quad \tilde{A} f(\xi) = \lim_{d(U) \rightarrow 0} \left(\left(\int_{\Omega} f(x(\tau_U)) dP_{\xi} - f(\xi) \right) / \int_{\Omega} \tau_U dP_{\xi} \right),$$

falls $\tilde{A} f$ stetig im Punkte ξ ist und $\int_{\Omega} \tau_U dP_{\xi} < +\infty$ bei einer passenden Umgebung U_0 von ξ ; dabei bedeutet, wenn U eine offene Menge ist, $d(U)$ ihren Durchmesser und $\tau_U(\omega)$ den ersten Zeitpunkt t derart, daß die Trajektorie $x(s, \omega)$, $0 \leq s \leq t$, von $\mathcal{G} - U$ den Abstand Null hat. Anschließend behandelt Verf. Fellersche Prozesse mit rechtsseitig stetigen Trajektorien und definiert einen Operator \mathfrak{A} durch die rechte Seite von (*) im Bereich aller derjenigen f , für die dieser Grenzwert bei beliebigem ξ existiert mit $f \in C$ und $\mathfrak{A} f \in C$. Im allgemeinen ist $A \subseteq \tilde{A} \subseteq \mathfrak{A}$ und \tilde{A} nicht eindeutig durch \mathfrak{A} festgelegt, der Tatsache entsprechend, daß zur Bestimmung des Prozesses außer \mathfrak{A} noch zusätzliche Bedingungen erforderlich sind; bei kompaktem \mathcal{G} gilt jedoch $A = \tilde{A} = \mathfrak{A}$. Sodann werden Fellersche Prozesse mit stetigen Trajektorien untersucht, und es wird gezeigt, wie \mathfrak{A} in diesem Fall als natürliche Verallgemeinerung eines elliptischen Differentialoperators 2. Ordnung erscheint. Besonders ausführlich wird der eindimensionale Fall behandelt, wobei sich dann \mathfrak{A} in der Tat als der Fellersche verallgemeinerte Differentialoperator 2. Ordnung herausstellt. Schließlich werden einige unstetige Prozesse behandelt.

K. Krickeberg.

Elliott, Joanne and William Feller: Stochastic processes connected with harmonic functions. Trans. Amer. math. Soc. 82, 392—420 (1956).

Der durch $(*) T_t f(x) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} t (t^2 + (x - y)^2)^{-1} f(y) dy$ definierten Halbgruppe $(T_t)_{t > 0}$ von Transformationen in $C[-\infty, +\infty]$, mit der infinitesimalen Erzeugenden $\Omega F(x) = \pi^{-1} \times \text{Hauptwert} \int_{-\infty}^{\infty} F'(y) (y - x)^{-1} dy$, entspricht der Cauchysche Prozeß, d. h. der separable Markoffsche Prozeß mit den stationären Übergangswahrscheinlichkeiten $(**) P(t, x, S) = \pi^{-1} \int_S t (t^2 + (x - y)^2)^{-1} dy$. Die Verff. zeigen nun, daß

im Fall $0 < a < +\infty$ die durch die Randbedingungen $T_l^{(a)} f(\pm a) = 0$ charakterisierte minimale Halbgruppe $(T_l^{(a)})_{t>0}$ mit der infinitesimalen Erzeugenden

$\Omega_a F(x) = \pi^{-1} \text{Hw.} \int_{-a}^a F'(y) (y - x)^{-1} dy$ analog zu (*) und (***) durch einen

Kern $P_a(t, x, S)$ beschrieben wird, der gerade die Übergangswahrscheinlichkeiten des durch den Cauchyschen Prozeß in $(-a, a)$ bestimmten Prozesses mit absorbierenden Grenzen (Kac, dies. Zbl. 45, 70) darstellt. Weiter werden Rückkehrprozesse der folgenden Art betrachtet: innerhalb von $(-a, a)$ bewege sich ein Teilchen wie beim Cauchyschen Prozeß; springt es zum ersten Mal zu einem Punkt z mit $|z| > a$, so kehre es mit einer Wahrscheinlichkeit $\tau(z)$ $p(z, S)$ in eine Borelsche Teilmenge S von $(-a, a)$ zurück, wobei $0 \leq \tau(z) \leq 1$ und $p(z, (-a, a)) = 1$, und bewege sich von dort aus wie vorher. Die Übergangswahrscheinlichkeiten solcher Prozesse werden als Laplacesche Transformierte von Lösungen gewisser Integralgleichungen berechnet und die entsprechenden Halbgruppen bestimmt; ihre infinitesimalen Erzeugenden brauchen nicht mehr gleich Ω_a zu sein. Schließlich werden Halbgruppen $(S_t)_{t>0}$ in $C[\alpha_1, \alpha_2]$ mit $\alpha_1 < \alpha_2$ betrachtet, die dadurch definiert sind, daß $u(t, x) = S_t f(x)$ harmonisch sein und Randbedingungen der Form $p_i u(\alpha_i, t) + (-1)^i q_i \partial u(\alpha_i, t) / \partial x = 0$ erfüllen soll. Im Fall $p_i \geq 0, q_i \geq 0$ entspricht ihnen wiederum ein Markoffscher Prozeß in $[\alpha_1, \alpha_2]$, über dessen Beziehungen zum Cauchyschen keine allgemeinen Aussagen gemacht werden. Ist jedoch $p_1 = p_2 = 0$, so erhält man einen Rückkehrprozeß; das gleiche gilt z. B. auch, wenn mit $\alpha_1 = -\alpha_2$ die Randbedingungen $u(\alpha_1, t) = u(\alpha_2, t)$ benutzt werden. Die Beweise stützen sich weitgehend auf frühere Arbeiten von J. Elliot (dies. Zbl. 58, 106 und 70, 331).

K. Krickeberg.

Theodorescu, Radu: Un théorème ergodique pour les processus stochastiques continus de multiplicité p . An. Univ. C. I. Parhon Bucureşti, Ser. Şti. Natur. Nr. 10, 23—24, russ. und französ. Zusammenfassung 24 (1956) [Rumänisch].

Sei $P(\bar{s}, \bar{x}, t, X)$ die Übergangs-Wahrscheinlichkeit eines kontinuierlichen p -fachen Markoffschen Prozesses, wobei $\bar{S} = (S_1, S_2, \dots, S_p)$ ein zeitlicher Vektor ist. Sodann beweist Verf. folgendes ergodische Theorem, als Verallgemeinerung des entsprechenden Theorems für $p = 1$ von R. Rodeanu (dies. Zbl. 67, 109): Wenn eine Zahlenreihe $\tau(t^k)$ existiert [mit $0 < \tau(t^k) < 1, \sum_{k=1}^{\infty} \tau(t^k) = \infty$], so daß für jede

Verteilung A, B von $R, P(\bar{s}, \bar{x}, t^k, A) \geq \tau(t^k)$ sei oder $P(\bar{s}, \bar{x}, t^k, B) \geq \tau(t^k)$, dann ist $\lim_{k \rightarrow \infty} (P(\bar{s}, \bar{x}, t^k, X) - P(\bar{s}, \bar{z}, t^k, X)) = 0$.

O. Onicescu.

Theodorescu, Radu: Sur un équation reconstruite dans la théorie des processus stochastiques. An. Univ. C. I. Parhon Bucureşti, Ser. Şti. Natur. Nr. 11, 39—40, russ. und französ. Zusammenfassung 40 (1956) [Rumänisch].

Der Verf. zeigt, unter sachgemäßen Bedingungen für Q , daß das System

$$\frac{dP(t, X)}{dt} = \int_E P(t, dz) Q(t, z, X | P(t, Y)), \quad s < t, \quad P(s, X) = \delta(x, X)$$

eine bestimmte Lösung $P(t, X)$ hat, die eine Wahrscheinlichkeit ist.

O. Onicescu.

Onicescu, O.: La répartition limite des sommes de variables aléatoires d'un processus Markov fini, homogène et continu. An. Univ. C. I. Parhon Bucureşti, Ser. Şti. Natur. Nr. 12, 9—11, russ. und französ. Zusammenfassung 12 (1956) [Rumänisch].

Let us consider a continuous-parameter homogeneous Markov chain with a finite number of states. Starting from the system of differential equations verified by the limit characteristic function corresponding to a convenient normed sum

of random variables and applying the method of the characteristic function — as used by the author and G. Mihoc — the Gaussian law as limit case is obtained, except for certain cases, mentioned during the investigation of the problem.

R. Theodorescu.

Takashima, Michio: Note on evolutionary processes. Bull. math. Statist. 7, 18—24 (1956).

Verf. untersucht den von B. J. Prendeville [J. roy. statist. Soc., London, Ser. B 11, 273 (1949)] vorgeschlagenen Geburt-Tod-Prozeß mit Zu- und Abgangsrate

$$\lambda(n(t)) = \alpha [N_2/n(t) - 1], \quad \mu(n(t)) = \beta [1 - N_1/n(t)] \quad (0 < N_1 \leq n \leq N_2),$$

bei welchem die Wahrscheinlichkeit $p_N(t)$ dafür, daß zur Zeit t die Bevölkerung $n(t) = N$ Individuen umfasse, der Differentialgleichung

$$dp_N(t)/dt = -N [\lambda(N) + \mu(N)] p_N(t) + (N+1) \mu(N+1) p_{N+1}(t) + (N-1) \lambda(N-1) p_{N-1}(t)$$

genügt. Ihre Wahrscheinlichkeitserzeugende φ erfüllt eine partielle Differentialgleichung, deren Lösung mit Anfangsbedingung $\varphi(z; t)|_{t=0} = z^n$ lautet:

$$\varphi(z; t) = \sum_{N=N_1}^{N_2} p_N(t) z^N = \{[\alpha + \beta e^{-(\alpha+\beta)t}] z + \beta [1 - e^{-(\alpha+\beta)t}]\}^{n-N_1} \cdot \{\alpha [1 - e^{-(\alpha+\beta)t}] z + \alpha e^{-(\alpha+\beta)t} + \beta\}^{N_2-n}/(\alpha+\beta)^{N_2-N_1}.$$

Aus ihr bzw. den durch iterierte Differentiation gewonnenen gewöhnlichen Differentialgleichungen für die faktoriellen Momente von $n(t)$ werden Varianz und Erwartungswert von $n(t)$

$$\mu_1(t) = E n(t) = \{\alpha N_2 + \beta N_1 - [\alpha N_2 + \beta N_1 - (\alpha + \beta) n] e^{-(\alpha+\beta)t}\}/(\alpha + \beta)$$

bestimmt, welcher übereinstimmt mit der Populationsgröße $\tilde{n}(t)$ des durch die Differentialgleichung

$$d\tilde{n}(t)/dt = \alpha N_2 + \beta N_1 - (\alpha + \beta) \tilde{n}(t)$$

gekennzeichneten, entsprechenden deterministischen Modells. Insbesondere führen die Grenzübergänge $t \rightarrow \infty$ bzw. $N_1 = 1, \beta = \mu_1, \alpha N_2 = \lambda_0, N_2 \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow 0$ mit $t \rightarrow \infty$ auf Binomial- bzw. Poisson-Verteilung von $\lim_{t \rightarrow \infty} n(t) = N_1$, deren Erwartungs-

werte $E \lim_{t \rightarrow \infty} n(t)$ sich genau mit den entsprechenden Grenzwerten von $\tilde{n}(t)$, $(\alpha N_2 + \beta N_1)/(\alpha + \beta), 1 + \lambda_0/\mu_1$, decken. Im Gegensatz hierzu konnte für den durch $\lambda(n(t)) = \alpha [N_2 - n(t)], \mu(n(t)) = \beta [n(t) - N_1]$ gekennzeichneten logistischen Geburt-Tod-Prozeß von W. Feller (dies. Zbl. 21, 340) D. G. Kendall (dies. Zbl. 33, 88) bei dem zweiten Grenzübergang Verschiedenheit des stochastischen Mittelwertes und des deterministischen Grenzwertes nachweisen.

M. P. Geppert.

Takahashi, Shigeru: On some random Riemann-sums. Tôhoku math. J., II. Ser. 8, 245—257 (1956).

Let $\{t_i(\omega)\}$ $i = 1, 2, \dots$ denote a sequence of independent random variables each having a uniform distribution over $[0, 1]$. For fixed ω let $t_{i,n}(\omega)$ be the i^{th} value of $\{t_j(\omega)\}$, $1 \leq j \leq n$, arranged in increasing order and let $t_{0,n}(\omega) \equiv 0$ and $t_{n+1,n}(\omega) \equiv 1$. Let $f(t)$ be integrable for $0 \leq t \leq 1$ and let

$$S_n(\omega) = \sum_{i=1}^n f(t_{i,n}(\omega)) (t_{i+1,n}(\omega) - t_{i,n}(\omega)).$$

The following strong probability limit theorem is proved: If $f(t) \in L_p(0, 1)$, $p > 1$, then

$$P \left[\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = \int_0^1 f(t) dt \right] = 1.$$

If it is only assumed that $f(t) \in L(0, 1)$ then the following weak probability limit theorem is proved: For any $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| S - \int_0^1 f(t) dt \right| > \varepsilon \right] = 0.$$

J. M. Shapiro.

Watanabe, Hisao: On the Poisson distribution. *J. math. Soc. Japan* 8, 127—134 (1956).

Es seien $\dots \leq x_{-1} \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots$ ($x_0 \equiv 0$) reelle Zufallsgrößen; $y_j = x_j - x_{j-1}$ bilde eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit dem gemeinsamen Verteilungsgesetz $F(x)$. Von der Position x_j aus beginne ein Teilchen P_j seinen Weg, es bezeichne $Y_j(t)$ die Position von P_j zur Zeit t (t nehme nur ganze Zahlen an). Die Teilchen mögen sich so bewegen, daß $Y_j(t) - Y_j(t-1)$ ($t > 0$, $-\infty < j < +\infty$) unabhängig und nach ein und demselben Gesetz $G(x)$ verteilt wird. Außerdem seien für $t > 0$ die beiden Klassen von Zufallsgrößen $\{X_j(t) = Y_j(t) - x_j, -\infty < j < +\infty\}$ und $\{x_j; -\infty < j < +\infty\}$ unabhängig. Maruyama [*Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.* 6, 1—6 (1955)] untersuchte die Grenzverteilung von $N_I(t)$, der Anzahl der Teilchen P_j , die sich zur Zeit t in einem Intervall $I = [a, b]$ befinden, unter der Voraussetzung, daß $G(x)$ keine gitterförmige Verteilung sei. Verf. untersucht das gleiche Problem für den Fall, daß $G(x)$ eine gitterförmige Verteilung mit maximalem Schritt (span) $d > 0$ ist. Verf. beweist: Wenn $0 < m = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) < +\infty$ ist, so gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} P \{N_I(t) = k\} = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Dabei ist $\lambda = (b-a)/m$, wenn $F(x)$ nicht gitterförmig ist oder aber gitterförmig ist mit einem maximalen Schritt d' , $+ \infty$

d/d' irrational. Anderenfalls, wenn d/d' rational $= q/p$, so ist $\lambda = (1/m)p \sum_{r=-\infty}^{\infty} I(r/p)$ ($I(x) = 1$, falls $x \in I$, sonst $= 0$). *W. Richter.*

Dobrušin, R. L.: Über das Poissonsche Verteilungsgesetz für Teilchen im Raume. *Ukrain. mat. Žurn.* 8, 127—134 (1956) [Russisch].

Let $\{\xi_i(t), i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ represent the motion of a countable number of particles on a line. It is supposed that the random variables $\xi_i(t) - \xi_i(0)$ (t fixed) are mutually independent, have a distribution $F_t(x)$, independent of i and of the values $\xi_j(0)$ ($i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Doob has proved (Stochastic processes, s. this Zbl. 53, 268) that if the particles were initially distributed according to a homogeneous Poisson process then this property and also the parameter remains unchanged at every t . The main theorem of the present paper is the following: If $\eta_{\Delta}(t)$ denotes the number of particles at time t in the interval Δ and there is a $\lambda \geq 0$ such that

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} M \left| \frac{\eta_{\Delta}(0)}{|\Delta|} - \lambda \right| = 0,$$

uniformly for every interval, moreover for every l

$$(*) \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |P_t(nl, (n+1)l) - P_t((n-1)l, nl)| = 0,$$

where

$$P_t(a, b) = F_t(b+0) - F_t(a), \quad F_t(x) = P(\xi_i(t) - \xi_i(0) < x),$$

then for disjoint intervals $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, the variables $\eta_{\Delta_1}(t), \eta_{\Delta_2}(t), \dots, \eta_{\Delta_n}(t)$ are asymptotically independent (as $t \rightarrow \infty$) and $\eta_{\Delta}(t)$ has a Poisson limiting distribution with mean $\lambda|\Delta|$. Condition (*) is necessary in the sense that without it the convergence to a Poisson limiting distribution does not hold. Another theorem is the

following: The distribution of the particles with $M \eta_\Delta(0) < 0$ remains unchanged and only if at $t = 0$ we have a generalized Poisson distribution where λ (which is now a random variable) has a finite expectation. *A. Prékopa.*

Blanc-Lapierre, André, Pierre Dumontet et Michel Savelli: Remarques sur quelques propriétés de fonctions aléatoires stationnaires intervenant dans des problèmes de changement de fréquence. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 2799—2800 (1956).

On donne, sous certaines hypothèses, des conditions suffisantes pour que, $X(t)$ étant totalement stationnaire d'ordre K , il en soit de même de $X(t) e^{2\pi i \nu_0 t}$ ou de certaines composantes prélevées dans le spectre de $X(t) \cos 2\pi \nu_0 t$ (Résumé des l'auteurs). *R. Féron.*

Mabboux-Tariel, Geneviève et Claude Mabboux: Spectre énergétique de certaines fonctions aléatoires de la forme ± 1 . C. r. Acad. Sci., Paris 243, 1509—1511 (1956).

Für den stationären Prozeß $X(t) = \pm 1$, der durch das Verteilungsgesetz seiner als unabhängig angenommenen Abstände der Sprungstellen bestimmt ist, wird die Spektraldichte, d. h. die Fouriertransformierte der Autokorrelation bestimmt:

$$A(\omega) = \frac{n}{2\pi^2 \omega^2} \left\{ \frac{1 - \varphi(2\pi\omega)}{1 + \varphi(2\pi\omega)} + \frac{1 - \varphi^*(2\pi\omega)}{1 + \varphi^*(2\pi\omega)} \right\};$$

dabei ist n die Intensität (mittlere Zahl) der Sprungstellen und φ die Fouriertransformierte der Dichte der Abstandsgröße. Als Beispiel wird der Abstand poissonverteilt mit und ohne feste Verzögerung angegeben. *D. Morgenstern.*

Itô, Kiyosi: Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments. Trans. Amer. math. Soc. 81, 253—263 (1956).

Suivant Halmos et von Neumann [Ann. of Math., II. Ser. 44, 332—350 (1942)], l'A. définit deux sortes d'équivalences de groupes de transformations conservant la mesure des ensembles: des transformations du même type spatial et des transformations du même type spectral. Ceci permet d'étudier les processus $X(t, \omega)$ à accroissements stationnaires; I étant un intervalle, on définit alors T_τ par

$$T_\tau \{ \omega; \Delta X(I, \omega) < c \} = \{ \omega; \Delta X(I + \tau, \omega) < c \}.$$

L'A. montre que les groupes de transformations induits par différents processus sont du même type spectral mais on ne sait si ils sont du même type spatial. *R. Féron.*

Špaček, Antonín: Die Regularitätseigenschaften zufälliger Transformationen. Ber.-Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung math. Statist. Berlin 1954, 109—111 (1956).

A random transform is a probability space $\{F, \mathfrak{F}, \mu\}$, the elements of F being transformations of an abstract set X into an abstract set Y (for instance the sample functions of a stochastic process transform R_1 , the one dimensional Euclidian space, into R_1). In Y there is a σ -algebra \mathfrak{B} with the basis \mathcal{G} and \mathfrak{F} has the minimal property analogously formulated as in the definition of probability in function spaces. We are given a system \mathfrak{D} of countable sets of subsets of X which satisfies the conditions:

$\sum_{D \in \mathfrak{D}} D \supset X$; for every sequence D_1, D_2, \dots of \mathfrak{D} there is a $D \in \mathfrak{D}$ such that $\bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \subset D$.

The regularity of the random transform is defined by a transformation T of all subsets of X into all subsets of F as follows: a) $T(x) \neq 0$, b) if $D \in \mathfrak{D}$ and $g \in T(D)$, then $T(x) \cap \{f: f(x) = g(x)\} \neq 0$, c) if $D \in \mathfrak{D}$, then $T(D) \in \mathfrak{F}$, d) if $A \subset B \subset X$,

then $T(B) \supset_{x \in D} T(A)$. (F, \mathfrak{F}, μ) is called almost surely T -regular if $\mu(T(x)) = 1$ where $\bar{\mu}$ is the outer measure corresponding to μ . The main result is the following: (F, \mathfrak{F}, μ) is almost surely T -regular if and only if for every $D \in \mathfrak{D}$, $\mu(T(D)) = 1$. This contains as special cases the theorems of Doob (s. this Zbl. 32, 34) and Mann (s. this Zbl. 45, 406). Application is mentioned to the additivity of random set functions.

A. Prékopa.

Tsao, Chia Kuei: Distribution of the sum in random samples from a discrete population. *Ann. math. Statistics* 27, 703—712 (1956).

Es seien X_1, X_2, \dots, X_m unabhängige Zufallsveränderliche mit derselben diskreten Gleichverteilung: $P\{X_i = j\} = 1/k$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k$). Verf. gibt Tabellen für die Verteilungsfunktion von $S = \sum_{i=1}^m X_i$ für die Werte $m = 1, 2, \dots, 20$ und $k = 3, 4, 5, 6$. — Diskussion der Anwendungen und einiger damit verknüpften Probleme.
K. Sarkadi.

Lévy, Paul: Le dernier manuscrit inédit de W. Doeblin. *Bull. Sci. math.* II. Sér. 80, 61—64 (1956).

Commentaires de l'A. sur le fragment de lettre suivant de Doeblin: «J'ai enfin démontré le théorème suivant: X_1, X_2, \dots, X_n étant des variables aléatoires suivant la même loi \mathfrak{L} , l'ensemble de toutes les lois limites de $\frac{1}{b_n} \left(\sum_{i=1}^n X_i - a_n \right)$ ($n = n_q, q \rightarrow \infty$) ensemble que je note $EP'[\mathfrak{L}]$ a les propriétés suivantes: 1° $EP'[\mathfrak{L}]$ est un ensemble fermé de classes formé uniquement de lois indéfiniment divisibles et s'il contient une loi I il contient toutes les lois I^t ($0 < t < \infty$). 2° il existe une suite de lois $I_n \in EP'[\mathfrak{L}]$, la dispersion de chaque I_n pour la probabilité $\frac{1}{2}$ étant 1 telle que toute classe $\mathfrak{R}(I) \in EP'[\mathfrak{L}]$ soit de la forme $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{R}[I_n^t]$ pour un t et une suite $\{n\}$ convenables.»
R. Féron.

Richardson, Moses: On finite projective games. *Proc. Amer. math. Soc.* 7, 458—465 (1956).

Consider the projective plane whose field of coordinates is the Galois field $GF(p^n)$. A „finite projective game“ $PG(2, p^n)$ is defined by taking the points to represent players, the lines to represent minimal winning coalitions [for this and other definitions see von Neumann and Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton (1947)]; a set of points containing no line but intersecting every one corresponds then to a blocking coalition. — Von Neumann and Morgenstern considered the case $n = 7, p = 2$ and remarked (loc. cit., footnote 2 on p. 469) that „other projective geometries do not seem to be suited for our present purpose“. The present author elucidates this by his theorem 1: The game $PG(2, p^n)$ has blocking coalitions if $p^n > 2$ and none if $p^n = 2$. In particular, there exists a blocking coalition of 2 p^n players if $p^n > 2$. There follow 6 similar theorems.

S. Vajda.

Statistik:

• **Chacón, E.:** *Lehrbuch der Statistik*. Bd. 2. Bilbao: Ed. El Mensajero de Corazón de Jesús 1956. 524 S. [Spanisch].

Kitagawa, Tosio: Some aspects of stochastically approximative analysis. *Bull. math. Statist.* 6, 109—129 (1956).

This paper is one in a series in which the author is developing some connexions between statistics and some other fields, e. g. between sequential analysis (or “successive processes of statistical controls”, respectively, cf. Kitagawa, s. this Zbl. 48, 366) and cybernetics, between analysis of variance and function spaces (cf. Kitagawa, s. this Zbl. 45, 408): the list of references includes 15 papers by the author. An introductory chapter, which is not always clear, explains that the author intends stochastically approximative analysis to be a more general concept than the stochastic approximation methods developed by Robbins & Monro and others. For instance, he has introduced probability measures over certain families of functions in order to compare efficiencies between various mechanical quadrature methods applied to these functions, and this procedure, too, falls within his conceptual

framework of stochastically approximative analysis. After the introduction, the present paper consists of three parts. The first part adopts a minimax approach in order to choose coefficients c_{ni} ($i = 1, \dots, n$) in such a way that $\sum_{i=1}^n c_{ni} Y_i$ be a better estimator of the limiting value m_0 of the sequence $m_i = \mathcal{E}(Y_i)$ ($i = 1, 2, \dots$) than Y_n would be. Only if one has rather precise information concerning the ratios of the variances of the Y_i one will be able to construct an estimator that is better in the minimax sense than $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$. This is so because in the absence of such information one has to consider too large a domain in parameter space. The inequality sign in Lemma 1.2 on p. 115 should be reversed. The second part of the paper discusses the difference $R(t) = f(t) - P(t)$ between some function $f(t)$ and the interpolating function $P(t)$ which results from Lagrange's method if the values $f(t_i)$ ($i = 1, \dots, n$) are known either exactly or with independently distributed stochastic errors ε_i ($i = 1, \dots, n$). Under the assumption that

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{p-1} t^{p-1} + \frac{1}{(p-1)!} \int_0^t (t-s)^{p-1} y(s) ds, \quad (1)$$

where the a_j are independently distributed $N(0, \sigma_j^2)$ and " $y(\cdot)$ belongs to the function space (C) with Wiener measure" he determines the distribution of $R(t)$ for each value of t . Under the assumption that (1) holds for the a_j being unknown constants and $y(\cdot)$ again belonging to the function space (C) with Wiener measure he calculates the expectation of $\int_0^1 [R(t)]^2 dt$ ("average loss"). No reason is offered why the space of functions $f(t)$ should be probabilized in these various ways. Furthermore, assuming that (2) $f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j$ (a_j apparently being constants), he discusses the variate-difference method used in order to estimate the degree $p-1$ of the interpolating polynomial if the values $f(t_j)$ (equal intervals between the t_j) are known with stochastic errors. No synthesis is given between the various assumptions (1) and (2). The formulae are not developed to a point where practical application is immediate. The third part of the paper considers the problem of fitting an unknown function by sums

$$\sum_{v=0}^k \hat{c}_v \varphi_v(t; n) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (3)$$

with unknown k , where $\{\varphi_v(t; n)\}$ ($v = 0, 1, \dots, n-1$) is a system of normalized orthogonal functions associated with a system of points where observations were performed on the unknown function. A description is given of what is involved in the current procedures used to determine the "best" k -value; this description is clear and exact, in terms of mathematical statistics, but again not sufficiently far developed for practical applications. On p. 126 our attention is drawn to the fact that current procedures have a "relatively large chance of adopting some polynomial of very low degree". The author's remedy, to start testing the significance of the \hat{c}_v in the order of the decreasing values of the statistics \hat{c}_v , would necessitate the previous calculation of a relatively large number of these \hat{c}_v -values (in his example (2.11) up to $v = 8$ at least), which would be at variance with the basic idea of fitting by means of sums like (3): to stop when fit is satisfactory; this is a real difficulty (quite apart from the fact that testing the \hat{c}_v in this alternative order would make a change in the significance tests compulsory). The problems discussed in this paper are clearly interesting, yet much remains to be done before they can be considered to be satisfactorily solved.

H. R. van der Vaart.

Moore, P. G.: The geometric, logarithmic and discrete pareto forms of series. *J. Inst. Actuaries* 82, 130—136 (1956).

Verf. diskutiert die genannten Verteilungen im Vergleich mit der Poisson-Verteilung: Wenn p_r die Wahrscheinlichkeit ist, daß ein Ereignis r -mal auftritt, dann ist der Quotient p_{r+1}/p_r bei Poisson $\lambda/(n+1) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\lambda > 0$; bei der geometrischen Verteilung ist $p = \text{const}$, $0 < p < 1$; bei logarithmischer Verteilung ist der Quotient $n x/(n+1) \rightarrow x$, $x < 1$; bei der Pareto-Verteilung ist er $[n/(n+1)]^\beta \rightarrow 1$, $\beta < 1$. Entsprechend nimmt die Wahrscheinlichkeit, daß mit r auch $r+1$ Ereignisse auftreten, bei Poisson ab; bei der geometrischen Verteilung ist sie konstant $= p$, bei der logarithmischen und der Pareto-Verteilung nimmt sie zu. Verf. gibt für die logarithmische und die Pareto-Verteilung Tabellen der ersten Momente μ'_1 und der Varianz für die Schätzwerte von x bzw. β .
H. Härten.

Stein, Charles: Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution. *Proc. 3rd Berkeley Sympos. math. Statist. Probability* 1, 197—206 (1956).

Für den Zufallsvektor $X = g + \xi$ ($g = n$ -dimensionaler Gaußscher Einheitsvektor) ist der Erwartungsvektor ξ zu schätzen. Für $n = 1$ ist bekanntlich $d_0(X) = X$ admissible, ebenso noch für $n = 2$. Für $n \geq 3$ lassen sich jedoch positive Konstanten a, b so finden, daß der Erwartungswert der Schadensfunktion $L(\xi, d) = (\xi - d)^2$ für $d_1(X) = X \left(1 - \frac{b}{a + X^2}\right)$ kleiner wird als für d_0 . Ferner ist jede Schätzfunktion, die in der Klasse der Schätzfunktionen der Form $d(X) = X h(X^2)$ admissible ist, zugleich admissible in der Klasse aller Schätzfunktionen.
D. Bierlein.

Laha, R. G.: On the stochastic independence of two second-degree polynomial statistics in normally distributed variates. *Ann. math. Statistics* 27, 790—796 (1956).

The author generalizes a theorem of Craig (this Zbl. 60, 308) by giving necessary and sufficient conditions for the independence of two inhomogeneous quadratic polynomials in n independent standard normal variables. One corollary extends this result to the case where the variables have any n -dimensional normal distribution. A second corollary says that two independent quadratic polynomials in n independent standard normal variables can be transformed orthogonally to polynomials without any variables in common.
L. J. Cote.

Finney, D. J.: The consequences of selection for a variate subject to errors of measurement. *Revue Inst. internat. Statist.* 24, 1—10 (1956).

The frequency distribution of a population of values, x , is to be modified by eliminating certain values (truncating), but the modification is made by means of estimates, $y = x + w$, w being an error independent of x . The author obtains lengthy expansions of the characteristic function and the first four moments of the modified distribution assuming normal errors.
L. J. Cote.

Billingsley, Patrick: Asymptotic distributions of two goodness of fit criteria. *Ann. math. Statistics* 27, 1123—1129 (1956).

Let $\{X_i; i = 1, 2, \dots\}$ be a stochastic process whose outcomes are sequences of integers, $1, 2, \dots, s$. To test the hypothesis that the X_i are independent and stationary with $P\{X_i = k\} = p_k$, the author considers the statistic $\sum_{\alpha} \left[n \left(\prod_{k \in \alpha} p_k \right) \right]^{-1} \left[n_{\alpha} - n \left(\prod_{k \in \alpha} p_k \right) \right]^2$ where n_{α} is a random variable equal to the number of ν -tuples $(X_m, \dots, X_{m-\nu+1})$ ($m < n$) in an outcome which are equal to the ν -tuple, $\alpha = (u_1, \dots, u_{\nu})$; the sum is over all α with $1 \leq u_i \leq s$. He also considers the related statistic in which the p_k 's are replaced by estimates $n_{(k)}/n$. The asymptotic distributions of each of these is found to be a certain convolution of chi-square distributions. The proof is accomplished by a central limit theorem for dependent random vectors and an involved but neatly arranged algebraic investigation of the covariance matrix.
L. J. Cote.

Adhikari, B. P. et D. D. Joshi: Distance-discrimination et résumé exhaustif. Publ. Inst. Statist. Univ., Paris 5, 57—74 (1956).

Travail didactique rappelant les fondements de l'analyse discriminante et les propriétés souhaitables d'une distance entre deux populations — résumé les travaux de K. Pearson, Mahalanobis, Fisher, Welch, Mourier, Battacharya, Rao, Shannon, Kolmogoroff, etc. *R. Féron.*

Bartlett, M. S.: Comment on Sir Ronald Fisher's paper: „On a test of significance in Pearson's Biometrika Tables (No. 11)“. J. roy. statist. Soc., Ser. B 18, 295—296 (1956).

Verf. weist darauf hin, daß die von R. A. Fisher (vgl. nachstehendes Ref.) zur Kritik am Welch-Aspin-Test angeführte bedingte Verteilung von

$$d = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$$

für voneinander unabhängige $(n_1 + 1)$ - und $(n_2 + 1)$ -gliedrige Stichproben gegebenen Varianzenverhältnisses s_2^2/s_1^2 aus Normalverteilungen mit gleichem Mittelwert, aber beliebigen unbekannten Varianzen bereits vom Verf. (dies. Zbl. 15, 361) angegeben wurde, jedoch keinen gültigen Einwand gegen den Welch-Aspin-Test begründet.

M. P. Geppert.

Welch, B. L.: Note on some criticisms made by Sir Ronald Fisher. J. roy. statist. Soc., Ser. B 18, 297—302 (1956).

Verf. entkräftet die von R. A. Fisher (dies. Zbl. 70, 373) gegen den von Verf. (dies. Zbl. 29, 408) begründeten und von A. A. Aspin (dies. Zbl. 36, 211) für den Spezialfall $k = 2$ (Behrens-Fisher-Problem) tabulierten Test erhobenen Einwände, indem er im Sinne der Neyman-Pearson-Theorie nochmals die genaue Bedeutung der auf der unbedingten Verteilung von

$$v = (y - \eta) / \sqrt{\sum_{i=1}^k \lambda_i s_i^2}$$

(y normal verteilt: $N\left(\eta, \sum_{i=1}^k \lambda_i s_i^2\right)$ s_i^2 = voneinander und von y unabhängige Schätzer der unbekannten σ_i^2 , $f_i s_i^2/\sigma_i^2$ mit f_i F. G. χ^2 -verteilt) fußenden, für $k = 2$ durch $\Pr[v < V(c)] = P$ als Funktion von $c = \lambda_1 s_1^2/(\lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2)$ bestimmten Funktion $V(c)$ darlegt und zu der von R. A. Fisher herangezogenen bedingten Verteilung $\Pr[v < v_0 | c]$ in Beziehung setzt.

M. P. Geppert.

David, Herbert T. and William H. Kruskal: The WAGR sequential t -test reaches a decision with probability one. Ann. math. Statistics 27, 797—805 (1956). Correction. Ibid. 29, 936 (1958).

Die Verff. zeigen, daß die von Wald, Arnold, Goldberg und Rush-ton angegebene sequentielle Variante des t -Tests mit Wahrscheinlichkeit 1 in endlich vielen Schritten zur Annahme einer der beiden Hypothesen [$H_0: (U - \mu)/\sigma = K_0$, $H_1: (U - \mu)/\sigma = K_1$; U, K_i sind Konstanten] führt.

D. Bierlein.

Weiss, Lionel: On the uniqueness of Wald sequential tests. Ann. math. Statistics 27, 1178—1181 (1956).

A sei die untere Schranke des Annahmebereichs für die Hypothese H_1 („ X besitzt die Dichte f_1 “), B die obere Schranke des Annahmebereichs für H_2 im üblichen Sequential-Probability-Ratio-Test ($0 < B < A < \infty$). $\alpha(B, A)$ und $\beta(B, A)$ seien die zugehörigen Irrtumswahrscheinlichkeiten. Unter der Voraussetzung, daß unter jeder der beiden Hypothesen die Zufallsvariable $f_2(x)/f_1(x)$ eine stetige Verteilung besitzt, die jedem endlichen Intervall eine positive Wahrscheinlichkeit zuordnet, zeigt Verf., daß zu jedem „vernünftig“ gewählten Zahlenpaar α, β höchstens eine Lösung A, B der Gleichungen $\alpha(B, A) = \alpha$, $\beta(B, A) = \beta$ existiert.

D. Bierlein.

Ray, W. D.: Sequential analysis applied to certain experimental designs in the analysis of variance. *Biometrika* 43, 388—403 (1956).

Es seien $x = (x_1, \dots, x_N)$ unabhängig normal verteilte Zufallsvariable mit $E(x) = \vartheta C'$, worin $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_s)$ ein unbekannter Parametervektor und $C = (c_{ij})$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, s, s < N$) eine bekannte Matrix ist. $V(x_i) = \sigma^2$ ist ebenfalls unbekannt. Getestet werden soll die Hypothese $H_0: \vartheta_{s-q+1} = \dots = \vartheta_s = 0$ gegen $H_1: (\vartheta_{s-q+1}, \dots, \vartheta_s) = \varphi$. Es werden zwei Sequentialtests beschrieben. Der erste benutzt das Modell $x_{ti} = a + b_t + z_{ti}$ mit $t = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, n$, worin $E(z_{ti}) = 0$, $V(z_{ti}) = \sigma^2$ und $\sum b_t = 0$. Es wird $N = kn$, $s = k$ und $q = k - 1$ gesetzt. Es werden Ausdrücke

$$G^{(N)} = n \sum_{t=1}^k (\bar{x}_{t.} - \bar{x}_{..})^2 / \sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^n (x_{ti} - \bar{x}_{t.})^2$$

gebildet und dazu obere und untere Schranken $\bar{G}^{(N)}$, $G^{(N)}$, deren Überschreiten den Sequentialtest beendet und entscheidet. Der zweite Test geht von dem Modell aus: $x_{ti} = a + b_t + v_i + z_{ti}$ ($t = 1, \dots, k; i = 1, \dots, r$) mit $\sum b_t = 0$, $\sum v_i = 0$. Daraus werden die $G^{(N)}$ gebildet:

$$G^{(N)} = k \sum_{i=1}^n (\bar{x}_{.i} - \bar{x}_{..})^2 / \sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^n (x_{ti} - x_{t.} - \bar{x}_{.i} + \bar{x}_{..})^2.$$

Für beide Tests sind zu kleinen k und n Tabellen angegeben, die $\bar{G}^{(N)}$ und $G^{(N)}$ bei vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit enthalten. Der Erwartungswert für den Stichprobenumfang N ist angegeben; es ist unbekannt, ob Tests dieser Art mit Wahrscheinlichkeit 1 abbrechen.

F. Wever.

Kitagawa, Tosio and Tsunetami Seguchi: The combined use of runs in statistical quality controls. *Bull. math. Statist.* 7, 25—45 (1956).

Mit Hilfe wahrscheinlichkeitserzeugender Funktionen beweisen Verff. zwei Sätze über rekurrente Ereignisse ε . Erfüllt die Wahrscheinlichkeit $f(n)$ dafür, daß ε erstmalig beim n -ten Versuch eintrete, für alle $n \geq k + 2$ die Funktionalgleichung

$$f(n) = f(n-1) - \sum_{j=2}^{k+1} R_{j-1} f(n-j)$$

mit positiven Konstanten R_j , für $j = 3, 4, \dots, k$

$$f(j) = \sum_{i=1}^{j-2} R_i \left[1 - \sum_{v=1}^{j-i-1} f(v) \right] + R_{j-1} + \frac{R_j}{P_0}$$

mit $0 < P_0 < 1$ und $f(1) = R_1/P_0$, $f(2) = R_1/P_0 + R_2$, so tritt ε mit Sicherheit ein (d. h. $\sum_{j=1}^{\infty} f(j) = 1$) und seine mittlere Wiederkehrzeit beträgt

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} j f(j) = \left[1 - \frac{1}{P_0} \sum_{j=1}^k R_j \right] / \sum_{j=1}^k R_j.$$

Für die Wiederkehrzeiten T_i des Ersteintrittes k disjunkter, sicher eintretender, rekurrenter Ereignisse ε_i und diejenige des Ersteintrittes des Ereignisses $\varepsilon = \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \cup \dots \cup \varepsilon_k$ gilt $T^{-1} = \sum_{i=1}^k T_i^{-1}$. Die Sätze werden angewandt zur Beurteilung acht kom-

binierter, auf Zweier- bzw. Dreier-Iterationen (Runs) aufgebauter, sequenzieller, statistischer Entscheidungsregeln, bei welchen z. B. das n -te Versuchsergebnis y_i für Abweichung der normalen Stammgesamtheit von der in der Nullhypothese $H_0 = H_1$ angenommenen $N(m, \sigma_0^2)$ signifikant ist, wenn mit gegebenen $a_1 > a_2 > 0$ entweder $|y_n| > a_1$ oder $a_2 < |y_{n-1}| < a_1$ und $|y_n| > a_2$; u. a. m. Als Maß der relativen Teststärke dient der reziproke Erwartungswert der für Signifikanz erforderlichen Versuchsanzahl in Abhängigkeit von der Mittelwertsverschiebung: $[H_k: N(m \pm k \cdot \sigma_0^2, \sigma_0^2)]$

ozw. von der Varianzverzerrung: $[H_1: N(m, l^2 \sigma_0^2)]$. Verff. vergleichen ihre kombinierten Run-Teste mit der klassischen \bar{x} -Kontrollkarte bzw. mit den von H. Weiler [J. Amer. statist. Assoc. 48, 816—825 (1953)] ausschließlich auf sukzessiver zweimaliger Überschreitung der gleichen Kontrollgrenze aufgebauten Signifikanztesten.

M. P. Geppert.

• Gupta, Shanti S.: On a decision rule for a problem in ranking means. (Memoograph Series, No. 150.) Chapel Hill: University of North Carolina 1956. IX, 104 p.

Let $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_n$ be $n+1$ normal populations with a common variance and means $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$; the means and the variance being unknown. A random sample of equal size k is drawn from each of these populations. A statistical procedure is wanted for selecting one or more populations with large means. The author wants the procedure to be such that the least upper bound of the probability of not including among the selected populations that one with the largest mean is α . — The proposed rule is as follows: Let $Y^{(n)}$ be distributed as the largest of n independent variables normal $(0, 1)$; Y_0 be normal $(0, 1)$; Z be distributed as chisquare with $\nu = (k-1)(n+1)$ degrees of freedom and let $Y^{(n)}, Y_0$ and Z be independent. The upper α -point of the distribution of $U' = (Y^{(n)} - Y_0) \sqrt{\nu} / \sqrt{Z}$ is denoted by $u_\alpha(n, \nu)$. Denote by s the usual estimate of the common variance of the $n+1$ sample means. The populations for which the means of the corresponding samples differ by not more than $s u_\alpha(\mu, \nu)$ from the largest are selected. It is shown in chapter I that this rule has the desired property. It is furthermore shown that the rule is equivalent to a pairwise application of a three decision rule based on the t -statistic. The rule is also shown to be a likelihood ratio test with respect to a somewhat restricted parameter space. — A method of finding simultaneous lower confidence bounds for $\mu_0 - \mu_1, \mu_0 - \mu_2, \dots, \mu_0 - \mu_n$ is derived. — In chapter V it is assumed that the common variance is known (or alternatively ν large) and it is proved that the rule possesses the following property of monotonicity: If $\mu_i > \mu_j$, then the probability of selecting Π_i is greater than the probability of selecting Π_j . A class C of decision rules proposed by K. C. Seal (this Zbl. 65, 125) is studied. The class is obtained by varying a vector (c_1, c_2, \dots, c_n) in all possible manners such that all $c_i \geq 0$ and $\sum c_i = 1$. A decision rule in the class is defined as follows: Let x_0 be any of the sample means and let $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ be the rankings of the other sample means. The population corresponding to the sample mean x_0 is selected if $\sum c_i x_i - x_0 \leq s t_\alpha(c)$, where $t_\alpha(c)$ is chosen such that the above mentioned property with regard to α is satisfied. The rule proposed by the author ($c_n = 1, c_i = 0; i = 1, \dots, n-1$) is compared with a rule proposed by Seal. It is found that within a restricted parameter space the author's rule is most favourable when judged by the probability of selecting a population with a mean smaller than the largest. For the case when $n+1 = 3$ the author's rule is optimum within the class C ; — In chapter II the distribution function and moments of $U = Y_n - Y_0$ are studied. The cumulative distribution function is found to satisfy a certain system of differential equations. In chapter III methods for evaluation of the distribution and the percentage points of U is discussed and chapter IV deals with the distribution of

$$U' = (Y^{(n)} - Y_0) \sqrt{\nu} / \sqrt{Z}.$$

The cumulative distribution function of U is found to satisfy a certain difference-differential equation, the approximate solution of which has been obtained by Hartley [Biometrika 33, 173—180 (1944)]. In an appendix the probability distribution and upper percentage points of U are tabulated.

E. Sverdrup.

Bennett, B. M.: On a rank-order test for the equality of probability of an event. Skand. Aktuarietidskr. 1956, 11—18 (1956).

Let p_i be the probability of an event E on trial $i; i = 1, \dots, n$. Random variables X_i, Y_i, X, Y are: $X_i = i, Y_i = 1$ if E occurs on trial i and $X_i = Y_i = 0$ if E does

not occur on trial i and $X = \sum X_i$, $Y = \sum Y_i$. The statistic X (given that Y equals the observed number of occurrences of E) was proposed by Haldane and Smith (s. this Zbl. 30; 209, 210) to test the hypothesis $p_i = p_j$ for all i, j . This paper develops the generating function of X and Y under both hypothesis and alternative. The power function for alternatives of the type $\log p_i/(1 - p_i) = \tau + (i - 1)\lambda$ i. e. trend alternatives, is given. Asymptotic normality of X under this alternative is obtained if $n^{-1}E(Y)$ is fixed and $\lambda_n = O(n^{-1})$. D. R. Whitney.

Bennett, Joseph F.: Determination of the number of independent parameters of a score matrix from the examination of rank orders. *Psychometrika* 21, 383—392 (1956).

In der linearen multiplen Faktor-Analyse werden zwei Folgen ausgewählt zwischen denen eine Ranganordnung gesucht wird. $R(s, d)$ bedeute die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten, in den s Gegenstände auf Grund linearer Funktionen von d Faktoren angeordnet werden können. Dann gilt die Rekursionsformel $R(s, d) = R(s - 1, d) + (s - 1) R(s - 1, d - 1)$. Es kann weiter jede Menge S von $d + 2$ Elementen in zwei Untermengen S^* und $S - S^*$ zerlegt werden, so daß keine lineare Funktion von d Variablen alle S^* vor allen $S - S^*$ anordnen kann und umgekehrt. Dies wird auf Thurstones „Box-Problem“ (Multiple factor analysis s. dies. Zbl. 29, 222) angewendet. F. Wever.

Bowker, Albert H.: Continuous sampling plans. *Proc. 3rd Berkeley Sympos. math. Statist. Probability* 5, 75—85 (1956).

Die Arbeit gibt eine Übersicht über kontinuierliche Stichprobenpläne. Diese sind für die Qualitätskontrolle anzuwenden, falls die Herstellung kontinuierlich und die Einteilung der Waren in Partien nicht zweckmäßig ist. Diese Pläne schreiben eine wechselnde Stichprobenhäufigkeit in Abhängigkeit davon vor, ob die bisher untersuchten Stücke brauchbar oder Ausschuß waren. Ein solches Verfahren wurde zuerst von Dodge (dies. Zbl. 60, 301) vorgeschlagen. Diese und die neueren zahlreichen Methoden werden in der Arbeit dargestellt, diskutiert und verglichen. Endlich werden die erwünschten Richtungen der weiteren Forschung angegeben. K. Sarkadi.

Castellano, Vittorio: Applicazione del „Metodo delle serie rettilinee periodiche“ alla determinazione della mediana di una serie ciclica. *Atti XV e XVI Riunione sci., Roma Aprile 1955-Giugno 1956*, 51—75 (1956).

E' noto come una serie ciclica sia una serie qualitativa ordinabile la cui modalità di inizio sia stabilita convenzionalmente (come ad es., nel caso dei giorni della settimana o dei mesi dell'anno). L'A. propone alcuni problemi riguardanti il calcolo di certi parametri della distribuzione e, in questo lavoro, si sofferma sul valore della mediana. Seguendo Gini e Galvani, che proposero di calcolare le medie in base alle loro proprietà formali, l'A. fonda la sua ricerca sulla scomposizione della serie ciclica in tante serie rettilinee quante sono le modalità della serie in esame, e sulla nota proprietà della mediana di rendere minimo lo scostamento semplice medio. L'analisi viene sviluppata per il caso di una distribuzione continua e per quello di una distribuzione discreta; ne risulta la relativa minore complessità del problema nel campo continuo. Considerato che ogni serie ciclica ammette mediane accettabili in coppie, situate agli estremi di uno stesso diametro, si mostra come il mirimmo assoluto dello scostamento semplice medio, calcolato tra le mediane accettabili, coincide col minimo relativo a tutte le mediane considerabili. L'esposizione di una formula ricorrente che permette di semplificare i calcoli, completa la trattazione. T. Salvemini.

Wise, J.: Regression analysis of relationships between autocorrelated time series. *J. roy. statist. Soc., Ser. B* 18, 240—256 (1956).

Im ersten Teil werden die Eigenschaften von linearen Regressionssystemen diskutiert unter Verwendung von „Blockdiagrammen“ und „Pfeilschemata“ (s.

H. Wold, Demand Analysis, dies. Zbl. 50, 368). — Im zweiten Teil wird ein lineares Rekursivsystem untersucht, $y_t = \alpha x_t + \varepsilon_t$, $x_t = \beta y_{t-1} + \eta_t$. Dabei sollen für die Störglieder noch $E \varepsilon_t \varepsilon_{t-k} = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) und $E \varepsilon_t \eta_{t-k} = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) erfüllt sein. Die Schätzfunktion $a = \sum x_t y_t / \sum x_t^2$ für α ist unter diesen Bedingungen asymptotisch erwartungstreu. Unter entsprechenden Bedingungen gilt dies auch für $b = \sum x_t y_{t-1} / \sum y_{t-1}^2$ als Schätzfunktion von β . Für dasselbe System werden schließlich noch Schätzfunktionen vom Gauss-Markoffschen Typus gebildet. Es wird gezeigt, daß sie asymptotisch erwartungstreu und konsistent sind. *F. Wever.*

Theil, H. and J. van Yzeren: On the efficiency of Wald's method of fitting straight lines. *Revue Inst. internat. Statist.* 24, 17—26 (1956).

x, y seien zwei Zufallsvariable, von denen n Beobachtungen (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, vorliegen. x und y seien durch $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$ verbunden, worin u_i die Erwartung $E u_i = 0$ habe. $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ seien der Größe nach geordnet und n_1, n_2 zwei Zahlen mit $n_1 + n_2 \leq n$. Aus den ersten n_1 und den letzten n_2 Beobachtungen werden die Schwerpunktkoordinaten (\bar{x}_1, \bar{y}_1) und (\bar{x}_2, \bar{y}_2) gebildet. Dann ist $b_w = (y_2 - \bar{y}_1) / (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$ eine Schätzfunktion für β . Es werde weiter vorausgesetzt, daß die u_i unabhängig sind und gemeinsame Streuung σ^2 besitzen. Dann ist $\text{var } b = (1/n_1 + 1/n_2) \sigma^2 / (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2$. Für verschiedene Verteilungen der u_i wird die optimale Auswahl der n_1 und n_2 angegeben und die Wirksamkeit der Schätzung berechnet. So ist zum Beispiel bei Gleichverteilung das mittlere Drittel der Beobachtungen auszulassen, bei Normalverteilung die mittleren 46%. Es wird noch die B -Verteilung mit verschiedenen Parametern diskutiert, wobei sich bei schiefer Verteilung eine unsymmetrische Auswahl der n_1 und n_2 ergibt. *F. Wever.*

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Wirtschaftsmathematik:

Kimura, Motoo: Rules for testing stability of a selective polymorphism. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 42, 336—340 (1956).

Considering a single locus with multiple alleles, a necessary and sufficient condition is derived for the maintenance of a non-trivial stable genetic polymorphism by selection in terms of the values of fitness of genotypes. The rule is illustrated by simple examples. Extension to the case of independent multiple loci is explained briefly. *Y. Komatsu.*

Cane, Violet R.: Some statistical problems in experimental psychology. *J. roy. statist. Soc., Ser. B* 18, 177—194. Discussion. *Ibid.* 195—201 (1956).

Durch Zurückführung auf ein grundlegendes stochastisches Modell diskutiert und vergleicht Verf. drei in der experimentellen Psychologie zur Bestimmung der individuellen Empfindlichkeitsschwelle, d. h. der kleinstmöglichen, noch wahrnehmbaren Differenz $|V - S|$ zwischen einem Standardreiz fester Größe S und einem variablen Reiz V , übliche psychophysische Verfahren. Die Konstanten-Methode beruht auf den für alle — gleich oft gebotenen — Reizwerte V beobachteten Häufigkeiten der Urteile $V > S$ bzw. $V < S$, somit auf zwei Dosis-Wirkungskurven. Bei der Grenz-methode verkleinert bzw. vergrößert der Experimentator den Reiz V auf S zu in diskreten Schritten monoton, bis die Versuchsperson den Unterschied nicht mehr wahrnimmt; Verf. behandelt den Fall gleich großer Schritte und denjenigen zufälliger Testwerte V . Die Einstellmethode, bei welcher die Versuchsperson selbst die Wahrnehmungsschwelle einstellt, ist der stochastischen Interpretation schwerer zugänglich. Daran anknüpfend werden experimentelle Daten über Licht-Wahrnehmungsschwellen, insbesondere im Hinblick auf die Gültigkeit des Weber-Fechner-schen oder ähnlicher Gesetze und auf Mehr-Treffer-Modelle, analysiert und interpretiert. Ferner erörtert und kritisiert Verf. die bisher zur Erklärung des Lernvor-

ganges entworfenen deterministischen (Gulliksen, Rashevsky) und stochastischen (u. a. Bush und Mosteller, dies. Zbl. 64, 390) Modelle; die entsprechende Analyse und Interpretation einschlägiger Experimente führt zu Erweiterungen und Ergänzungen der stochastischen Modelle und entsprechenden Versuchspläne. — In der anschließenden Diskussion schlug u. a. M. Stone zur Berücksichtigung der Abhängigkeit jeder Reaktion von den vorausgegangenen die Anwendung von Markoff-Prozessen vor und führte F. J. Anscombe die Analogien der „Konstanten-Methode“ zur Probit-Analyse aus.

M. P. Geppert.

Lah, Ivo: Analytische Ausgleich empirischer Summenfunktionen. Inst. Actuários Portug., Bol. Nr. 12, 17—40 (1956).

Die in der Demographie wichtige Aufgabe, eine von 0 bis 1 monoton zunehmende empirische Summenfunktion $S_0(x)$ mit $S_0(\alpha) = 0$, $S_0(\omega) = 1$ durch eine analytische Summenfunktion $S(x)$ mit $S(\alpha) = 0$, $S(\omega) = 1$, $S' = dS(x)/dx \geq 0$, $S'(\alpha) = S'(\omega) = 0$ auszugleichen, löst Verf. mittels des Ansatzes

$$S_n(x) = \exp \sum_{v=1}^n a_v [\eta(x)]^v,$$

wobei die Funktion $\eta(x)$ beim praktischen Problem aus der demselben gemäßen Form der Intensitätsfunktion

$$d \ln S(x)/dx = a \, d\eta(x)/dx$$

ersichtlich ist (z. B. Sterbensintensität nach Gompertz-Makeham). Die Koeffizienten a_1, \dots, a_n bestimmen sich nach der Methode der kleinsten Quadrate, d. h. durch Minimalisierung von

$$\sum_x P (a_1 \eta + \dots + a_n \eta^n - \ln S_0)^2.$$

Das Verfahren wird angewandt auf die aus Volkszählungsdaten berechenbaren kumulativen Fertilitäten und Nuptialitäten.

M. P. Geppert.

Mihoc, Gh.: Une application de la théorie des réserves mathématiques à l'étude des processus stochastiques. An. Univ. C. I. Parhon Bucureşti, Ser. Şti. Natur. Nr. 12, 13—17, russ. und französ. Zusammenfassung 18 (1956) [Rumänisch].

Unter dem Einflusse der Theorie der stochastischen Prozesse hat die Theorie der Versicherungsmathematik, wie man auch aus den, leider zu wenig bekannten, Werken von Gh. Mihoc im Gebiete des Versicherungswesens ersieht, große Fortschritte gemacht. Diesmal zeigt uns der Verf., welche wertvollen Modelle uns ihrerseits die Versicherungstheorie zum Aufbau der Theorie stochastischer Prozesse bietet. Insbesondere verifiziert, unter gewissen Versicherungsbedingungen, die mathematische Reserve Gleichungen von Kolmogoroff oder Feller, dem Charakter dieser Bedingungen gemäß.

O. Onicescu.

Rocha, Ernâni: Versicherungsmathematische Größen bei offenen mehrfachen Ketten. Inst. Actuários Portug., Bol. Nr. 11, 9—18 (1955) [Portugiesisch].

Betrachtet werden n Mengen C_1, \dots, C_n , so daß im Laufe der Zeit Elemente von C_i nach C_k übergehen können, wenn $i < k$. $F_i(q)$ bedeute die Anzahl der Elemente von C_i zur Zeit q und $F_{ik}(q)$ die Anzahl der Elemente, die, bei festem α , im Zeitintervall $[\alpha, q]$ von C_i nach C_k übergehen. Gesucht sind die Funktionen F_i unter der Annahme, daß sie, obwohl nur ganzzahlige Werte annehmend, Relationen der Form $dF_{ik}(q) = F_i(q) \varphi_{ik}(q) dq$ erfüllen, wobei die Funktionen φ_{ik} ebenso wie die Werte $F_i(\alpha)$ gegeben seien. Man erhält durch Elimination der dF_{ik} ein System linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung für die F_i , das zunächst rekursiv und dann durch eine mehr direkte Rechnung gelöst wird. Das Resultat findet Anwendung auf ein Problem der Invalidenversicherung.

K. Krickeberg.

Rocha, Ernâni: Versicherungsmathematische Größen bei beliebigen mehrfachen Ketten. Inst. Actuários Portug., Bol. Nr. 12, 1—15 (1956) [Portugiesisch].

Das zweite der beiden im vorangegangenen Referat genannten Verfahren wird auf den Fall ausgedehnt, daß auch Übergänge von C_i nach C_k mit $i > k$ erlaubt sind.

K. Krickeberg.

Blyth, Conrad Alexander: The theory of capital and its time measures. Econometrica 24, 467—479 (1956).

Sind in einem im Zeitintervall $(0, \lambda)$ ablaufenden Produktionsprozeß $x(j)$ der Output zur Zeit j , r die momentane Discontrate, also

$$X(r) = \int_0^{\lambda} x(j) e^{-rj} dj$$

der Anfangswert der künftigen Outputs, und die Momente der Output-Verteilung über die Zeit

$$x\mu'_n = \int_0^{\lambda} x(j) j^n dj \Big/ \int_0^{\lambda} x(j) dj,$$

so folgt aus der für die Momenten- bzw. Kumulantenerzeugende

$$M_x(-r) = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v r^v \frac{x\mu'_v}{v!} = \exp \left(\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v r^v \frac{xk_v}{v!} \right)$$

geltenden Gleichung $X(r) = X(0) M_x(-r)$ und der analog für die Input-Verteilung geltenden $I(r) = I(0) M_I(-r)$, wenn r' die durch $X(r') = I(r')$ definierte Rückkehrtrate bedeutet, die Beziehung

$$X(0) = I(0) \exp [(xk_1 - I k_1) r' - (xk_2 - I k_2) r'^2/2! \pm \dots].$$

Aus dieser leitet Verf. die Kumulantendifferenzen

$$\tau_1 = xk_1 - I k_1, \quad \tau_2 = xk_2 - I k_2, \quad \text{etc.}$$

als Zeitmaße her, von denen τ_1 bereits als „Produktionszeit“ geläufig ist. Verf. befaßt sich ferner mit der Maximalisierung von $X(r) - I(r)$, berechnet den Kapitalwert

$$K = \int_0^{\lambda} \int_0^t [i(j) - x(j)] \exp [r'(t - j)] dj dt = [X(0) - I(0)]/r'$$

und dehnt die Überlegungen auf multiple In- und Outputs aus. M. P. Geppert.

Sargan, John D.: A note on Mr. Blyth's article. Econometrica 24, 480—481 (1956).

Verf. analysiert Zusammenhänge zwischen der Kapitaltheorie von A. Blyth (Referat vorstehend) und seinen eigenen Ergebnissen (dies. Zbl. 64, 393) und leitet in Analogie zu Blyth, ausgehend von der Verteilung des diskontierten Output $x'(t) = x(t) \exp(-rt)$ und deren Momentenerzeugender diskontierte Zeitmaße als Kumulantendifferenzen $\tau'_i = xk'_i - I k'_i$ her, die mit denen von Blyth durch die Relation

$$\tau'_i = (\partial^i / \partial s^i) [\ln M_x(s) - \ln M_I(s)]_s = -r'$$

verknüpft sind.

M. P. Geppert.

Uzawa, Hirofumi: On the efficiency of Leontief's dynamic input-output system. Proc. Japan Acad. 32, 157—160 (1956).

Seien A , B die Matrizen der „input“- bzw. „stock“-Koeffizienten. Für nicht-singuläre B und $C = I$, $C = (I - A)^{-1}B$, $C(C - I)^{-1} \geq 0$, beweist Verf., daß das Leontief-System durch „intertemporale Effizienz“ charakterisiert werden kann: Es gibt, für jedes n , Folgen von maximalen „stock“-Vektoren (s^0, s^1, \dots, s^n) , die den Leontief-Gleichungen genügen.

H. Härten.

McManus, M.: On Hatanaka's note on consolidation. Econometrica 24, 482—487 (1956).

Verf. zeigt, daß die von M. Hatanaka (dies. Zbl. 46, 377) gefundene notwendige und hinreichende Bedingung für Akzeptierbarkeit der Konsolidierung eines Leontief-

Systems durch die Matrix T , $\alpha T = T a$, nur für die Bruttoform gilt, mithin bei Übersetzung in die Koeffizienten der Matrizen a und T nur die dort angegebenen, die $a_{i,k}$ und b_i verknüpfenden Relationen, aber nicht das Verschwinden der ursprünglichen Intrarelationen ($a_{i,k} = 0$ für $i, k = i_{j-1}, i_{j-1} + 1, \dots, i_j$) impliziert; die von Hatanaka angegebenen Koeffizientenbedingungen sind demnach infolge Verwechslung von Brutto- und Nettogrößen bei der ökonometrischen Deutung zu eng. Ausschließliche Betrachtung der Nettoformen fordert unter Beibehaltung der anderen Matrizengleichungen $(I - a)x = d$, $\delta = T d$, $(I - \alpha)\xi = \delta$ als vierte Gleichung (anstelle der von Hatanaka zugrundegelegten) $\xi = T(1 - r)x$, woraus Verf. als notwendige und hinreichende Akzeptabilitätsbedingung für die Nettoform $T(a - r) = \alpha T(I - r)$ folgert. M. P. Geppert.

Suzuki, Yukio: Note on optimal machine setting. Ann. Inst. statist. Math. 8, 61—64 (1956).

The following problem is treated. The units produced by a machine vary in quality according to a normal distribution, the mean of which can be fixed by conditioning the machine. It is desired to calculate the value of the mean that minimizes a certain cost function associated with deviations of the quality from a standard value.

J. J. Bezem.

Naor, P.: On machine interference. J. roy. statist. Soc., Ser. B 18, 280—287 (1956.)

If a set of m machines is served by a number of $r < m$ of repairers, it may happen that the number of machines not in working order and requiring service exceeds the number of repairers. Whenever this situation, indicated by the term machine interference, arises, there will be a delay in service resulting in an additional loss of production over and above the normal loss due to the servicing process itself. A study of the efficiency of a given set-up can be based on the probability distribution of the various possible states of the system. Let p_n denote the probability that at a given time $m - n$ machines are in working order while n machines are either being repaired or waiting for service, and let a, b and w be the average number of machines in working order, being repaired and waiting for service respectively. Following earlier work on the subject, the author shows that under certain simplifying, but from a practical point of view very reasonable conditions the probabilities p_n can be expressed in terms of Poisson functions depending on the values of m, r , the average uninterrupted working time of a machine and the average repair time. Once these probabilities are known, all relevant quantities, such as machine efficiency (a/m), loss due to repairs (b/m), loss due to interference (w/m), and service efficiency (b/r) can be calculated easily. All numerical work can be carried out with the help of Molina's tables of the Poisson distribution.

J. J. Bezem.

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

Pylarinos, O.: La codification de la géométrie. Bull. Soc. math. Grèce 30, 100—125, (französ. Zusammenf. 124) (1956) [Griechisch].

L'article est une exposition systématique des principes, qui servent à la théorie de Klein concernant à la codification de la géométrie. De plus il expose sommairement les idées de Cartan et les opinions récentes sur cette même question.

Ger. G. Legatos.

Klingenberg, Wilhelm: Projektive Geometrien mit Homomorphismus. Math. Ann. 132, 180—200 (1956).

Generalizing his concept of projective space with neighbour-elements (cf. this Zbl. 57, 126), the author defines a projective space with homomorphism as a set P_3

of points, certain subsets of which are distinguished as planes and lines, together with an incidence preserving mapping of P_3 onto an ordinary projective space \bar{P}_3 with the following properties: (1) two (three) points in P_3 are incident with exactly one line (plane) if this is true of the images in \bar{P}_3 of these points, (2) every line joining two points in a plane of P_3 belongs entirely to this plane if this is true for the images of the points and the plane in \bar{P}_3 , (3) the dual of (1), (4) the dual of (2). It is shown that every P_3 is isomorphic with the analytic projective geometry over a ring A with 1 containing an ideal I which is a greatest left and a greatest right ideal. \bar{P}_3 is then the coordinate geometry over the quotient field A/I , and the homomorphism of P_3 onto \bar{P}_3 is that induced by the canonical homomorphism of A onto A/I . The author also studies the corresponding case of projective planes with homomorphism.

F. A. Behrend.

Curzio, Mario: Una osservazione sui piani grafici h , l -transitivi. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 238—241 (1956).

L'A. chiama, con R. Baer (questo Zbl. 60, 322) (h , l)-transitivo ogni piano proiettivo dotato di due rette, h , l , tali che esistano in esso tutte le omologie possibili di asse l e centro su h . Dimostra allora, con metodi elementari, che, se esistono in un piano finito (irriducibile) (h , l)-transitivo tutte le omologie di asse l con centro in un punto U non su h , il piano è necessariamente desarguesiano. Detto (L , H)-transitivo un piano dotato di tutte le omologie speciali di asse LH , e di tutte le omologie di centro L e asse passante per H , il teorema sopra riferito può essere „dualizzato“ nel seguente: se in un piano (irriducibile) finito (H , L)-transitivo esistono anche tutte le omologie di centro L e asse u non passante per H , il piano stesso è necessariamente desarguesiano.

L. Lombardo-Radice.

Hall jr., Marshall, J. Dean Swift and Robert J. Walker: Uniqueness of the projective plane of order eight. Math. Tables Aids Comput. 10, 186—194 (1956).

Un plan projectif fini dont toutes les droites portent exactement n points est dit d'ordre n . On sait qu'un tel plan existe toujours si n est premier ou puissance d'un nombre premier et qu'il est unique pour $n = 2, 3, 4, 5, 7$; il n'existe pas si $n = 6$. Dans ce papier on prouve qu'il existe un seul plan projectif du 8^{ième} ordre. La preuve de cette unicité est fondée sur le dénombrement des carrés latins du 7^{ième} ordre par H. Norton (ce Zbl. 22, 111) exhaustivement complété par le rapporteur (ce Zbl. 35, 289; 42, 248). Sur les 147 espèces ainsi énumérées il suffit d'en soumettre 100 (celles qui ont au moins une translation à droite cyclique) à la machine électronique SWAC de l'université de Los Angeles, Californie, le reste des computations pouvant ensuite être effectué assez facilement à la main. Chacun de ces carrés contient au plus 12 intercalates (rectangle ayant pour sommets quatre éléments du carré et dont deux sommets opposés portent des chiffres égaux). Le paragraphe 4 expose la mise en code de ce tri au moyen de SWAC; un schema est donné, page 191. Seul le carré cyclique 7.7 sort de ce criblage et fournit l'unique plan projectif du 8^{ième} ordre. Une conséquence de ce résultat est qu'il n'existe aucun plan non-argusien d'ordre inférieur à 9.

A. Sade.

Al-Dhahir, M. W.: A class of configurations and the commutativity of multiplication. Math. Gaz. 40, 241—245 (1956).

The author gives a neat exposition of the equivalence, in projective space, of (1) the Möbius theorem (if $A_1 A_2 A_3 A_4$, $B_1 B_2 B_3 B_4$ are two tetrahedra such that $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3$ are incident with the planes $B_2 B_3 B_4$, $B_3 B_4 B_1$, $B_4 B_1 B_2$, $B_1 B_2 B_3$, $A_2 A_3 A_4$, $A_3 A_4 A_1$, $A_4 A_1 A_2$ then B_4 is incident with $A_1 A_2 A_3$), (2) the Pappus theorem, (3) the commutativity of multiplication, (4) Baker's eight-lines theorem (if fifteen of the sixteen pairs of lines that can be formed from two quadruples of mutually skew lines are non-skew, so is the sixteenth pair), and (5) the two-quadrangles theorem.

F. A. Behrend.

Artzy, Rafael: Self-dual configurations and their Levi graphs. *Proc. Amer. math. Soc.* **7**, 299—303 (1956).

Eine (nicht notwendig reguläre) Punkt-Geraden-Konfiguration kann man graphisch so darstellen, daß man jedem Konfigurationspunkt einen roten, jeder Konfigurationsgeraden einen blauen Punkt zuordnet und inzidente Elemente durch Striche verbindet. Diese von Coxeter als Levigraph bezeichnete Figur wird im Falle selbstdualer Konfigurationen vom Verf. zu einem RLG (reduced Levi graph) dadurch verkürzt, daß er Paare sich dual entsprechender Punkte und Geraden durch denselben Punkt darstellt. Wenn die Konfiguration mehrere Dualitäten zuläßt, kann es für sie mehrere nicht isomorphe RLG geben. Durch Hinzufügen und Weglassen von Strichen kann man aus einem RLG Darstellungen anderer selbstdualer Konfigurationen gewinnen. Es werden mehrere Beispiele solcher RLG gegeben, besonders auch Darstellungen endlicher ebener Geometrien. Ist ein RLG Teilmenge eines zu einer endlichen ebenen Geometrie gehörigen RLG, so läßt sich die zugehörige Konfiguration in diese Geometrie einbetten. Die Bezeichnung Levigraph ist historisch nicht gerechtfertigt. Sie wird aus einer Stelle in des Ref. Schrift „Finite geometrical systems“ (dies. Zbl. **60**, 323) hergeleitet, wo aber König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen (dies. Zbl. **13**, 228) ausdrücklich zitiert ist. *F. W. Levi.*

● **Kulezycki, Stefan:** Nichteuklidische Geometrie. (Biblioteka Problemów.) Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1956. 188 S. zł 10.30. [Polnisch].

The intention of this work was to give a short course of non-Euclidean geometry easy to understand to everybody being acquainted with the notions and methods of elementary geometry. As a result we got a very interesting book not only popular but also possibly exact. The only themes treated less formally are those connected with the notions of limit and continuity as well as the notion of model. The latter results from the fact that the author refrained from giving explicitly any axiom system of geometry. The book contains a wide historical introduction. The very exposition is based on Hjelmslev's ideas and is concluded by a derivation of the analytical formula for the value of Lobachevskian function (done by the classical method of Lobachevski) and by the beginnings of hyperbolic trigonometry. The book contains also some remarks concerning spherical trigonometry, Beltrami coordinates, and Klein model. *W. Szmielew.*

Coxeter, H. S. M.: Regular honeycombs in hyperbolic space. *Proc. internat. Congr. Math.* 1954 Amsterdam **3**, 155—169 (1956).

Verf. hielt beim Internat. Math. Kongreß in Amsterdam einen halbstündigen Vortrag und sprach dabei über reguläre Wabenzellen in Räumen mit negativer Krümmung. Er betrachtete 1) den Fall, daß der Fundamentalbereich der symmetrischen Gruppe endlichen Inhalt hat und 2) die sogenannten Sternwabenzellen. Er konnte sich weitgehend auf seine Arbeiten und insbes. auf sein Buch (Regular polytopes, dies. Zbl. **31**, 65) stützen. Im hyperbolischen Raum R_n gibt es 15, bzw. 7, 5, 0, vgl. reguläre Wabenzellen für $n = 3$, bzw. 4, 5, ≥ 6 und 0, bzw. 4, 0 reguläre Sternwabenzellen für $n = 3$, bzw. 4, ≥ 5 . *N. Hofreiter.*

Elementargeometrie:

● **Naumovič, N. V.:** Geometrische Örter im Raume und Konstruktionsaufgaben. Moskau: Staatsverlag für Lehrbücher und Pädagogik 1956. 158 S. R. 2.85 [Russisch].

Der Zweck des vorliegenden Büchleins ist es vor allem, die Benutzer zu einer gründlichen Raumanschauung zu erziehen. Der Stoff ist durchaus elementar, und das Buch ist hauptsächlich zur Benutzung an Schulen, pädagogischen Anstalten usw. gedacht. Zu Beginn werden zunächst die grundsätzlichen Schwierigkeiten der Veranschaulichung von Gegenständen des dreidimensionalen Raumes erörtert, im Gegen-

satz zum zweidimensionalen, wo alles in einer Zeichenebene liegt. Dann werden die Geraden, Ebenen, Zylinder und Kugeln, vor allem in ihrem verschiedenen Auftreten als geometrische Örter behandelt, wobei bei der Kugel alle mit dem Potenzbegriff zusammenhängenden Dinge zur Sprache kommen. Allgemeinere Quadriken werden nur nebenbei auf wenigen Seiten kurz erwähnt. Den zweiten, größeren Teil des Bändchens nehmen dann, in 3 Abschnitte unterteilt, 252 Aufgaben und ihre Lösungen ein. Darunter finden sich aber auch viele sehr elementare Aufgaben, bei denen immer wieder nur Geraden, Ebenen, Kreise und Kugeln als Örter gesucht werden. 139 etwas roh wiedergegebene, aber doch sehr anschauliche Zeichnungen unterstützen den Text wirkungsvoll.

W. Burau.

Bilo, J.: Sur l'affinité orthologique. Mathesis 65, 509—516 (1956).

(a, b, c, d) , (H_a, H_b, H_c, H_d) , (a', b', c', d') , (H'_a, H'_b, H'_c, H'_d) seien die Fern-elemente der Flächen und der Höhen zweier Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$. Sind die Geraden $AH'_a, BH'_b, CH'_c, DH'_d$ linear abhängig, d. h. ist der Rang der Matrix ihrer Plücker'schen Koordinaten kleiner als 4, so sind das Vierseit $abcd$ und das Viereck $H_a H_b H_c H_d$ polarreziprok in einer Polarität Ω_∞ und umgekehrt. Das Vierseit $a' b' c' d'$ und das Viereck $H_a H_b H_c H_d$ sind dann auch polarreziprok in einer Polarität Ω'_∞ , und die Geraden $A'H_a, B'H_b, C'H_c, D'H_d$ sind auch linear abhängig. — Unter dieser Annahme sind drei Fälle zu unterscheiden. 1. Kein Paar Gegenecken des Vierseits $a b c d$ ist ein Paar konjugierter Punkte bezüglich des Leitkegelschnitts ω der Polarität Ω_∞ . Die Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ heißen in diesem Fall schief ortholog. — 2. Ein einziges Paar Gegenecken von $abcd$ ist konjugiert bezüglich ω . Die Tetraeder heißen semiortholog. — 3. Mindestens zwei und folglich alle drei Paare Gegenecken von $abcd$ sind konjugierte Punkte bezüglich ω . Die Tetraeder heißen ortholog schlechthin. — Damit eine Affinität Φ zwei homologe schief-orthologe, semiorthologe oder schlechthin orthologe Tetraeder habe, ist notwendig und hinreichend, daß drei vereinigte Richtungen von Φ paarweise orthogonal seien. In diesem Fall ist jedes Tetraeder dem homologen schief-ortholog, semiortholog oder schlechthin ortholog. — Verf. nennt jede Affinität, von der drei vereinigte Richtungen paarweise orthogonal sind (von denen zwei konjugiert imaginär sein können), eine orthologe Affinität. Mit den Eigenschaften solcher Affinitäten beschäftigt sich Verf. in den folgenden Abschnitten seiner Arbeit.

M. Zacharias.

Egloff, Werner: Eine Bemerkung zu Cauchy's Satz über die Starrheit konvexer Vielfläche. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 20, 253—256 (1956).

Elementargeometrischer Beweis des Satzes: Stimmen zwei konvexe n -Ecke in $n - 1$ Seiten überein, und sind die Innenwinkel, die diese $n - 1$ Seiten im ersten n -Eck miteinander bilden, höchstens gleich den entsprechenden Winkeln im zweiten, so ist die Schlußseite im zweiten n -Eck größer als im ersten.

G. Bol.

● **Justinijanović, Juraj: Sphärische Trigonometrie.** Zagreb: Tehnička knjiga 1956. 191 S. Din. 480.—.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

● **Rooy, D. J. van: Analytische Geometrie I.** 2. Aufl. Pro Rege, Potchefstroom, 1956. VIII, 238 S. (Holländisch).

● **Miller, M.: Analytische Geometrie des Raumes.** (Sammlung Crantz.) Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1956. 91 S. DM 3.40.

Die Schrift schließt sich eng an die „Analytische Geometrie der Ebene“ von Crantz-Hauptmann an. Auf den Gebrauch von Vektoren und Determinanten wurde verzichtet. Von den Flächen zweiter Ordnung werden nur die Gleichungen der Fläche, der Tangentialebene und der Kreisschnitte und der auf den Flächen liegenden Geraden hergeleitet. Den einzelnen Kapiteln sind Aufgaben mit ausführlichen

Lösungen beigegeben. Der Inhalt zerfällt in folgende Kapitel: I. Punkte, Strecken, Richtungen, Flächeninhalte. II. Flächen und Raumkurven. III. Die Ebene. IV. Die Gerade. V. Die Kugel. VI. Ellipsoid, Hyperboloide, Paraboloid. VII. Kegel und Zylinder zweiter Ordnung. VIII. Kreisschnitte der Flächen zweiter Ordnung. IX. Geraden auf den Flächen zweiter Ordnung.

M. Zacharias.

Massera, J. L.: Über die Grundbegriffe der projektiven Geometrie. Fac. Ing. Agrimensura Montevideo, Publ. didact. Inst. Mat. Estadist. 1, 1—56 (1956) [Spanisch].

L'A. espone, nel presente lavoro, una introduzione euristica a un testo, o corso, di Geometria Proiettiva per i giovani che entrano all'Università. L'A. ritiene che il punto di vista astratto (sistema ipotetico-deduttivo) debba essere quello di arrivo, non quello di partenza, per ragioni didattiche, e storiche. Introduce pertanto la nozione di „gruppo fondamentale“ a partire dal gruppo delle similitudini dello spazio euclideo; introduce successivamente le prospettività, e le proiettività, mostrando a partire da esse l'opportunità della introduzione degli elementi impropri, ecc. In una Appendice storica, l'A. fa vedere come gli elementi impropri furono, per la prima volta, introdotti da G. Desargues (1593—1661), a partire appunto dal fatto che la prospettiva di un fascio („ordonnance“) di rette parallele può essere un fascio di rette convergenti in un punto, ecc. Solo nel Capitolo IV, ed ultimo, l'A. espone la „costruzione assiomatica della geometria proiettiva“.

L. Lombardo-Radice.

Segre, Beniamino: Intorno alla geometria sopra un campo di caratteristica due. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A 21, 97—123 (1956).

Die projektive Geometrie über einem Grundkörper, dessen Charakteristik $\neq 0$ ist, wurde vom Verf. bereits früher in einer ausführlichen Monographie behandelt (Lezioni di geometria moderna, dies. Zbl. 30, 410). Soweit es sich um lineare Gebilde und Operationen handelt, sind die Ergebnisse gegenüber den gewohnten nicht allzu verschieden; dagegen treten ganz neue und ungewohnte Eigenschaften auf, wenn man Gebilde höheren Grades untersucht, und das auch dann noch, falls man den Grundkörper kommutativ und algebraisch abgeschlossen voraussetzt. In der vorliegenden Arbeit werden vor allem die Charakteristik 2 ins Auge gefaßt und folgende Gebilde eingehend untersucht: harmonische Punktgruppen und Involutionen auf einer Geraden, Kegelschnitte, Quadriken, Kurven 3. und 4. Ordnung in der Ebene oder im Raum; schließlich werden endliche Grundkörper („endliche Räume“) und die sich dabei ergebenden besonderen Probleme arithmetischer Natur besprochen, z. B.: Die Anzahl der irreduziblen Kegelschnitte einer endlichen Ebene der Charakteristik p und Ordnung q ist $q^5 - q^2$. Von den reichhaltigen Ergebnissen dieser Arbeit können hier nur einige wenige als Beispiele angedeutet werden: Es gibt algebraische (1,1)-Korrespondenzen zwischen zwei Geraden, die keine Projektivitäten sind, und ebensolche zwischen Ebenen, die nicht birational sind. Alle Tangenten eines irreduziblen Kegelschnittes gehen durch einen Punkt (der nicht auf dem Kegelschnitt liegt). Eine Kubik mit Spitze besitzt einen einzigen Wendepunkt, durch den alle Tangenten gehen.

W. Gröbner.

Gauthier, Luc: Commutation des matrices et congruences d'ordre un. Bull. Soc. math. France 84, 283—294 (1956).

Let k be an algebraic closed field with characteristic p . Each $n \times n$ matrix of k can be considered as a point of the n^2 -dimensional space. The author studies the geometrical meaning of the commutativity of matrices. Since the commutativity is unaltered by a scalar multiple, we need only to consider the projective space S_{n^2-1} . Further, the matrices $M + \lambda I$ have the same commutativity as M , therefore we can use the following representation. Taking a hyperplane S_{n^2-2} not passing through I (identity), the intersection of the line joining M and I with S_{n^2-2} is the representation of M . In case $p \nmid n$, we may take the hyperplane S_{n^2-1} to be $\text{tr}(M) = 0$. For any fixed A , the matrices X satisfying $AX = XA$ form a cone

with vertex A . Since $AX = XA$ and $AY = YA$ imply $A(\lambda X + \mu Y) = (\lambda X + \mu Y)A$, the cone is linear. The author proved that, as X describes the cone with vertex A , the cones with vertices X envelop the linear space of polynomials of A with coefficients in k . In S_{n-2} , the cone with generic vertex A is the space of linear polynomials in A , mod I . The configuration is a congruence of order 1 of the linear spaces S_{n-2} in S_{n-2} . The author establishes also some relations with the work of Segre [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur. III. Ser. 19, 127—148 (1884)].

L. K. Hua.

Semjanistyj, V. I.: Parabolische Geradenkongruenzen. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 10, 259—268 (1956) [Russisch].

Die Gesamtheit der Treffgeraden zweier windschiefer Ebenen der Dimension n des projektiven $(2n+1)$ -dimensionalen Raumes P_{2n+1} heißt Geradenkongruenz; diese wird hyperbolisch bzw. elliptisch genannt, je nachdem die beiden Ebenen reell oder konjugiert komplex sind; eine parabolische Kongruenz entsteht beim Zusammenfallen der beiden Ebenen als Grenzfall. Die Projektivitäten des P_{2n+1} , die die Geraden einer Kongruenz einzeln festlassen, nennt man Schiebungen. — Durch einen allgemeinen Punkt des Raumes gibt es genau eine Kongruenzgerade. Die Kongruenzgeraden einer parabolischen Kongruenz sind die gemeinsamen Tangenten an die Quadriken

$$x_{2i}x_{2j+1} - x_{2j}x_{2i+1} = 0 \quad (i, j = 0, 1, \dots, n; i < j).$$

Ist n gerade, so liegt in der hierdurch bestimmten linearen Quadrikschar keine nicht-ausgeartete Quadrik; bei n ungerade gibt es dagegen solche Quadriken und die Geradenkongruenz ist dann bestimmt als die Gesamtheit der Tangenten an eine dieser Quadriken, die eine feste Ebene der Dimension n auf der Quadrik treffen. — Zeichnet man eine solche Quadrik aus, so wird hierdurch im P_{2n+1} eine nicht-euklidische Geometrie definiert und zwei Kongruenzgeraden besitzen eine metrische Invariante. Bewegungen in dieser Geometrie, die die Geraden der parabolischen Kongruenz festlassen, werden parabolische parataktische Schiebungen genannt. Die Kongruenzgeraden lassen sich eindeutig den Punkten $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ eines projektiven Raumes $P_n(\varepsilon)$ über den dualen Zahlen $(\xi_i = a_i + \varepsilon b_i, \varepsilon^2 = 0)$ zuordnen. Die Gruppe der Projektivitäten des $P_n(\varepsilon)$ ist isomorph zu der Faktorgruppe der Untergruppe bestehend aus den Projektivitäten des P_{2n+1} , welche die parabolische Kongruenz in sich überführen, nach der Untergruppe der Schiebungen längs der Geraden dieser Kongruenz.

M. Barner.

Burau, Werner: Über lineare Komplexe von Räumen höchster Dimension einer nicht entarteten Quadrik. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 42, 381—393 (1956).

In der S_k -Geometrie ist es wichtig, die Gesamtheit der Räume einer nicht ausgearteten Quadrik zu untersuchen. Es ist bekannt, daß alle S_{k-1} einer Quadrik Q_{2k-1} oder alle S_k^I (und S_k^{II}) einer Quadrik Q_{2k} auf die Punkte einer Mannigfaltigkeit M der Dimension $\binom{k+1}{2}$ eines Raumes von $2^k - 1$ Dimensionen, eindeutig abbildet werden können; die M liefert ein Minimalmodell im Sinne von F. Severi für die entsprechende Räummengruppe. — Im Kap. 1 werden hier zunächst einige allgemeine Eigenschaften der M und der Q_{2k} behandelt; insbesondere betrachtet Verf. sogenannte „inzidenzabgeschlossene“ Mengen von S_k^I der Q_{2k} (mit k ungerade), d. h. Mengen von S_k^I , die sich paarweise schneiden, so daß kein S_k^I auf Q_{2k} außerhalb der Menge existiert, das gleichfalls alle S_k^I der Menge schneidet. Beispiele solcher Mengen. — Den Punkten eines hyperebenen Schnittes der Mannigfaltigkeit M entsprechen auf der Quadrik Q Raumsysteme, welche als „lineare Komplexe“ bezeichnet werden. Im Kap. 2 findet man einige allgemeine Eigenschaften der so definierten linearen Komplexe; insbesondere der Begriff eines singulären Raumes des Komplexes, d. h. eines Raumes P_h mit der Eigenschaft, daß jedes durch P_h hin-

durchgehende S_k von Q dem Komplex angehört. — Im Kap. 3 werden die linearen S_k^1 -Komplexe von $k = 1$ bis $k = 5$ klassifiziert. Für $k = 1$ ist M eine Gerade, und der Komplex besteht aus einer einzigen Gerade der Q_2 . Für $k = 2$ ist M ein Raum S_3 und der Komplex besteht aus allen S_2^1 der Q_4 , die eine gegebene Ebene S_2^{11} der Q_4 (in Geraden) treffen. Für $k = 3$ ist M eine Quadrik Q_6 ; es gibt zwei verschiedene Arten von S_3^1 -Komplexen. Dasselbe gilt für $k = 4$; M ist jetzt eine M_{10} des S_{15} . Für $k = 5$ ist M eine M_{15} des S_{31} , und es gibt 4 verschiedene Arten linearer S_k^1 -Komplexe. In dieser Klassifikation werden immer zwei S_k^1 -Komplexe als zu derselben Klasse gehörig betrachtet, wenn die zwei entsprechenden hyperebenen Schnitte von M mittels einer Autokollineation der M selbst ineinander überführt werden können.

E. Togliatti.

Burau, Werner: Algebraisch-geometrische Bemerkungen zur Darstellungstheorie der klassischen Gruppen. J. Ber. Deutsch. Math.-Verein. 59, 1—6 (1956).

Burau, Werner: Grundmannigfaltigkeiten und irreduzible Darstellungen der orthogonalen und symplektischen Gruppen. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A 21, 7—24 (1956).

Über diese zwei Arbeiten kann man gleichzeitig referieren. Die erste ist ein Vortrag, in dem die Untersuchungen der zweiten kurz und ohne Beweise zusammengefaßt werden. Es handelt sich darum, jede irreduzible Darstellung einer klassischen Gruppe durch $(n + 1)$ -reihige Matrizen im Körper der komplexen Zahlen mit einer Transformationsgruppe des projektiven Raumes P_n in Verbindung zu bringen und diese letzte Gruppe geometrisch zu charakterisieren. Als klassische Gruppen versteht man hier: 1. die allgemeine projektive Gruppe G_n des P_n ; 2. die Gruppe D_n der Autokollineationen einer nicht entarteten Quadrik Q_{n-1} des P_n , wobei es bei $n = 2k + 1$ genügt, sich auf diejenigen Kollineationen zu beschränken, die jede S_k -Schar von Q_{2k} in sich verwandeln; 3. die Gruppe S_{2k+1} aller Kollineationen des P_{2k+1} , die eine gegebene nicht entartete Nullkorrelation in sich verwandeln. Für jede Darstellung findet man im P_n eine mit der betrachteten Gruppe ausgezeichnet verbundene rationale Menge M von „Elementen“, die sich bezüglich der Gruppe ausnahmslos transitiv verhält. — Um die verschiedenen möglichen „Grundmannigfaltigkeiten“ M der Gruppe G_n zu bekommen, verfährt man folgendermaßen: man nimmt eine beliebige Anzahl s von Unterräumen $S_{n_1}^{(1)}, \dots, S_{n_s}^{(s)}$ des P_n , so daß $n > n_1 > \dots > n_s \geq 0$ und $S_{n_1}^{(1)} \supset S_{n_2}^{(2)} \supset \dots \supset S_{n_s}^{(s)}$, und zählt sie bzw. a_1, \dots, a_s -mal; die Gesamtheit aller so gebildeten „Elemente“ wird mit $J_{n, n_1 \dots n_s}^{a_1 \dots a_s}$ bezeichnet; man kann dann die Elemente J auf Punkte des Segreschen Produktes von Grassmannschen Mannigfaltigkeiten (je a_1, \dots, a_s -mal gezählt) $G_{n, n_1}, \dots, G_{n, n_s}$ eineindeutig abbilden; Verf. gibt die Dimension des von der so gewonnenen Punktmenge aufgespannten Raumes an; in diesem Raume liefert die Gruppe der Autokollineationen jener Punktmenge diejenige Darstellung von G_n , welche (der bekannten Theorie der Darstellung von Gruppen gemäß) der Partition $f = b_n + 2b_{n-1} + \dots + nb_1$ einer beliebigen ganzen Zahl f entspricht, wobei $b_{n-n_i} = a_i$ ($i = 1, \dots, s$) und $b_j = 0$ falls $j \neq n - n_1, \dots, n - n_s$. — Für die zwei anderen Gruppen D_n und S_{2k+1} erhält man die Grundmannigfaltigkeiten $Q_{n, n_1 \dots n_s}^{a_1 \dots a_s}$ und $S_{2k+1, n_1 \dots n_s}^{a_1 \dots a_s}$, indem man die Voraussetzung einführt, daß jeder Raum $S_{n_i}^{(i)}$ der betrachteten Polarität oder Nullkorrelation vollständig angehört, d. h. in seinem polaren Raum enthalten ist oder ihn enthält. Für die Gruppe S_{2k+1} findet man so ohne weiteres alle möglichen Grundmannigfaltigkeiten. Für die Gruppe D_n gibt es dagegen als weitere Grundmannigfaltigkeit das bekannte Minimalmodell M der Dimension $\binom{k+1}{2}$ in einem Raume der Dimension $2k - 1$ aller S_k^1 einer Quadrik Q_{2k} , und auch

alle $Q_n, n_1 \dots n_s$ für die $n_1 = \left[\frac{n-1}{2} \right]$ ist; usw. In den beiden Fällen der Gruppen D_n und S_{2k+1} wird, wie für G_n , die Verbindung mit den Ergebnissen und Bezeichnungen der Darstellungstheorie auseinandergesetzt. Schließlich beweist Verf. noch eine Ordnungsformel für die Grundmannigfaltigkeit $S_{2k+1, \frac{1}{h}}$ der Gruppe S_{2k+1} .

E. Togliatti.

Rozenfel'd, B. A. und A. M. Levinov: Anwendung der Nichteuklidischen Geometrie auf einige Aufgaben der projektiven Geometrie. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 10, 249—258 (1956) [Russisch].

Auf der Quadrik Q_{n-1} mit der Gleichung

$$-x_0^2 \dots -x_m^2 + x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2 = 0 \quad [m \leq \frac{1}{2}(n-1)]$$

des reellen P_n liegen bekanntlich reelle S_m als Räume höchster Dimension. Verf. benutzt nun die in diesem P_n durch $\sum x_i^2 = 0$ definierte elliptische Metrik zum Beweis verschiedener Tatsachen über diese S_m , die man auch rein projektiv herleiten kann. Der Grundgedanke ist folgender: Auf dem durch $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$ definierten Raum P_m sei das feste autopolare Simplex $A^0 \dots A^m$ vorgegeben, der Raum S_m der Q_{n-1} projiziert A^0, \dots, A^m in die Punkte A^{m+1}, \dots, A^{2m+1} des durch $x_0 = \dots = x_m = 0$ definierten Raumes P_{n-m-1} . Die A^{m+1}, \dots, A^{2m+1} bilden wieder ein autopolares Simplex und umgekehrt gibt es nach Vorgabe von A^{m+1}, \dots, A^{2m+1} unter Beziehung der Punkte A^i auf A^{m+i+1} gerade 2^{m+1} reelle S_m der Q_{n-1} , die A^i auf A^{m+i+1} ($i = 0, \dots, m$) projizieren. Dieser Zusammenhang gestattet es, verschiedene Tatsachen über die S_m der Q_{n-1} in solche über autopolare Simplexe auf P_{n-m-1} zu übertragen und so neu zu beweisen. Dies wird z. B. durchgeführt für die Herleitung der Parameterzahl der S_m und ihre gegenseitigen Inzidenzverhältnisse.

W. Burau.

Woude, W. van der: On the group of rotations in R_6 . Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 367—370 (1956).

Man betrachtet die Rotationsgruppe $y'_i = \sum_{k=1}^6 \gamma_{ik} y_k$ im Raume S_6 ; hier ist (γ_{ik}) eine orthogonale Matrix mit reellen γ_{ik} und $|\gamma_{ik}| = +1$. Diese Gruppe kann auch als Gruppe der Autokollineationen der Quadrik $\Omega^* = \sum y_i^2 = 0$ des Raumes S_5 betrachtet werden (mit geeignet normierten Koeffizienten γ_{ik}), d. h. als die Gruppe der Bewegungen in einem nichteuklidischen elliptischen S_5 . Setzt man dann $y_1 + i y_4 = p_1, y_1 - i y_4 = \bar{p}_1, y_2 + i y_5 = p_2, y_2 - i y_5 = \bar{p}_2, y_3 + i y_6 = p_3, y_3 - i y_6 = \bar{p}_3$, so wird $\Omega^* = p_1 \bar{p}_1 + p_2 \bar{p}_2 + p_3 \bar{p}_3 = 0$; deutet man die p_i, \bar{p}_i als Koordinaten einer Ebene in einem vierdimensionalen Vektorraum S_4 , so erhält man hier lineare Ebenentransformationen, und schließlich auch eine Kollineationsgruppe $x'_i = \sum \alpha_{ik} x_k$, wo $|\alpha_{ik}| = +1$ und jeder Koeffizient α_{ik} gleich dem konjugiert-imaginären seines Komplements in $|\alpha_{ik}|$ ist. Nach allen diesen Erklärungen, beweist Verf. durch explizite Rechnung, daß einer Rotation des Vektorraumes S_4 eine Rotation im S_6 entspricht, welche aus zwei Rotationen in parallelen Ebenen zusammengesetzt ist.

E. Togliatti.

Venticos, Greg.: The minimum angles of two linear subspaces. Bull. Soc. math. Grèce 30, 85—93, engl. Zusammenf. 93 (1956) [Griechisch].

The author discusses certain angles of two linear subspaces of an n -dimensional complex linear space; so he defines as minimum angle of such two subspaces the angle formed by such directions of the subspaces, that each of them be the perpendicular projection of the other on its subspace. The author proves further that the product of the cosinus of the minimum angles of two linear subspaces of an n -dimensional complex linear space is equal to the cosinus of the angle of the subspaces.

A. Mallios.

Lorent, H.: Sur les tangentes et les normales à deux coniques conjuguées. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 25, 595—604 (1956).

Nel piano, riferito ad una coppia di assi cartesiani ortogonali, siano date due coniche, C' e C'' . Indichiamo con M ed N due punti, l'uno della C' e l'altro della C'' , tali che la retta MN risulti parallela ad uno degli assi coordinati. Le tangenti e le normali alle due curve, in M ed in N , determinano un quadrilatero completo: i vertici di questo, diversi da M ed N , descrivono — al variare della MN — quattro curve, sulle quali l'A. richiama l'attenzione in alcuni casi particolari. Però i risultati a cui perviene non sono attendibili, perchè contengono alcune sviste nel procedimento analitico.

L. Campedelli.

Saichin, A.: Sur les asymptotes d'une courbe plane. An. Univ. C. I. Parhon Bucureşti, Ser. Şti. Natur. Nr. 11, 25—27, russ. und französ. Zusammenfassungen 27 (1956) [Rumänisch].

L'A. considère les deux définitions classiques des asymptotes d'une courbe plane à l'aide de la distance et à l'aide de la tangente, en montrant qu'elles sont équivalentes seulement dans le cas des courbes algébriques.

Gh. Th. Gheorghiu.

Lorent, H.: Courbes associées à deux courbes données dépendant chacune d'un seul paramètre. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 25, 554—569 (1956).

Si considerino due famiglie di curve piane algebriche, (C) e (K) , dipendenti ciascuna da un parametro. Se leghiamo fra loro questi parametri, a e b , con una relazione (algebraica), $f(a, b) = 0$, nasce fra le curve dei due sistemi un riferimento: l'A., in questo suo lavoro che è apparso postumo, studia la curva luogo dei punti comuni alle curve C e K fra loro omologhe. Egli suppone che la $f(a, b) = 0$ abbia una delle seguenti forme: $a + b = l$, $ab = l^2$, $a^2 + b^2 = l^2$, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{l^2}$, indicando con l

una costante; e si limita a considerare particolari famiglie di curve (fasci di parabole con lo stesso vertice e gli assi ortogonali; fasci di cerchi e di parabole; di cissoidi di Diole e di parabole; una famiglia di indice due di strofoidi e un fascio di cerchi concentrici; ecc.). Si perviene così ad alcune interessanti curve, delle quali vengono esaminate le singolarità e l'andamento dei rami reali, anche in raffronto con altre curve di tipo noto. La trattazione è esclusivamente condotta per via analitica, ed ha carattere elementare.

L. Campedelli.

Laurenti, Fernando: Sopra una superficie di sesto ordine che si presenta in Meccanica. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 7 (1953—54), 147—166 (1956).

Sia R un corpo rigido pesante, girevole attorno ad un punto fisso O , \mathfrak{f} il versore della verticale ascendente, G il baricentro, \mathfrak{Q} il momento della quantità di moto. L'A. studia, in questo lavoro a carattere quasi esclusivamente geometrico, la superficie Σ descritta nel solido dall'estremo di \mathfrak{Q} subordinatamente alla condizione (a) $\mathfrak{f} \times (G - O) \wedge \mathfrak{Q} = 0$. La ricerca non sembra abbia interesse meccanico, perchè basta l'aggiunta della (a) alla seconda equazione cardinale per assicurare che il modulo di \mathfrak{Q} è costante.

T. Manacorda.

Algebraische Geometrie:

Segre, Beniamino: Geometry upon an algebraic variety. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 497—513 (1956).

Les recherches de Géométrie algébrique se poursuivent suivant deux directions: l'une, dite abstraite, considère les équations algébriques définies dans un champ commutatif et les méthodes sont purement algébriques, comprenant la théorie des idéaux et celle des valuations. L'autre, géométrique, considère les équations algébriques dans un domaine complexe et fait appel aux méthodes géométriques, topologiques et à la théorie des fonctions analytiques. L'A., après avoir comparé les deux tendances, passe en revue les acquisitions récentes: équivalence au sens étendu

(Severi), systèmes invariants, dilatations, introductions diverses du genre arithmétique. Vue d'ensemble très intéressante. Index bibliographique. *L. Godeaux.*

Severi, Francesco: Problèmes résolus et problèmes nouveaux dans la théorie des systèmes d'équivalence. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 529—541 (1956).

Es war naheliegend, die Theorie der äquivalenten Punktgruppen auf algebraischen Kurven, die sich als tragfähige Grundlage für den Aufbau der Geometrie auf eindimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeiten bewährt hatte, auf solche höherer Dimension zu verallgemeinern. Das geht zunächst ziemlich einfach noch für die $(r-1)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten einer r -dimensionalen V_r , weil diese wieder lineare Scharen bilden und demnach in lineare Äquivalenzsysteme eingeordnet werden können. Das gilt aber nicht mehr für die Untermannigfaltigkeiten einer Dimension $h < r-1$, wie schon das Beispiel des Systems der linearen Unterräume S_h eines S_r zeigt, welches eine nicht lineare Graßmannsche Mannigfaltigkeit $G_{r,h}$ bildet. Daher hat Verf. im Jahre 1932 zum ersten Mal den allgemeineren Begriff der rationalen Äquivalenz eingeführt, der übrigens nicht leicht zu definieren ist (vgl. den nachstehend besprochenen Vortrag von van der Waerden). Die Anwendung dieses Begriffes auf algebraische Flächen führt zu den wichtigen Systemen von Punktgruppen $|S|$ und $|\Omega|$, aus denen die absolut invariante Schar $|S + \Omega|$ zusammengesetzt ist. Das System $|S|$ weist viele Analogien zur kanonischen Schar auf Kurven auf. B. Segre hat das entsprechende System auf einer V_3 untersucht. Die topologische Charakterisierung dieser Begriffe ist sehr schwierig und bisher ungelöst, weil damit die (nach Ansicht des Ref. falsch gestellte) Forderung erhoben wird, eine Klasse birational äquivalenter Mannigfaltigkeiten topologisch erschöpfend zu charakterisieren. Wichtige Ergebnisse konnte Verf. durch Verallgemeinerung des Abelschen Theorems und des Riemann-Rochschen Satzes gewinnen (vgl. F. Severi, *Il teorema di Riemann-Roch per superficie, curve e varietà. Questioni collegate*, Berlin 1958).

W. Gröbner.

Waerden, B. L. van der: On the definition of rational equivalence of cycles on a variety. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 545—549 (1956).

Der vorstehend besprochene Vortrag von F. Severi hat zu einer Diskussion des Begriffes der rationalen Äquivalenz Anlaß gegeben. Verf. gibt hier in der Sprache der abstrakten Algebra eine Definition dieses Begriffes wieder, welche im wesentlichen der von Severi gegebenen entspricht (auf S. 70 seines Buches: *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*, dies. Zbl. 28, 79), und zeigt, daß diese Äquivalenzbeziehung reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

W. Gröbner.

Weil, André: Abstract versus classical algebraic geometry. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 550—558 (1956).

Die „klassischen“ und die „abstrakten“ Methoden in der algebraischen Geometrie werden ihrem Wesen und ihrer Reichweite nach miteinander verglichen. Zur Erläuterung dienen mehrere Beispiele: Castelnuovos Satz über den Äquivalenzdefekt einer algebraischen Korrespondenz zwischen zwei Kurven (für den ein einfacher „klassischer“ Beweis gegeben wird); der Zusammenhang dieses Satzes mit der Riemannschen Vermutung in Funktionenkörpern; Verallgemeinerung der Riemannschen Vermutung für höhere Dimensionen; Lefschetz's Fixpunktformel und der Zusammenhang mit den „arithmetischen“ Zetafunktionen.

P. Roquette.

Chow, Wei-Liang: On equivalence classes of cycles in an algebraic variety. Ann. of Math., II. Ser. 64, 450—479 (1956).

Die vorliegende Arbeit stellt eine wesentliche und weitreichende Ergänzung zu dem Buch von A. Weil „*Foundations of Algebraic Geometry*“ (New York, 1946) dar. Dort wurde der Zyklenkalkül auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit entwickelt;

insbesondere wurden die drei fundamentalen Zyklenoperationen: Produkt, Projektion, Durchschnittsprodukt definiert und untersucht. Hier wird nun systematisch ein Kalkül der sogenannten „Zyklusklassen“ einer Mannigfaltigkeit aufgebaut (es handelt sich dabei um die Klassen in bezug auf rationale Äquivalenz). Es wird gezeigt, daß sich die angegebene Klasseneinteilung an die genannten Zyklenoperationen anpaßt; insbesondere ist das Durchschnittsprodukt zweier Zyklusklassen stets definiert. Das hat zur Folge, daß die Zyklusklassen einer Mannigfaltigkeit V einen Ring $H(V)$ bilden. Dieser ist in der algebraischen Geometrie als das Analogon zu dem Homologiering im klassischen Falle anzusehen, und er besitzt ähnliche Bedeutung. — Im einzelnen ist zu den Ausführungen des Verf. folgendes zu sagen: (1) Verf. beschränkt sich durchweg auf solche Mannigfaltigkeiten V , welche sich in einen projektiven Raum einbetten lassen. Dies ist wegen der verwendeten Methoden notwendig, und es steht noch nicht fest, ob sich die Theorie auch auf den Fall von „abstrakten“ Mannigfaltigkeiten im Sinne der „Foundations“ ausdehnen läßt. Andererseits setzt Verf. nicht voraus, daß die betr. Mannigfaltigkeit V vollständig ist; es kann also V eine beliebige algebraische Teilmenge eines projektiven Raumes sein. Dies ist ein wesentlich neuer Gesichtspunkt gegenüber der klassischen Theorie (Severi, s. dies. Zbl. 7, 75; v. d. Waerden, s. dies. Zbl. 18, 421). (2) Die gesamte Theorie der Zyklusklassen beruht auf dem Begriff der „Spezialisierung“ von Zyklen auf einer Mannigfaltigkeit V , eingebettet in einen projektiven Raum S . Entsprechend der Tatsache, daß auch nichtvollständige Mannigfaltigkeiten in Betracht gezogen werden, gibt es im wesentlichen zwei verschiedene Spezialisierungsbegriffe, je nachdem ob man die außerhalb V gelegenen einfachen Teilmannigfaltigkeiten der abgeschlossenen Hülle \bar{V} ignoriert oder nicht. (Dabei ist \bar{V} innerhalb S zu bilden.) Verf. spricht demgemäß von der „absoluten“ bzw. der „relativen“ Theorie. Die erstere ist unabhängig von der speziellen Wahl der Einbettung von V in einen projektiven Raum (daher der Name „absolut“), während dies bei der zweiten nicht der Fall ist. Wenn V vollständig ist, also $V = \bar{V}$, fallen beide Theorien zusammen. (3) Zwei Zyklen X, Y auf einer Mannigfaltigkeit V heißen nun (rational) „äquivalent“, wenn es einen Zyklus X_u auf V gibt, definiert über einer rein transzendenten Erweiterung $K(u)$ eines Definitionskörpers K für X und Y , derart, daß X, Y beide Spezialisierungen von X_u über K sind. Die Zyklusklassen in bezug auf diese Äquivalenz bilden eine additive Gruppe $H(V)$. Der Hauptteil dieser Arbeit besteht darin, nachzuweisen, daß das Durchschnittsprodukt zweier Zyklusklassen in natürlicher Weise stets definiert ist, so daß $H(V)$ sogar ein kommutativer Ring ist. Er ist durch die Kodimension graduiert, und besitzt ein Einselement, nämlich die durch V selbst repräsentierte Zyklusklasse. (Genauer gesagt, konstruiert Verf. zwei Ringe: einen für die absolute, und einen für die relative Theorie.) (4) Sind U, V zwei Mannigfaltigkeiten, so gibt es in natürlicher Weise einen Ringhomomorphismus des über den ganzen Zahlen zu bildenden Tensorprodukts $H(U) \otimes H(V)$ in $H(U \times V)$. (5) Es sei nun F eine reguläre Abbildung einer Mannigfaltigkeit U in eine Mannigfaltigkeit V ; im relativen Falle wird vorausgesetzt, daß sich F zu einer regulären Abbildung \bar{F} von \bar{U} in \bar{V} fortsetzt. Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen über F wird gezeigt, daß durch $F^{-1}(X) = \text{pr}_U((U \times X) \cdot F)$ ein Ringhomomorphismus von $H(V)$ in $H(U)$ definiert wird (dabei bedeutet X einen Zyklus von V ; F wird mit seinem Graphen identifiziert; \cdot ist das Durchschnittsprodukt; pr_U die Projektion auf den ersten Faktor von $U \times V$). Die erwähnten Zusatzvoraussetzungen sind notwendig, weil U und V nicht singularitätenfrei und vollständig zu sein brauchen; falls das doch der Fall ist, so sind diese Zusatzvoraussetzungen leer. (6) Es möge noch erwähnt werden, daß Verf. neben der absoluten und der relativen noch eine dritte Theorie, die sogenannte „eingeschränkte“ (restricted) Theorie der rationalen Äquivalenz entwickelt. Diese ist auch im Falle einer nichtvollständigen Mannigfaltigkeit

birational invariant (anders als die relative Theorie), hat jedoch den Nachteil, daß das Durchschnittsprodukt zweier Äquivalenzklassen nicht immer definiert ist. — Weitere Literatur über rationale Äquivalenz: Samuel, Amer. J. Math. 78, 383—400 (1956). Siehe auch: Baldassari, Algebraic Varieties (Berlin 1956), Kap. VI.

Peter Roquette.

Roth, Leonard: Sistemi canonici ed anticanonici. Univ. Genova, Pubbl. Ist. Mat. 21, 118 p. (1956).

A cura di D. Gallarati (il quale ha pure raccolto la bibliografia, ampia ed aggiornata), viene pubblicata l'esposizione della teoria dei sistemi canonici sulle varietà algebriche (con vari problemi collegati) svolta dall'A. in sei lezioni tenute presso l'Università di Genova. Rapidamente richiamata la nozione di equivalenza sopra una curva algebrica, si illustrano i tre tipi di equivalenza (lineare, algebrica, razionale) sopra le superficie algebriche con i relativi sistemi e caratteri invarianti, per affrontare le analoghe questioni riguardanti varietà di dimensione 3 e superiore. Emergono in tal modo i fondamentali problemi di classificazione delle V_d algebriche; e si presenta come caso interessante quello delle V_d dotate di un sistema anticanonico, cioè delle V_d sulle quali è effettivo e d'ordine positivo il sistema delle X_{d-1} canoniche, cambiato di segno. — L'A. non manca di segnalare le molte questioni che, anche nella teoria delle superficie algebriche, sono tuttora aperte.

V. E. Galafassi.

Howley, N. S.: Complex bundles with abelian group. Pacific J. Math. 6, 65—82 (1956).

On désigne par C le groupe additif des nombres complexes, par C^* le groupe multiplicatif. D'après un résultat de Kodaira et Spencer, un C^* -faisceau sur une variété V algébrique provient d'une classe de diviseurs. On pose $g_p = \dim H^{p,0}(V)$, $\bar{g}_p = \dim H^{0,p}(V)$; $g_p = \bar{g}_p$ pour une variété kaehlérienne; R_p désigne le $p^{\text{ème}}$ nombre de Betti; on considère alors le groupe T_ω , de périodes $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ où ω_1, ω_2 sont deux nombres complexes de rapport non réel, T_ω étant le plan $C \bmod (\omega_1, \omega_2)$. On a la suite exacte $0 \rightarrow \Lambda_\omega \rightarrow C \rightarrow T_\omega \rightarrow 0$, Λ_ω étant le sous-groupe de C engendré par ω . L'A. montre alors pour la fibre particulière considérée: Si $R_3 > R_2 + 2\bar{g}_3$ sur V , il existe des T -faisceaux qui ne proviennent pas de C^* -faisceaux sur V (en particulier c'est le cas si V est kaehlérienne compacte et si $g_2 = R_3 = 0$; si V est algébrique il suffit que l'invariant I de Zeuthen-Segre surpasse $2(p_a - 1)$ où p_a est le genre arithmétique de V). On étudie ensuite la condition pour deux diviseurs D, D' d'être ω -équivalents. On montre que si D et D' sont homologues sur V , ils sont ω -équivalents pour un certain ω ; une condition est donnée, nécessaire et suffisante, pour que D et D' soient ω -équivalents. La dernière partie du mémoire discute l'existence d'une structure kaehlérienne sur certaines variétés compactes complexes: pour un espace homogène W simplement connexe, du type étudié par C. Wang, (c'est un espace fibré, de base une variété rationnelle, de fibre un tore) il faut et il suffit que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(W)$ soit différente de zéro; alors W est algébrique et même rationnel.

P. Lelong.

Blanchard, André: Sur les variétés analytiques complexes. Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. 73, 157—202 (1956).

On étudie sous quelles conditions un espace fibré complexe compact est une variété kaehlérienne ou une variété algébrique; on suppose que si E est l'espace fibré, de base B , de fibre F , le groupe fondamental $\pi^1(B)$ opère trivialement sur le premier groupe de cohomologie réelle $H^1(F)$. Alors, pour que E soit une variété kaehlérienne, il faut et il suffit que soient vérifiées les trois conditions: 1) Il existe une forme kaehlérienne sur F qui représente une classe de cohomologie invariante par $\pi^1(B)$; 2) B est kaehlérienne; 3) la transgression $H^1(F) \rightarrow H^2(B)$ en cohomologie réelle est nulle. C'est cette dernière condition qui n'est pas vérifiée dans les exemples, donnés par Hopf, de variétés analytiques complexes compactes non kaehlériennes. Pour l'étude du cas algébrique, on suppose F connexe, de groupe structurel connexe;

pour que E soit une variété algébrique projective, il faut et il suffit que F et B soient algébriques projectives et que, de plus, les deux conditions soient vérifiées: 1) $b^1(E) = b^1(F) + b^1(B)$ (b^1 désigne le premier nombre de Betti); 2) la variété d'Abanese $A(E)$ est une variété algébrique projective. Un groupe connexe d'automorphismes de la structure analytique complexe d'une variété algébrique projective V , qui détermine un groupe discret de translations de la variété d'Abanese $A(V)$, est induit par un groupe d'homographies pour un plongement convenable de V dans un espace projectif complexe. L'A. démontre également: si l'on procède à l'éclatement d'une variété kaehlérienne compacte le long d'une sous-variété non singulière, on obtient encore une variété kaehlérienne.

P. Lelong.

Rosenlicht, Maxwell: Some basic theorems on algebraic groups. Amer. J. Math. 78, 401—443 (1956).

Die Theorie der algebraischen Gruppen (auch Gruppenmannigfaltigkeiten genannt) hat in den letzten Jahren eine schnelle Entwicklung durchgemacht. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine systematische Darstellung der Hauptresultate über algebraische Gruppen zu geben, ohne jedoch auf die Theorie spezieller Gruppen (abelsche Mannigfaltigkeiten; lineare Gruppen) im einzelnen einzugehen. [Vgl. auch: Barsotti, Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 38, 77—119 (1955); dies. Zbl. 64, 403.] Eine „algebraische Gruppe“ ist eine Gruppe G , welcher die Struktur einer algebraischen Mannigfaltigkeit aufgeprägt ist, und zwar derart, daß die Gruppenoperationen reguläre Abbildungen im Sinne der algebraischen Geometrie sind. Dabei wird vom Verf. die Möglichkeit zugelassen, daß G als algebraische Mannigfaltigkeit in mehrere Komponenten zerfällt, also „reduzibel“ im Sinne der algebraischen Geometrie ist. Hierdurch unterscheidet sich der Ansatz des Verf. von dem bei A. Weil (dies. Zbl. 65, 142), welcher sich auf algebraische Gruppen mit nur einer Komponente beschränkt. Die letztgenannten Gruppen werden vom Verf. „zusammenhängend“ genannt. In den beiden ersten Abschnitten werden im wesentlichen die von Weil (loc. cit.) für zusammenhängende algebraische Gruppen erhaltenen Resultate auf den nicht-zusammenhängenden Fall verallgemeinert. Es handelt sich dabei vornehmlich um die Konstruktion von Darstellungsmannigfaltigkeiten, homogenen Mannigfaltigkeiten und Faktorgruppen zu einer algebraischen Gruppe G . Im dritten Abschnitt werden die gruppentheoretischen Isomorphie- und Kettensätze für algebraische Gruppen bewiesen. Es zeigt sich, daß dabei der Begriff der „inseparablen Isogenie“ eine Rolle spielt. Zwei algebraische Gruppen G_1 und G_2 heißen „inseparabel isogen“, wenn es eine algebraische Gruppe G_3 und reguläre (nicht notwendig bireguläre) Isomorphismen von G_3 auf G_1 und auf G_2 gibt. (Der Funktionenkörper von G_3 ist dann eine rein inseparable Erweiterung der Funktionenkörper von G_1 und von G_2 .) Zum Beispiel lautet einer der Isomorphiesätze folgendermaßen: Sind H, N algebraische Untergruppen einer algebraischen Gruppe G , und ist N Normalteiler, so sind $H/H \cap N$ und HN/N inseparabel isogen. Genauer: die natürliche Abbildung $H/H \cap N \rightarrow HN/N$ ist ein rationaler Isomorphismus. Ein sehr interessantes Ergebnis (Prop. 2, S. 420) gestattet es, den Inseparabilitätsgrad q dieser rationalen Isomorphie als Schnittmultiplizität zu deuten, nämlich durch die Formel $q(H \cap N) = \bar{H} \cdot N$, wobei der Punkt die Zyklenmultiplikation im Sinne der algebraischen Geometrie bedeutet, und $q(H \cap N)$ als Zyklus aufzufassen ist. (Für die Gültigkeit der letztgenannten Formel ist vorauszusetzen, daß G zusammenhängend ist, und daß $HN = G$.) Eine algebraische Gruppe G heißt „auflösbar“, wenn sie eine Normalkette von algebraischen Untergruppen besitzt, deren sukzessive Faktorgruppen isomorph sind entweder zur additiven Gruppe des Konstantenkörpers, oder zu seiner multiplikativen Gruppe, oder zu einer endlichen kommutativen Gruppe. Der vierte Abschnitt beschäftigt sich hauptsächlich mit den sogenannten „Schnitten“ auflösbarer algebraischer Gruppen. Als wichtige Folgerung aus den Resultaten des Verf. sei erwähnt: Ist H ein

zusammenhängende auflösbare algebraische Untergruppe einer zusammenhängenden algebraischen Gruppe G , so ist G birational äquivalent zum direkten Produkt $H \times G/H$. Folgerung: Ist G eine zusammenhängende auflösbare algebraische Gruppe, dann ist der Funktionenkörper von G rational. (Hierzu siehe auch: Chevalley, dies. Zbl. 57, 263.) Im letzten Abschnitt finden sich die fundamentalen Struktursätze über algebraische Gruppen. Es zeigt sich, daß sich jede algebraische Gruppe G aus Untergruppen von speziellem Typus aufbauen läßt, nämlich erstens den abelschen Mannigfaltigkeiten, definiert als vollständige, zusammenhängende algebraische Gruppen (zu diesen vgl. insbes. Weil, dies. Zbl. 37, 162), und zweitens den linearen Gruppen, welche definiert sind durch die Existenz einer treuen, algebraischen Darstellung als algebraische Matrizen Gruppe [hierzu vgl. insbes. Chevalley, *Théorie des Groupes de Lie*, Tome II (dies. Zbl. 54, 13)]. Der Hauptsatz lautet: Jede zusammenhängende algebraische Gruppe G enthält einen eindeutig bestimmten maximalen linearen zusammenhängenden Normalteiler L , und G/L ist eine abelsche Mannigfaltigkeit. (Hierzu siehe auch Barsotti, loc. cit.) Als Folge aus dem Hauptsatz ergibt sich z. B.: Ist D der kleinste algebraische Normalteiler von G mit linearer Faktorgruppe, so gilt $G = LD$, und D ist die minimale algebraische Untergruppe von G mit der letztgenannten Eigenschaft. D besitzt keine nichttrivialen rationalen Homomorphismen in eine lineare Untergruppe. D enthält nur eine endliche Anzahl von Elementen zu jeder vorgegebenen endlichen Ordnung. (An einem Beispiel wird gezeigt, daß D nicht notwendig eine abelsche Mannigfaltigkeit ist.) — Hieraus erhält Verf. Bedingungen dafür, daß G isogen ist zu einem direkten Produkt einer abelschen Mannigfaltigkeit mit einer linearen zusammenhängenden Gruppe. (Cor. 6, S. 441.) — Weitere Struktursätze: Jede auflösbare algebraische Gruppe ist linear. — Die Faktorgruppe einer zusammenhängenden algebraischen Gruppe nach ihrem Zentrum ist linear. — Jede abelsche Teilmannigfaltigkeit A einer zusammenhängenden algebraischen Gruppe G ist im Zentrum von G enthalten, und es gibt in G ein „Komplement“ G_1 zu A , nämlich derart, daß $G = G_1 A$ und $G_1 \cap A$ endlich ist. Schließlich sei noch erwähnt, daß Verf. auch die Rationalität aller durchgeführten Konstruktionen in bezug auf einen vorgegebenen Grundkörper behandelt.

P. Roquette.

Rosenlicht, Maxwell: Group varieties and differential forms. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 493—496 (1956).

Mehrere der im „klassischen“ Falle bekannten Sätze über Differentialformen lassen sich als Aussagen über kommutative algebraische Gruppen formulieren und so auf den „abstrakten“ Fall der Charakteristik $p \neq 0$ übertragen; dagegen führt die direkte Übertragung der betr. Sätze mit Hilfe von Differentialformen nicht immer zu adäquaten Ergebnissen. Verf. berichtet in diesem Zusammenhang über seine Resultate, ohne Beweise oder Literaturhinweise. Ist V eine algebraische Kurve, so ist die Divisorklassengruppe von V in natürlicher Weise eine algebraische Gruppe, welche als verallgemeinerte Jacobische Mannigfaltigkeit J bezeichnet wird. (Die Bezeichnung „verallgemeinert“ rührt daher, daß man gewöhnlich nur Jacobische Mannigfaltigkeiten singularitätenfreier Kurven betrachtet hat; die Konstruktion des Verf. ist jedoch auch und gerade für den Fall von Kurven mit Singularitäten durchführbar. Vgl. Rosenlicht, dies. Zbl. 58, 370.) Die Struktur von J spiegelt in gewisser Weise Eigenschaften der Differentiale von V wider. Bedeutet $\varphi: V \rightarrow J$ die „kanonische“ Abbildung, so erhält Verf. ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß die Urbilder bezügl. φ der invarianten Differentialformen auf J sämtlich von zweiter Gattung sind. Und zwar bezieht sich dieses Kriterium auf die Struktur des maximalen auflösbaren Normalteilers L von J (vgl. dazu vorstehendes Referat). Aus der allgemeinen Theorie der kommutativen algebraischen Gruppen folgt, daß L direktes Produkt von Gruppen der Form G_m (= multiplikative Gruppe des Konstantenkörpers) mit einer Gruppe H

ist, welche biregulär äquivalent ist zu einem affinen Raum. Bei Charakteristik 0 ist H direktes Produkt von Gruppen der Form G_a (= additive Gruppe des Konstantenkörpers), jedoch ist das nicht notwendig bei Charakteristik $p \neq 0$ der Fall (Wittsche Vektoren). Das erwähnte Kriterium bezügl. Differentiale zweiter Gattung besagt nun: L ist direktes Produkt von Gruppen der Form G_a . Aus der allgemeinen Theorie der algebraischen Gruppen folgt, daß J/L eine abelsche Mannigfaltigkeit ist (vgl. vorstehendes Referat). Daher ist es von Interesse, über die möglichen Erweiterungstypen von G_a mit einer abelschen Mannigfaltigkeit A Aufschluß zu erhalten. Diese Erweiterungstypen werden durch die Faktorsystemklassen zu A in G_a beschrieben, welche einen endlichdimensionalen Vektorraum über dem Konstantenkörper bilden. Und zwar ist die Dimension dieses Vektorraums gleich $\dim A$. Diese Dimensionsaussage ist das Analogon zu der im klassischen Fall bekannten Tatsache, daß die Dimension des Moduls der Differentiale zweiter Gattung modulo den exakten Differentialen gleich $2g$ ist (g = Geschlecht). Die formale Übertragung der letztgenannten Aussage liefert im Falle der Charakteristik $p \neq 0$ dagegen nur das folgende unbefriedigende Resultat: Die Dimension des Moduls der Differentiale zweiter Gattung modulo den exakten Differentialen ist gleich g . (Hierzu vgl. Rosenlicht, dies. Zbl. 51, 30.) Verf. skizziert noch eine etwas von dem Vorangegangenen verschiedene Theorie der Differentiale zweiter Gattung mit Hilfe der Theorie der Faserbündel. (Zu den letzteren vgl. Weil, *Fibre spaces in algebraic geometry*, Lecture Notes Chicago 1955.) P. Roquette.

Barsotti, Iacopo: Algebraic group-varieties. Bull. Amer. math. Soc. 62, 519—530 (1956).

Verf. berichtet (ohne Beweise) über seine Ergebnisse über algebraische Gruppen. Es handelt sich dabei um die sogenannten „Struktursätze“, welche den Aufbau algebraischer Gruppen aus gewissen einfachen Typen beschreiben. Als solche einfachen Typen algebraischer Gruppen kommen in Frage: (1) die abelschen Mannigfaltigkeiten, definiert dadurch, daß sie als Mannigfaltigkeiten isomorph sind zu abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen eines projektiven Raumes; (2) die vom Verf. sogenannten Vessiot-Mannigfaltigkeiten, welche dadurch definiert sind, daß sie als algebraische Gruppen isomorph sind zu algebraischen Matrizen Gruppen über dem Konstantenkörper. Üblicherweise nennt man solche algebraischen Gruppen „linear“. Als wichtige Spezialfälle kommutativer Vessiot-Mannigfaltigkeiten nennt Verf.: (a) die Vektormannigfaltigkeiten, isomorph zur additiven Gruppe eines Vektorraumes über dem Konstantenkörper; (b) die „logarithmischen“ Mannigfaltigkeiten, isomorph zu einem direkten Produkt von Gruppen, deren jede gleich der multiplikativen Gruppe des Konstantenkörpers ist; (c) die periodischen Mannigfaltigkeiten, definiert dadurch, daß sie einen endlichen Exponenten besitzen. Die letzteren treten nur auf, wenn die Charakteristik p des Konstantenkörpers von 0 verschieden ist, und dann ist der Exponent eine Potenz von p . — Die meisten vom Verf. erwähnten Struktursätze wurden unabhängig von ihm auch von Rosenlicht bewiesen (vgl. das vorletzte Referat); sie brauchen daher hier nicht noch einmal referiert zu werden. Die folgenden Resultate sind darüberhinaus erwähnenswert: Sind A , V kommutative algebraische Gruppen, so kann man in natürlicher Weise „algebraische“ Faktorsysteme von A in V (mit trivialer Wirkung) bilden; die zugehörige Faktorsystemklassengruppe ist eine algebraische Gruppe $C(A, V)$. Die folgenden Resultate bestimmen die Struktur von $C(A, V)$, wenn A eine abelsche Mannigfaltigkeit der Dimension n ist, und V eine kommutative Vessiot-Mannigfaltigkeit der Dimension 1, und zwar: (i) wenn V eine Vektormannigfaltigkeit ist, so ist $C(A, V)$ eine n -dimensionale Vektormannigfaltigkeit, und im Falle der Charakteristik 0 in natürlicher Weise isomorph zum Modell der Differentiale 2. Gattung auf A modulo den Differentialen 1. Gattung und den exakten Differentialen; (ii) wenn V eine logarithmische Mannigfaltigkeit ist, so ist $C(A, V)$ in natürlicher Weise isomorph zur

Picardschen Mannigfaltigkeit von A . — Verf. setzt von allen betrachteten Mannigfaltigkeiten voraus, daß sie lokal abgeschlossene Teilmannigfaltigkeiten eines projektiven Raumes sind. Der Konstantenkörper wird stets als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt. Literatur: I. Barsotti, s. dies. Zbl. 64, 403 und Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 38, 77—119 (1955) sowie Trans. Amer. math. Soc. 84, 85—108 (1957). — Vgl. auch: Serre, Groupes algébriques et corps des classes (Paris 1959), Chap. VII. P. Roquette.

Lang, Serge: Algebraic groups over finite fields. Amer. J. Math. 78, 555—563 (1956).

Es sei k ein endlicher Körper mit q Elementen, und es sei G eine über k definierte algebraische Gruppe. (Für die Grundlagen der Theorie algebraischer Gruppen siehe: Weil, dies. Zbl. 65, 142.) Ist x ein Punkt von G , so bezeichne man mit $x^{(q)}$ denjenigen Punkt von G , welcher entsteht, wenn man die Koordinaten von x mit q potenziert. Die Abbildung $f(x) = x^{-1} x^{(q)}$ ist eine rationale Abbildung von G in sich; Verf. zeigt, daß sie sogar eine Abbildung auf G ist. Bedeutet x einen allgemeinen Punkt von G , so ist die Körpererweiterung $k(x)/k(f(x))$ algebraisch, separabel und galoissch, wobei die galoissche Gruppe isomorph ist zu der Gruppe G_1 der in k rationalen Punkte von G . Setzt man allgemeiner $F(x, y) = x^{-1} y x^{(q)}$, so erscheint dadurch G als homogener Darstellungsraum bezüglich G selbst. Unter Benützung dieser Tatsache zeigt Verf., daß jeder homogene Raum H bezüglich G , welcher über k definiert ist, einen rationalen Punkt besitzt. Dieser Satz kann als Verallgemeinerung des vom Verf. früher bewiesenen Satzes angesehen werden, welcher folgendes besagt: Ist V eine über k definierte algebraische Mannigfaltigkeit, welche über der algebraisch-abgeschlossenen Hülle \bar{k} von k biregulär äquivalent zu einer abelschen Mannigfaltigkeit ist, so besitzt V einen rationalen Punkt und ist also selbst eine abelsche Mannigfaltigkeit über k . — (Siehe dazu: Lang, dies. Zbl. 64, 39.) Weiter gibt Verf. einen neuen Beweis eines Resultates von Chatelet: Wenn eine algebraische Mannigfaltigkeit V/k biregulär äquivalent über \bar{k} zum projektiven Raum ist, so ist sie bereits über k biregulär äquivalent zum projektiven Raum [C. r. Acad. Sci., Paris 224, 1616—1618 (1947)]. Beim Beweis benutzt Verf. den Satz, daß die einzigen biregulären Korrespondenzen des projektiven Raumes mit sich selbst die projektiven Abbildungen sind. Chow hat gezeigt, daß diese Eigenschaft außer dem projektiven Raum auch noch gewissen anderen Mannigfaltigkeiten zukommt (dies. Zbl. 40, 229). Es ergibt sich daraus, daß auch der Satz von Chatelet für diese anderen Mannigfaltigkeiten gültig ist. Schließlich betrachtet Verf. noch die Klassenkörpertheorie für die galoissche Erweiterung $k(x)/k(f(x))$. Es wird ein gewisses nicht-abelsches Reziprozitätsgesetz aufgestellt und gezeigt, daß die zugehörigen Artinschen L -Reihen für Nichthauptcharaktere trivial sind. Hieraus wird das folgende Resultat gefolgert: Sei g eine Untergruppe von G , welche nur aus rationalen Punkten über k besteht, und sei H der homogene Raum der Nebenklassen von G modulo g . Dann besitzen G und H die gleiche Anzahl von rationalen Punkten. — In einer weiteren Arbeit [Ann. of Math., II. Ser. 64, 285—325 (1956)] entwickelte Verf. eine abelsche Klassenkörpertheorie. P. Roquette.

Abhyankar, Shreeram: Simultaneous resolution for algebraic surfaces. Amer. J. Math. 78, 761—790 (1956).

Bekanntlich haben O. Zariski und Verf. gezeigt, daß jeder zweidimensionale Funktionenkörper K mit vollkommenem Konstantenkörper k mindestens ein singularitätenfreies projektives Modell V besitzt. [Für Charakteristik 0 siehe Zariski, dies. Zbl. 21, 253; für Charakteristik $\neq 0$ mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper siehe: Abhyankar, Ann. of Math., II. Ser. 63, 491—526 (1956); für die Verallgemeinerung auf vollkommene Konstantenkörper siehe: Abhyankar, Annals

of Math., II. Ser. 65, 268—281 (1957). In der vorliegenden Arbeit betrachtet Verf. gleichzeitig mit K einen endlichen algebraischen Erweiterungskörper K^* von K und fragt nach der Existenz von projektiven singularitätenfreien Modellen V , V^* von K bzw. K^* derart, daß V^* die ganzabgeschlossene Hülle („normalization“) von V in K^* ist. Diese Frage wird positiv beantwortet in dem Falle, daß K^* eine quadratische oder kubische Kummerische Erweiterung von K ist. Im allgemeinen Falle ist jedoch die Antwort auf die obige Frage negativ. Verf. zeigt: falls K ein minimales Modell besitzt (d. h. falls K nicht der Funktionenkörper einer Regelfläche ist), so gibt es zu jeder von der Charakteristik p von K verschiedenen Primzahl $q > 3$ zyklische Erweiterungskörper K^* vom Grad q über K derart, daß für jedes projektive singularitätenfreie Modell V von K die ganzabgeschlossene Hülle V^* in K^* Singularitäten besitzt. Im Hinblick auf dieses negative Ergebnis schwächt Verf. seine Fragestellung ab, indem von V nicht mehr die Singularitätenfreiheit, sondern nur die Ganzabgeschlossenheit verlangt wird; V^* soll jedoch singularitätenfrei sein. Diese abgeschwächte Frage wird in bejahendem Sinne beantwortet, falls k algebraisch abgeschlossen, $p = 0$ und K^* galoissch über K ist. Verf. behandelt auch das entsprechende lokale Problem: Gegeben sei eine nulldimensionale Bewertung v^* von K^* über k (d. h. der Restklassenkörper von v^* soll algebraisch über k sein); sei v die Einschränkung von v^* auf K . Gibt es projektive ganzabgeschlossene Modelle V , V^* von K bzw. K^* , wobei V^* die ganzabgeschlossene Hülle von V in K^* ist, derart daß die Zentren von v in V und von v^* in V^* einfache Punkte von V bzw. V^* sind? Dies ist zu bejahen, falls k algebraisch abgeschlossen, $p = 0$ und die Wertgruppe von v rational (als Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen) ist. Das entsprechende abgeschwächte Problem entsteht, indem man nur die Einfachheit des Zentrums von v^* , nicht aber die des Zentrums von v fordert. Diese abgeschwächte Frage ist stets zu bejahen, falls k vollkommen ist, oder allgemeiner, falls K^* überhaupt ein projektives Modell besitzt, in dem v^* ein einfaches Zentrum hat. Einige Bemerkungen dienen der späteren eventuellen Übertragung der Methoden des Verf. auf höherdimensionale Funktionenkörper.

P. Roquette.

Nollet, Louis: Sur les genres pseudocanoniques des surfaces algébriques régulières dans leurs rapports avec la structure algébrique du premier groupe de torsion. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 42, 579—595 (1956).

Es sei F eine algebraische, irreduzible, singularitätenfreie und reguläre Fläche, welche keine exzeptionelle Kurve 1. Art aufweist; es sei p_g das geometrische Geschlecht von F . Man setzt voraus, daß F ein Büschel \mathcal{E} elliptischer und im allgemeinen nicht zerfallender Kurven E des Grades 0 enthält. Es gibt so in \mathcal{E} höchstens eine endliche Anzahl $s \geq 0$ zerfallender Kurven der Form $e_j E_j$ ($j = 1, \dots, s$); die Zahlen e_j werden die Divisoren des Büschels \mathcal{E} genannt. Man weiß, daß das kanonische System $|K|$ von F die Form hat: $K \equiv (p_g - 1)E + (e_1 - 1)E_1 + \dots + (e_s - 1)E_s$; man weiß auch, daß die algebraischen Nullteiler von F folgende Form haben: (1) $Z \equiv z_1 E_1 + \dots + z_s E_s - z E$, wo die ganzen Zahlen z, z_1, \dots, z_s durch die Gleichung (2) $z = z_1/e_1 + \dots + z_s/e_s$ miteinander verbunden sind und $0 \leq z_j < e_j$ ($j = 1, \dots, s$) gilt. — Verf. stellt zunächst die Frage, ob F verschiedene Büschel \mathcal{E} besitzen kann, und beweist, daß in diesem Falle entweder $s = 0$ für alle Büschel ist (und F die Geschlechter 1 hat), oder $s = 2$ für alle Büschel (und F die bekannte Fläche von F. Enriques) ist. — Verf. sucht dann die effektive Dimension der linearen vollständigen pseudokanonischen Systeme von I , d. h. von den Systemen $|K + Z|$; er findet, daß diese Dimension $p_g - 1 - z + s'$ beträgt, wo s' die Anzahl der von Null verschiedenen Zahlen z_j in (1) und (2) bedeutet. Es gibt nur zwei Fälle, wo alle Systeme $|K + Z|$ regulär sind, d. h. die Dimension p_g besitzen: im 1. Falle sind die Divisoren e_j des Büschels \mathcal{E} paarweise Primzahlen, bis auf ein Paar; die algebraischen Nullteiler von F bilden eine zyklische Gruppe der Ordnung p^n , wo p eine Primzahl ist; im 2. Falle ist $e_1 = 2$, $e_2 = 2$, $e_3 = 2$.

während die anderen e_j paarweise Primzahlen sind; die algebraischen Nullteiler bilden eine Vierergruppe. — Wenn man die Voraussetzung der Existenz des Büschels \mathcal{C} auf F fallen läßt, so hat man nur eine notwendige Bedingung dafür daß alle vollständigen linearen pseudokanonische Systeme regulär sind; die erste Torsionsgruppe solcher Flächen muß entweder mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung p^r (p Primzahl) oder mit einer Vierergruppe isomorph sein. *E. Togliatti.*

Barker, C. C. H.: Contact along a curve on an algebraic fourfold. *J. London math. Soc.* **31**, 259—268 (1956).

Fortsetzung früherer Untersuchungen desselben Verf. über Schnitte und Berührungen algebraischer Mannigfaltigkeiten (s. dies. Zbl. **42**, 154; **64**, 152). Es werden hier hauptsächlich für eine algebraische singularitätenfreie V_4 folgende Äquivalenzfragen behandelt (es bedeuten $\underline{A}, \underline{B}, \underline{D}, \underline{E}$ dreidimensionale Mannigfaltigkeiten; $\underline{S}, \underline{T}$ Flächen; $\underline{C}, \underline{D}$ Kurven): weitere Schnittkurve \underline{D} von \underline{A} und \underline{S} , falls $\underline{A}, \underline{S}$ eine Berührungskurve \underline{C} aufweisen, und Punktgruppe $(\underline{C} \underline{D})$; dieselbe Frage im Falle, daß \underline{S} eine Anzahl σ von Doppelpunkten auf \underline{C} aufweist; weitere Schnittpunkte von $\underline{S}, \underline{T}$, wenn sie sich längs \underline{C} berühren und auf \underline{C} gegebene Doppelpunkte besitzen; Schnittpunkte von \underline{C} mit der weiteren Schnittkurve von $\underline{A}, \underline{B}, \underline{D}$, wenn $\underline{A}, \underline{B}, \underline{D}$ sich längs \underline{C} berühren und auf \underline{C} Doppelpunkte aufweisen; kanonische Gruppe auf der weiteren Schnittkurve \underline{D} von $\underline{A}, \underline{B}, \underline{D}$; weitere Schnittpunkte von $\underline{A}, \underline{B}, \underline{D}, \underline{E}$, die sich längs \underline{C} berühren und auf \underline{C} Doppelpunkte besitzen. Schließlich die Anwendung auf den Fall, daß V_4 ein linearer Raum S_4 ist. *E. Togliatti.*

Spampinato, Nicolò: La superficie approssimante una falda di Halphen nell'intorno dell' n -mo ordine del suo punto origine. *Ricerche Mat.* **5**, 226—238 (1956).

Etant donnée une nappe de Halphen d'ordre n , l'A. montre qu'il existe un cône d'ordre n approchant la nappe jusqu'à l'ordre n . Il s'occupe également des plans tangents successifs au plan tangent à l'origine. *L. Godeaux.*

Spampinato, Nicolò: Prolungamento di una falda dell' S_3 complesso nell'algebra dei numeri triduali. *Giorn. Mat. Battaglini* **84** (V. Ser. **4**), 49—65 (1956).

Une nappe de Halphen étant donnée par ses équations $x_i = f_i(\varrho, \sigma)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), où les f_i sont des séries de puissances de ϱ, σ , l'A. substitue aux coordonnées x_i et à ϱ, σ des nombres triduels (à 3 unités) dont il donne la table de multiplication. *L. Godeaux.*

Rosati, Luigi Antonio: Sul numero dei punti di una superficie cubica in uno spazio lineare finito. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. **11**, 412—418 (1956).

Verf. betrachtet kubische Flächen F im dreidimensionalen projektiven Raum, definiert über einem endlichen Körper k der Charakteristik $p \neq 2$. Für eine sehr umfassende Klasse solcher Flächen werden Formeln für die in k rationalen Punkte von F angegeben. *P. Roquette.*

Brusotti, Luigi e Vittorio Emanuele Galafassi: Topologia degli enti algebrici reali. *Atti V. Congr. Un. Mat. Ital.* **57**—84 (1956).

Nella Parte I dopo alcune considerazioni generali sulla topologia degli enti algebrici reali, vengono enumerate varie questioni di realtà riguardanti prevalentemente l'indirizzamento proiettivo. Innanzi tutto si parla dei procedimenti di "piccola variazione" prettamente di indole topologica, e si accenna alle applicazioni del metodo alla risoluzione di problemi esistenziali relativi ad enti algebrici reali, senza lumeggiare la vera sostanza del metodo, e soffermandosi invece su aspetti meno noti, risalenti a considerazioni nel campo complesso. — Viene poi, senza entrare in argomento, accennato a lavori classici, e ulteriori ricerche, di cui alcune avrebbero meritato di essere menzionate più particolarmente: ricerche intorno a curve algebriche reali piane, sghembe, iperspaziali (supposte prive di singolarità), sul numero

dei circuiti della parte reale, sui loro mutui rapporti di posizione entro lo spazio ambiente o sopra assegnate superficie algebriche reali, con qualche estensione alle superficie algebriche per la topologia delle loro parti reali. — Tra i risultati omissi è p. es, quello che il numero dei circuiti dispari di una curva algebrica priva di singolarità situata sopra una superficie generale del terzo ordine non può superare l'ordine di connessione della superficie, risultato dovuto a M. Piazzolla Beloch, che pur ha dato luogo a importanti estensioni: di A. Comessatti al caso delle superficie razionali reali, rappresentabili realmente sul piano, e più recentemente di B. A. Rosina per le curve situate sopra una superficie d'ordine dispari qualunque. Si parla poi diffusamente del problema generale del modello algebrico, illuminandone i vari aspetti secondo le vedute di L. Brusotti. Ultimo argomento della Parte I è la topologia dei fasci reali di curve algebriche nel piano proiettivo e, più in generale sulle superficie algebriche reali, da cui si passa alla teoria dei fasci di curve grafiche di cui si ricorda la definizione e i concetti su cui si fonda e si enumerano i risultati conseguiti, dovuti a L. Brusotti. Si prospetta poi l'applicazione dei fasci di curve grafiche al caso algebrico e si ricordano le proposizioni di più semplice enunciato. Chiude la Parte I qualche riflessione d'indole generale. — La Parte II è dedicata all'indirizzo birazionale e si occupa prevalentemente dei problemi che si presentano nello studio della parte reale di una superficie algebrica reale, caratterizzata dal numero delle falde e dai caratteri di connessione delle falde. — Si osserva che il problema centrale nella topologia della parte reale Σ di una superficie algebrica reale F consiste nello stabilire relazioni tra i caratteri topologici di Σ e le circostanze di natura algebrica che offre la superficie F nell'ambito birazionale complesso, con intervento esplicito, ove occorre, delle ipotesi di realtà. Per lo studio dell'argomento sono finora state seguite due metodi. Il primo corrisponde ad un esame diretto della parte reale; il secondo si serve della Riemanniana (quadriddimensionale) simmetrica della superficie reale, ovvero di altre varietà a questa strettamente collegate. Per il primo metodo viene accennato, senza entrare in particolari, alla teoria elaborata da A. Comessatti per le superficie razionali reali. Ad illustrazione del metodo diretto vengono esposte le recenti ricerche di V. E. Galafassi sulle rigate astratte reali di genere $p > 0$, enumerandone i più importanti risultati. Viene poi esaminato il contributo dato dal secondo metodo suddetto specialmente per i problemi di connessione, e ne vengono segnalate le aspre difficoltà di applicazione. — Per quanto poi concerne l'estensione alle superficie della classica limitazione di Harnack per le curve, si propone l'introduzione di una varietà topologica collegata ad una superficie F reale, riferendosi ad un modello di F , in uno spazio S_r di dimensione r abbastanza elevata perchè nella Grassmanniana di S_r la varietà algebrica reale V_4 (a quattro dimensioni complesse) delle immagini delle corde (e delle tangenti) di F sia priva di singolarità, e della sua parte reale U , che rappresenta in modo biunivoco senza eccezioni, e continuo, l'insieme delle corde (e delle tangenti) reali di F , ossia l'insieme delle coppie reali (non ordinate) della superficie. Se F è dotata di $m > 0$ falde, queste danno luogo sopra U ad altrettanti cicli connessi a tre dimensioni. Soppressi i punti di U immagini di corde ad appoggi reali, si ottiene una varietà topologica Q (sempre a quattro dimensioni) avente i cicli γ_i come orli. Osservando che sopra Q gli m orli γ_i sono cicli tridimensionali omologicamente indipendenti (mod. 2), dicendo q_3 il terzo rango di connessione della Q , l'A. deduce la disuguaglianza $m \leq q_3 + 1$, prospettando poi il problema di esprimere q_3 con altri più significativi caratteri della superficie reale F . — Il suggerimento, sebbene interessante, non sembra però, secondo l'opinione del Referente, che possa condurre a risultati concreti senza ulteriori precisazioni e consolidamento del metodo. Può essere fallace il fatto che esso applicato alle curve conduca alla classica limitazione di Harnack. — È da deplorare poi che il lavoro non sia corredato di un'ampia, adeguata bibliografia.

M. Piazzolla Beloch.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Diamantopoulos, Th.: Application du rayon de contraction dans la théorie des surfaces. Bull. Soc. math. Grèce 30, 64—75, franz. Zusammenf. 76 (1956) [Griechisch].

L'A. dans la première partie de l'article démontre un théorème analogue à un théorème de Liouville sur les rayons de courbure géodésique ("lescentres de contraction à un point M des trajectoires isogonales d'une famille à un paramètre de courbes d'une surface se trouvent sur la droite des centres de courbure géodésique et de contraction de la trajectoire orthogonale"). Dans la seconde partie il s'occupe avec l'application du rayon de contraction dans la représentation conforme des surfaces et avec quelques théorèmes sur ce sujet.

Ger. G. Legatos.

Mineo, Massimo: Sulla variazione della curvatura geodetica d'una curva nella rappresentazione d'una superficie su di un'altra. Matematiche 11, 1—7 (1956).

Angabe eines Verfahrens zur Berechnung der Änderung der geodätischen Krümmung einer Flächenkurve vermöge einer Flächentransformation auf Grund der Formel von Bonnet, mit besonderer Berücksichtigung einiger Sonderfälle.

F. Löbell.

Mineo, Corradino: Geodesia intrinseca e proprietà generali delle rappresentazioni cartografiche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 569—576 (1955).

Mineo, Corradino: Ancora sulla geodesia intrinseca. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 20, 552—555 (1956).

Kritische, in der Form unnötig polemische Auseinandersetzungen mit Arbeiten von Antonio Marussi über die von diesem inaugurierte „Geodesia intrinseca“, über die Winkelabweichung eines geodätischen Bogens von dem durch seinen Endpunkt gehenden Normalschnitt im Anfangspunkt, über die Änderung der geodätischen Krümmung einer Flächenkurve vermöge einer Flächenabbildung und über eine Eigenschaft des Maßstabes einer konformen Abbildung.

F. Löbell.

Reade, Maxwell O.: Analogue of a theorem of F. and M. Riesz for minimal surfaces. J. math. Soc. Japan 8, 177—179 (1956).

On dit que la fonction $p(z) = p(x, y)$ est de classe PL si elle est continue, si $p \geq 0$, et si $\log p$ est sousharmonique sur l'ensemble $p > 0$. On établit que si p est de classe PL dans $|z| < 1$, et si l'on a $\lim_{r \rightarrow 1} p(re^{i\theta}) = 0$, pour un ensemble E_θ de mesure positive, alors on a $p(z) \equiv 0$ pour $|z| < 1$. Si $X_j(z) = X_j(x, y)$, $j = 1, 2, 3$, sont les coordonnées sur une surface minima S donnée par une représentation isotherme pour $|z| < 1$, si l'on a $\lim_{r \rightarrow 1} \sum |X_j(z) - a_j|^2 = 0$, $z = re^{i\theta}$, sur un ensemble E_θ de mesure positive, on a $X_j(z) \equiv a_j$ pour $|z| < 1$.

P. Lelong.

Guion, A.: Sur un théorème de Dobriner. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 25, 400—404 (1956).

Verf. verallgemeinert den Satz von Dobriner, daß bei einer nabelpunktfreien Fläche konstanter, von Null verschiedener Gaußscher Krümmung mit nichtausgearteten Evoluten und einer Schar ebener Krümmungslinien die Krümmungslinien der anderen Schar sphärisch sind, auf den Fall einer W -Fläche mit der Relation $l_1 l_2 K - (l_1 + l_2) H + 1 = 0$ (K bzw. H = Gaußsche bzw. mittlere Krümmung; $l_1, l_2 = \text{const.}$). [Anm. des Ref.: Dies läßt sich auch einfach durch Zurückführung auf den klassischen Dobrinerschen Satz mittels Übergang zur Parallelfäche im Abstand $\frac{1}{2}(l_1 + l_2)$ einsehen].

K. Leichtweiß.

Semin, Ferruh: Sur une classe de surfaces W . Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A 21, 55—59 (1956).

Unter Verwendung der Formeln des Verf. (dies. Zbl. 58, 149) wird bewiesen: Auf einer Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes gibt es dann und nur

dann ein Tschebyscheff-Netz, dessen Kurven konstante Normalkrümmung a besitzen, wenn die Fläche eine W -Fläche mit der Relation $2Ha - K = a^2 + b^2$ ist (H mittlere Krümmung, K Gaußsche Krümmung, b eine Konstante). Die Netzkurven haben dann die konstante geodätische Windung $\pm b$. Die Netztangenten bilden mit den konjugierten einen konstanten Winkel. Die Verbindungsgerade der Krümmungsmittelpunkte der Netzkurven steht senkrecht auf der Tangente jeder Flächenkurve, längs der K konstant ist. *M. Barner.*

Voss, K.: Einige differentialgeometrische Kongruenzsätze für geschlossene Flächen und Hyperflächen. *Math. Ann.* 131, 180—218 (1956).

Ausgangspunkt der Untersuchungen des Verf. bildet die Frage, ob es außer den Kugeln noch andere geschlossene, orientierte Flächen des dreidimensionalen Raums gibt, zwischen deren Hauptkrümmungen k_1 und k_2 mit $k_1 \geq k_2$ eine monoton abnehmende Relation $k_2 = f(k_1)$ (f zweimal stetig differenzierbar, $f'(k_1) < 0$) besteht. Dies ist von A. D. Alexandrov und S. S. Chern für (positiv gekrümmte) Eiflächen und von H. Hopf für analytische Flächen vom Geschlecht 0 in negativem Sinne entschieden worden. Verf. gelingt es nun, die Nichtexistenz einer derartigen analytischen, geschlossenen W -Fläche mit einem Geschlecht größer als 0 in dem Falle nachzuweisen, daß dieselbe als in einer Richtung und in allen dazu benachbarten Richtungen (in einem näher präzisierten engeren Sinne) konvex vorausgesetzt wird. Er legt dabei seinen Untersuchungen allgemeiner die Parallelabbildung T einer Fläche F auf eine Fläche \bar{F} zugrunde, bei welcher die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte p und \bar{p} eine feste Richtung haben, und beweist mit Hilfe einer Verfeinerung des Maximumprinzips der Lösungen einer elliptischen Differentialgleichung den Translationssatz: Besteht zwischen zwei orientierten, geschlossenen, analytischen Flächen eine solche (die Orientierung erhaltende) analytische, reguläre Parallelabbildung T , daß für eine stetig differenzierbare Funktion U der mittleren Krümmung H und der Gaußschen Krümmung K mit $\frac{1}{4} U_H^2 + H U_H U_K + K U_K^2 > 0$ $U(H(p), K(p)) = U(H(\bar{p}), K(\bar{p}))$ gilt, so ist T Teil einer Translation. Dieser Satz läßt sich für eine in einer Richtung konvexe, geschlossene Fläche in naheliegender Weise zu einem Symmetriesatz spezialisieren. Außerdem gilt der Translationssatz nebst Folgerungen auch für zwei dreimal stetig differenzierbare Eihyperflächen im $(n+1)$ -dimensionalen Raum, wenn eine der n elementarsymmetrischen Funktionen H_v ihrer Hauptkrümmungen in entsprechenden Punkten dieselben Werte annimmt (im Fall der mittleren Krümmung genügt schon im wesentlichen die Geschlossenheit der Hyperflächen). Dies wird mit Hilfe von Integralformeln gezeigt, wie sie bei der linearen Variation der Krümmungsintegrale $\int H_{v-1} dA$ in konstanter Richtung auftreten (dA = Oberflächenelement, $H_0 = 1$, $1 \leq v \leq n$). Schließlich werden Verallgemeinerungen für berandete Flächen und ein Unitätssatz für elliptische Differentialgleichungen bewiesen. *K. Leichtweiß.*

Rembs, E.: Ein Biegungsproblem mit negativer Charakteristik. *Monatsh. Math.* 60, 333—336 (1956).

In früheren Arbeiten hat Verf. die Randvorgaben δk , δa und $\delta \varphi$ bei infinitesimalen Verbiegungen mit Hilfe des Drehrisses behandelt. Er untersucht in der vorliegenden Note Randwertprobleme der infinitesimalen Flächenverbiegung, bei denen der Zusatz- oder Geschwindigkeitsvektor \mathfrak{z} (oder $\delta \mathfrak{z}$) im Vordergrund steht. Die zugehörigen Differentialgleichungen, die von T. Radó und Minagawa für Starrheitsfragen benutzt worden sind, beziehen sich auf die drei Größen $a = (\mathfrak{z} \mathfrak{x}_u)$, $b = (\mathfrak{z} \mathfrak{x}_v)$, $c = (\mathfrak{z} \xi)$ und nehmen in isothermen Parametern die Form an:

$$a_u - b_v = \alpha a + \beta b, \quad a_v + b_u = \gamma a + \delta b.$$

Fordert man am Rand $(\mathfrak{z} \mathfrak{x}') = 0$, d. h. werden die Randpunkte alle senkrecht zum Rand verschoben, so bestimmt sich die Charakteristik dieses Problems zu -1 . Nach der Theorie folgt daraus der Satz: Es gibt bis auf einen konstanten Faktor

genau eine infinitesimale Verbiegung einer konvexen Fläche mit nicht ebenem Rand, bei der alle Randpunkte sich senkrecht zur Randkurve verschieben und ein beliebiger Punkt im Innern eine Verschiebung senkrecht zur Fläche erfährt. Die Verschiebung der Randpunkte muß dann senkrecht zur Schmiegebene der Randkurve sein. Im Falle einer ebenen Randkurve ist die Fläche bei der angegebenen Randbedingung starr.

K. P. Grotemeyer.

Alekseev, N. I.: Über eine einparametrische Schar von stratifizierbaren orthogonalen Paaren. Untersuchungen über ausgewählte Fragen der Analysis und Geometrie, 20—29 (1956) [Russisch].

Verf. behandelte in seiner Dissertation 1943 die Theorie der Paare schichtbarer orthogonaler Kongruenzen des euklidischen dreidimensionalen Raumes nach der Methode von Cartan. Es seien g_1 und g_2 zusammengehörige Geraden der beiden Kongruenzen; der Ursprung O des bewegten Bezugssystems wird in den Mittelpunkt des Gemeinlotes g_3 von g_1 und g_2 gelegt, die Richtungen des orthonormierten Dreibeins sind zu g_1, g_2, g_3 parallel. In der vorliegenden Arbeit untersucht Verf. verschiedene Sonderfälle, die in seiner Dissertation unbeachtet blieben; dabei wird jeweils angegeben, von wievielen Funktionen (einer Veränderlichen) die Figur abhängt; in einigen Fällen werden auch geometrische Eigenschaften genannt. So wird auf die folgende Figur, die von vier willkürlichen Funktionen einer Variablen abhängt, hingewiesen: Es gibt eine einparametrische Schar weiterer schichtbarer Paare mit dem Gemeinlot g_3 und dem Mittelpunkt O , deren zusammengehörende Erzeugenden zu den beiden Hauptrichtungen der Kongruenz g_3 parallel sind.

M. Barner.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Gasapina, Umberto: Sulle calotte a centri allineati appartenenti a superficie algebriche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 21, 262—267 (1956).

Fra le calotte del 2° ordine a centri allineati appartenenti a una superficie algebrica di S_3 passano tre relazioni indipendenti, già determinate dal Bompiani in un conveniente riferimento (questo Zbl. 24, 279). L'A. dà ora a dette relazioni una forma che pone in rilievo alcuni caratteri metrici del sistema calotte-retta senza l'intervento di particolari riferimenti.

P. Buzano.

Mihăilescu, Tiberiu: Sur le repère normal projectif d'une surface. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 1, Nr. 2, 107—132 (1956).

Nello spazio proiettivo 3-dimensionale siano: S_0 una superficie non rigata; A_0 un punto di S_0 ; A_3 il vertice del tetraedro di Wilczynski opposto al piano tangente in A_0 ad S_0 ; A_1, A_2 gli ulteriori vertici appartenenti al tetraedro (sulle tangenti asintotiche); S_i ($i = 1, 2, 3$) le superficie descritte dai punti A_i ; Σ_i le superficie involupate dalle facce del tetraedro (al variare di A_0 su S_0); B_i il punto di contatto con Σ_i corrispondente ad A_0 . Si fa uno studio sistematico delle relazioni delle superficie S_0, S_i con S_0 . Qualora sussistano particolari relazioni fra S_0, S_i, Σ_i si ottengono nuove caratterizzazioni di classi note di superficie (p. es. superficie isoterma-asintotiche di Fubini, di Demoulin-Godeaux, R_0 , ect.) e anche di nuove classi (sempre appartenenti all'insieme delle superficie proiettivamente deformabili). Scarsa bibliografia.

E. Bompiani.

Lennes, G. et O. Rozet: Sur les congruences W . Bull. Soc. roy. Sci. Liège 25, 341—346 (1956).

Gli AA. considerano una superficie (x) di S_3 riferita alle asintotiche, in coordinate di Wilczynski e attaccano al punto x il tetraedro normale di Cartan: introdotta una congruenza W di cui (x) sia una falda focale, determinano l'altra falda (\bar{x}) e per entrambe calcolano gli invarianti proiettivi.

P. Buzano.

Denis, F.: Sur certaines congruences de droites. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 25, 383—386 (1956).

Mittels der Kleinschen Hyperflächen II. Ordnung bestimmt Verf. einige kennzeichnende geometrische Eigenschaften der von Chem (dies. Zbl. 10, 418) betrachteten Strahlensysteme mit einer verschwindenden Invarianten. *W. Haack.*

Kovancov, N. I.: Das kanonische Tetraeder eines Geradenkomplexes im projektiven Raume. Ukrain. mat. Žurn. 8, 140—158 (1956) [Russisch].

Zu einer dreiparametrischen Geradengesamtheit (einem Geradenkomplex) des dreidimensionalen projektiven Raumes wird in der vorliegenden Arbeit nach der Methode des repère mobile von E. Cartan ein lokal invariantes Bezugssystem konstruiert (für ältere Arbeiten vergleiche man: P. Menétré, Les variétés de l'espace réglé, Paris 1923). Die Festlegung der Punkte des Bezugssystems wird nicht nur analytisch begründet, sondern es werden auch die einzelnen Schritte geometrisch interpretiert. — Die singulären Punkte einer (ebenen) Kurve, deren Tangenten dem Komplex angehören, heißen Inflexionspunkte oder Inflexionszentren. Auf einem Komplexstrahl gibt es vier Inflexionszentren, die teilweise oder alle zusammenfallen können. Jedem Punkt eines Komplexstrahls ist eine Ebene zugeordnet, seine assoziierte Ebene. Auf jeder Erzeugenden einer Regelfläche, deren Geraden dem Komplex angehören, gibt es zwei Punkte, die Oskulationspunkte, deren assoziierte Ebenen mit den Tangentenebenen an die Regelfläche zusammenfallen. Die Oskulationspunkte beschreiben auf der Regelfläche die Oskulationskurven. Sind die Oskulationskurven Asymptotenlinien, so heißt die Regelfläche Hauptfläche. Durch einen Komplexstrahl gehen drei Hauptflächen. Die Oskulationspunkte einer Hauptfläche trennen zwei Paare von Inflexionszentren harmonisch. Das Bezugstetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ wird dann wie folgt festgelegt: Verf. zeichnet eine der Hauptflächen aus und nennt sie Koordinatenfläche. Die Punkte A_1, A_2 werden in die Oskulationspunkte dieser ausgezeichneten Hauptfläche und A_3 bzw. A_4 auf die Tangenten an die Oskulationskurven gelegt. Um A_3 bzw. A_4 auf diesen Tangenten völlig festzulegen, verwendet man die Schmiegequadratik Q der Koordinatenfläche und die Schmiegequadraten Q_1, Q_2 der beiden anderen Hauptflächen zu den beiden Bedingungen: 1. Man verlangt, daß $A_1 A_4$ und $A_2 A_3$ reziproke Polaren bezüglich Q sind. 2. Q_1, Q_2 schneiden die Ebene $A_1 A_2 A_3$ außer in $A_1 A_2$ noch in den Geraden g_1, g_2 durch A_2 , ferner die Ebene $A_1 A_2 A_4$ außer in $A_1 A_2$ in den Geraden h_1, h_2 durch A_1 . Man verlangt, daß die beiden Doppelverhältnisse der Geraden $g_1, g_2, A_2 A_1, A_2 A_3$ bzw. $h_1, h_2, A_1 A_2, A_1 A_4$ denselben Wert haben. Durch diese Festlegung des Bezugssystems sind ausgeschlossen die speziellen Komplexe, d. h. die Tangentenkomplexe einer Fläche und Komplexe mit zusammenfallenden Inflexionszentren. — Die einfachste Invariante hängt unmittelbar mit dem Doppelverhältnis der vier Inflexionszentren zusammen. *M. Barner u. D. Roether.*

Gallo, Elisa: I sistemi $[G]$ e il secondo teorema di Moutard. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 15, 329—342 (1956).

L'A. considera un sistema (G) piano, ossia definito da un'equazione differenziale del tipo: $y''' = G(x, y, y') y'' + H(x, y, y') y'^2$ e prova anzitutto che fra le curve del sistema contenenti un dato $E_1 \equiv (x, y, y')$ ve ne sono generalmente tre aventi un contatto del 5° ordine con la loro conica osculatrice nell' E_1 . L'A. determina poi le particolari forme che devono assumere le funzioni G e H affinché le tre curve suddette si riducano a due sole o ad una: nel 1° caso fra le soluzioni vi sono quelle che corrispondono ai sistemi sezionali per i quali l'esistenza delle due particolari coniche osculatrici discende dal 2° teorema di Moutard. *P. Buzano.*

Gallo, Elisa: Alcune proprietà dei sistemi (G) nello spazio. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 557—565 (1956).

I sistemi considerati sono quelli definiti dalle equazioni differenziali: $y''' = y''(A y'' + B z'' + C)$, $z''' = z''(A y'' + B z'' + C)$ con A, B, C funzioni di

x, y, z, y', z' e sono costituiti da ∞^6 curve piane: le curve del sistema appartenenti a un dato piano formano un systema (G) piano, già studiato da Terracini [Univ. nac. Tucumán Revista, Ser. A. 6, 255—261 (1948) e questo Zbl. 36, 63]. Se si fissa un elemento del 1° ordine Aa e per esso si fa passare un piano α , il systema (G) piano che si determina in α definisce un “punto satellite” P e una “retta satellite” p : se si fa variare α attorno ad a , il punto P non varia, mentre la retta p varia in un piano π che l'A. chiama “piano satellite”. Il sistema $AaP\pi$ si chiama 3-elemento spaziale e le equazioni considerate definiscono una ∞^5 di detti elementi. In maniera analoga la “retta centropolare” di Aa in α , al variare di α attorno ad a genera il “piano centropolare” mentre la “conica di doppio contatto” genera una “quadrica di doppio contatto” a cui risultano bitangenti tutte le coniche osculatrici in A alle curve integrali contenenti l'elemento Aa .
P. Buzano.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Tonolo, Angelo: Sugli spazi riemanniani normali ad n dimensioni. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 26, 328—333 (1956).

The conditions given by the author for a riemannian space V_3 to be normal (Tonolo, s. this Zbl. 35, 380) are generalized to $n > 3$ dimensions. The form of the given conditions is different of that given by Schouten (s. this Zbl. 44, 186) for the same problem.
L. A. Santaló.

Lichnerowicz, André: Espaces homogènes riemanniens et réductibilité. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1410—1413 (1956).

Verf. beweist im Anschluß an Untersuchungen von Nomizu [dies. Zbl. 52, 175 und Amer. J. Math. 76, 33—65 (1954)] folgenden Satz: Es sei ein homogener Riemannscher Raum $V_m = G/H$ (G effektiv, H kompakt) gegeben. (1) Wenn H zusammenhängend und G einfach zusammenhängend ist, dann besitzt G eine zusammenhängende invariante Untergruppe, nämlich das direkte Produkt von Untergruppen Γ^a , die transitiv und effektiv auf den irreduziblen Komponenten W^a der Riemannschen Mannigfaltigkeit V_m operieren. (2) Wenn G halbeinfach ist, läßt die eingeschränkte homogene Holonomiegruppe σ des Riemannschen Zusammenhanges keinen Vektor invariant. Unter den Voraussetzungen von (1) ist dann jedes Γ^a halbeinfach. (3) Wenn G einfach ist, ist die Gruppe σ irreduzibel. — Für weitergehende Untersuchungen über Riemannsche homogene Räume siehe: K. Nomizu (dies. Zbl. 67, 145, 1. Referat). Teil (1) dieses Satzes ist falsch, vgl. das folgende Referat und die dort zitierte Arbeit von Kostant.
W. Klingenberg.

Lichnerowicz, André: Sur la réductibilité des espaces homogènes riemanniens. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 640—642 (1956).

Verf. ergänzt seine Note (s. vorstehendes Ref.) über einfach zusammenhängende homogene Riemannsche Räume $V_m = G/H$ (G effektiv und H kompakt, zusammenhängend) und bringt insbesondere eine stichhaltige Formulierung des ersten Teils des dort angegebenen Satzes [die ursprüngliche Formulierung des Satzes ist falsch, siehe B. Kostant, Nagoya math. J. 12, 31—54 (1957)]: Die lineare Isotropiegruppe \tilde{H} von G/H definiert eine vollständig reduzible Darstellung von H in dem Tangentialraum T an den „Ursprung“ x_0 . Sei (*) $T = \sum Q^b + \sum Q^c$ ($\dim Q^b = 1$; $\dim Q^c > 1$) eine Zerlegung von T in irreduzible Komponenten nach de Rham. \tilde{H} induziert auf jedem Q^b die identische Darstellung und auf jedem Q^c eine irreduzible Darstellung. Man sagt, daß \tilde{H} eine inäquivalente Darstellung ist, wenn für jedes Paar Q^d, Q^l der Zerlegung (*) von T die induzierten Darstellungen von \tilde{H} nicht äquivalent sind. Satz: $V_m = G/H$ sei einfach zusammenhängend, G sei kompakt und \tilde{H} sei eine inäquivalente Darstellung. Dann besitzt G eine zusammen-

hängende invariante Untergruppe, nämlich das direkte Produkt von Untergruppen I^a , die die durch $x \in V_m$ verlaufenden irreduziblen Komponenten $W^a(x)$ von V_m invariant lassen und effektiv und transitiv auf $W^a(x_0)$ operieren. *W. Klingenberg.*

Floras, Milt.: Sur les lignes géodésiques des espaces de Riemann. Bull. Soc. math. Grèce 30, 77—83, français. Zusammenfassung 83—84 (1956) [Griechisch].

In this paper the author gives at first a geometrical interpretation of the well known condition, which must be satisfied by the functions, which occur in the study of the partial differential equation defining the geodesic lines of a Riemannian space. In the sequel he gives a generalisation (under certain conditions) of the well known theorem concerning the geodesic lines of the hypersurfaces, general solutions of the above mentioned partial differential equation. *A. Mallios.*

Vrănceanu, G.: Sur les invariants intrinsèques d'un espace non holonome. An. Univ. C. I. Parhon București, Ser. Ști. Natur. Nr. 11, 9—22, russ. und français. Zusammenfassung 22—23 (1956) [Rumänisch].

Étant donné un espace riemannien non holonome V_n^m défini par un système de Pfaff (S) et une métrique riemannienne donnée sur la variété, Haimovici a montré (J. Math. pur. appl., IX. Sér. 25 (1946), 291—305 (1947)] qu'on peut lui associer d'une manière invariante un espace riemannien V_n dans lequel le V_n^m est défini d'une manière rigide (v. Vrănceanu, voir ce Zbl. 5, 181), si S est de rang maximum et à système dérivé nul. Dans le premier chapitre, l'A. donne une autre démonstration de ce théorème. Dans le Chap. II, il s'occupe du même problème dans le cas où S , tout en étant de rang maximum, a des systèmes dérivés. Le système S étant (1) $ds^\alpha = 0$ ($\alpha, \beta = m+1, \dots, n$) et la métrique $(ds^1)^2 + \dots + (ds^m)^2 \pmod{ds^\alpha}$, les pfaffiens ds^a ($a = 1, \dots, n$) sont donnés à moins le groupe $d\bar{s}^h = c_k^h ds^k + c_\alpha^h ds^\alpha$ ($h, k = 1, \dots, m$), $d\bar{s}^\alpha = c_\beta^\alpha ds^\beta$, la matrice des c_k^h étant orthogonale. Par des conditions de nature intrinsèque, on peut d'abord amener ce groupe à avoir la matrice des c_b^a à la forme

$$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1l} \\ 0 & M_{22} & \dots & M_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_{cl} \end{vmatrix}$$

où M_{ij} sont des matrices orthogonales. L'auteur énonce ensuite le théorème suivant : si (1) n'a pas de combinaison intégrable et si certains systèmes invariants qu'on peut lui associer sont de rang maximum, on peut, par d'autres conditions de nature invariante, arriver à avoir $M_{ij} = 0$ pour $i < j$. Ce qui résout le problème.

M. Haimovici.

Lichnerowicz, André: Sur les automorphismes de certaines variétés kähleriennes. Bull. Soc. math. Belgique 8, 3—14 (1956).

Rappel de résultats connus, dont certains sont dus à l'A., sur le plus grand groupe connexe d'automorphismes des variétés kaehlériennes qui sont espaces d'Einstein. Dans le cas homogène, ce groupe est relié à un système irréductible de fonctions fondamentales de la variété. *P. Lelong.*

Martinelli, Enzo: Sulla curvatura delle superficie caratteristiche in una varietà kähleriana. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 21, 267—274 (1956).

Calcul d'une „courbure caractéristique“ pour les sous-variétés analytiques complexes, images par une application analytique $z_k = f_k(t)$ (t paramètre complexe), d'un espace $C^1(t)$, dans une variété à métrique kaehlérienne V_{2n} . La définition de la courbure caractéristique est donnée par $K_c = \lim (\Delta\varphi/\Delta s)$ où $\Delta\varphi$ est la variation du vecteur complexe unitaire tangent à l'image de $C^1(t)$. Quand V_{2n} est l'espace

C^n , on a $K_c + K = 0$, K étant la courbure gaussienne de S_2 image de $C^1(t)$. Dans le cas général on a: $K_i - K_e + K_c^2 = 0$, où K_i est la courbure gaussienne de S_2 immergée dans V_{2n} , et K_e est la courbure riemannienne. P. Lelong.

Obata, Morio: Affine transformations in an almost complex manifold with a natural affine connection. J. math. Soc. Japan 8, 345—362 (1956).

Dans une variété irréductible presque complexe, si le plus grand groupe connexe de transformations affines ne conserve pas la structure presque complexe, alors la dimension étant $2n$, n est pair et le groupe d'holonomie homogène est contenu dans la représentation réelle du groupe linéaire quaternionien; l'A. généralise ainsi des résultats de A. Lichnerowicz, J. A. Schouten et K. Yano. La démonstration utilise la forme explicite d'une matrice réelle qui commute avec les éléments d'un groupe irréductible de matrices réelles. P. Lelong.

Goldberg, S. I.: On pseudo-harmonic and pseudo-Killing vectors in metric manifolds with torsion. Ann. of Math., II. Ser. 64, 364—373 (1956).

The methods of Yano and Bochner on Curvature and Betti Numbers (this Zbl. 51, 394) are extended on a metric compact orientable differentiable manifold with a non-symmetric metric connection E_{jk}^i . There are a lot of Bochner-Yano theorems also in this case: If a certain matrix is positive definite, then there do not exist harmonic (Killing-) tensors of certain kinds. Most interesting in this connection are the relations between the Riemann and Ricci tensors derived from the metric and $E_{jkl}^i = \partial E_{jk}^i / \partial x^l - \partial E_{jl}^i / \partial x^k + E_{jk}^s E_{sl}^i - E_{jl}^s E_{sk}^i$ and $E_{ik} = E_{ikj}^j$. Pseudo-Einstein spaces are defined by $E_{jk} + E_{kj} = \lambda g_{jk}$ (the author has no examples of $E \neq 0$). $\lambda = 2 E_{ij}^i / n$, but E_{ij}^i is in general not a constant (a condition is given for E to be constant). None the less, most of the important features of the Bochner-Yano theory of Einstein spaces carry over to the general case, with some new results in the same direction. H. Guggenheimer.

Egorov, I. P.: Equi-affine spaces of the third lacunarity. Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 1007—1010 (1956) [Russisch].

The author demonstrates the following theorems: 1. A necessary and sufficient condition in order that a projective-euclidean space should admit at least k fields of absolute parallel vectors ξ_α^i ($\alpha = 1, \dots, k$) is the existence of such a projective-cartesian system of coordinates in which the function of connection ψ reduces to the form $\psi = \psi(x^{k+1}, \dots, x^n)$. 2. There does not exist an equi-affine space A_n admitting a complete group of motions G_r of order r which satisfies the inequalities $n^2 - 2n + 5 < r < n^2 - n - 2$. 3. A necessary and sufficient condition in order that an equi-affine space A_n should be a space of the third lacunarity (i. e. a space admitting G_r , where $n^2 - n - 2 \leq r \leq n^2 - n + 1$) is the presence in this space of just $n - 2$ fields of absolute parallel contravariant vectors. 4. An equi-projective space of given rank $n - k$ of the tensor R_{ij} admitting k fields of absolute parallel vectors ξ_α^i ($\alpha = 1, \dots, k$) must possess motion groups G_r , where $k(n + 1) \leq r \leq \frac{1}{2}n(n + 1) + \frac{1}{2}k(k + 1)$. 5. All symmetric tensors d_{ij} of the second order and of rank $\varrho > 1$ which are invariant with respect to motions of an affinely connected space A_n admitting motion groups G_r ($r = n^2 - n - \varrho n + \frac{1}{2}\varrho(\varrho - 1)$) must be covariantly constant. 6. An equi-projective space of given rank $\varrho > 1$ of the tensor R_{ij} is of maximal motions when and only when it is symmetric.

Su Buchin.

Mocanu, P.: Espaces partiellement projectifs. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 1, Nr. 1, 67—98 (1956).

In einem affinzusammenhängenden Raum A_n sind die autoparallelen Kurven durch die Differentialgleichungen $\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}$ bestimmt. Die autoparallelen

Kurven können auch durch endliche Gleichungen von der Form $F^\alpha(x^1, \dots, x^n, c^1, \dots, c^{2n-2}) = 0$ ($\alpha = 1, \dots, n-1$) angegeben werden. Wenn in einem geeigneten Koordinatensystem $n-k$ dieser Gleichungen in den Veränderlichen x^i linear sind, so nennt Verf. den Raum A_n ($n-k$)-fach projektiv. Diese Räume bezeichnet man mit P_n^{n-k} . Wenn in einem P_n^{n-k} die k -dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten, die die autoparallelen Kurven enthalten, einen gemeinsamen Punkt haben, so nennt Verf. den Raum P_n^{n-k} einen Kaganschen Raum. Es werden nun die Bedingungen bestimmt, die notwendig und hinreichend sind dafür, daß ein affinzusammenhängender Raum A_n ein $(n-k)$ -fach projektiver Raum bzw. ein Kaganscher Raum sei. Neben dem allgemeinen Fall werden die Fälle $k = 1, 2, 3$ ausführlich behandelt. Es werden auch Bedingungen angegeben, die notwendig und hinreichend sind dafür, daß in einem allgemeinen Raum P_n^{n-2} die autoparallelen Kurven Parabeln seien.

A. Moór.

Jeger, M.: Über Inflexionen in projektiven Zusammenhängen. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 15, 201—224 (1956).

In Verallgemeinerung früherer Ergebnisse (s. Besprechung in diesem Zbl. 40, 92; 55, 401) betrachtet Verf. Paare von projektiven Zusammenhängen (p. Z.) in einer Ebene. Es gibt an jeder Stelle i. A. drei Richtungen, für die sich Geodätische beider p. Z. in zweiter Ordnung berühren („Inflexionsrichtungen“); gibt es mehr, so ist jede Richtung Inflexionsrichtung („Inflexionsnabel“). Die Inflexionsrichtungen erzeugen die Inflexionskurven, die im allgemeinen ein 3-Gewebe bilden („Inflexionsgewebe“). Jedes 3-Gewebe ist Inflexionsgewebe zweier geeignet gewählter p. Z.; einer davon kann beliebig gewählt werden, der andere hängt dann noch von einer Funktion zweier Veränderlichen ab. Eine gemeinsame Geodätische beider p. Z. ist stets Inflexionskurve; ist eine Inflexionskurve in einem der p. Z. geodätisch, so auch im andern. — Als Anwendung kann man eine Abbildung A einer projektiven Ebene in sich betrachten, Geodätische beider p. Z. seien dann die Geraden und ihre Bildkurven, das zugehörige Inflexionsgewebe kann der Abbildung A zugeordnet werden. Hat eine Abbildung, die zwei Geradenbüschel in sich überführt, ein Inflexionsgewebe, so ist dies ein Sechseckgewebe.

G. Bol.

Kawaguchi, Akitsugu: On the theory of non-linear connections. II: Theory of Minkowski spaces and of non-linear connections in a Finsler space. Tensor, n. Ser. 6, 165—199 (1956).

(Teil I s. dies. Zbl. 48, 404.) — Die Finsler-Räume werden als lokal Minkowskische Räume betrachtet. Im ersten Teil wird ein Abriß der Minkowskischen Geometrie gegeben, in dem unter anderem verschiedene Kennzeichnungen der Euklidischen Geometrie innerhalb der Minkowskischen enthalten sind. Im zweiten Teil werden die gewonnenen Ergebnisse dazu benutzt, die verschiedenen kanonischen Zusammenhänge herzuleiten, die man für Finsler-Räume kennt.

W. Klingenberg.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Montel, Paul: Sur la géométrie finie et les travaux de M. C. Juel. Centre Belge Rech. math., Colloque Questions Réalité en Géométrie, Liège du 23 au 26 mai 1955, 9—26 (1956).

Wiederabdruck einer früheren Arbeit [Bull. Sci. math., II. Sér. 48, 109—128 (1924)]. Es handelt sich um einen Bericht über Arbeiten von Juel, insbesondere betr. die ebenen Kurven von 3. und 4. (Realitäts-)Ordnung sowie betr. die Flächen 3. Ordnung; ferner wird berichtet über Arbeiten von Mukhopadhyaya betr. den Vierecksatz und seine Verallgemeinerungen sowie über einschlägige Arbeiten ande-

rer Autoren (insbesondere Brusotti, A. Kneser, Mohrmann, Montel und J. von Sz.-Nagy).

Otto Haupt.

Fabricius-Bjerre, Fr.: Eine Darstellung von J. Hjelmslevs projektiver Infinitesimalgeometrie. Acta math. 95, 111—154 (1956).

Veröffentlichung aus dem Nachlaß von J. Hjelmslev, in der ein früher von diesem mitgeteilter Ansatz (s. dies. Zbl. 21, 156) an Hand vieler grundlegender Fragen der Differentialgeometrie weiter durchgeführt wird. Das Prinzip ist, infinitesimale Fragen nur unter Benutzung des Konvergenzbegriffes, aber ohne Differentialrechnung zu behandeln, indem zur Kennzeichnung der infinitesimalen Elemente der verschiedenen Ordnungen geeignete Punktkonfigurationen verwendet werden. Seien etwa zwei eineindeutig und stetig aufeinander bezogene Kurvenbogen k_0 und k eines projektiven Raumes gegeben, T und P , T' und P' seien Paare entsprechender Punkte, für $T' \rightarrow T$, $P' \rightarrow P$ haben die Sehnen TT' und PP' die Grenzlagen t und p (Tangenten). Auf jeder Sehne TT' wähle man zwei von T verschiedene Punkte T'_1 und T'_2 , die beim Grenzübergang die von T und voneinander verschiedene Grenzlagen T_1 und T_2 haben, ebenso habe P'_2 auf PP' die Grenzlage $P'_2 \neq P$. Bestimmt man dann P'_1 auf PP' so, daß die Doppelverhältnisse $D(P P' P'_1 P'_2)$ und $D(T T' T'_1 T'_2)$ gleich sind, so fragt es sich, ob P'_1 einer Grenzlage zustrebt und ob diese von P und P_2 verschieden ist; im ersten Fall heißt die Abbildung von k_0 auf k in T infinitesimal projektiv, im zweiten das Tripel („Element“) $P P_1 P_2$ ordinär. Die Unabhängigkeit dieser Begriffe von den beliebigen Hilfspunkten läßt sich leicht feststellen, da beide Elemente $T T_1 T_2$ und $P P_1 P_2$ gleichzeitig projektiv transformiert werden mit Doppelpunkt in T bzw. P („Elationen“). Dieser Ansatz läßt sich dualisieren und verallgemeinern. Bildet man etwa jeden Punkt P' einer Kurve ab auf die zugehörige Sekante PP' (P fester Kurvenpunkt), so gehört zu jedem Paar P_1, P_2 von P verschiedener Punkte der Tangente m in P und einer von m verschiedenen Geraden m_2 durch P im allgemeinen eine weitere m_1 , die Elemente $P P_1 P_2, m m_1 m_2$ kennzeichnen dann die Krümmung von k in P . Mit diesen Hilfsmitteln werden behandelt: Krümmung und Torsion von Kurven, Hüllkurven von Kurvensystemen, berührende Kurven, Satz von Meusnier, sich schneidende Kurven, Krümmung in einem Punkt einer geradlinigen Fläche, Krümmung längs einer Erzeugenden einer geradlinigen Fläche, in einem Punkt einer beliebigen Fläche. Für Einzelheiten muß auf die Arbeit verwiesen werden.

G. Bol.

Heppes, A.: Beweis einer Vermutung von A. Vázsonyi. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 7, 465—466, russ. Zusammenfassg. 466 (1956).

Ein verschiedentlich von P. Erdős erörtertes Problem handelt von der maximalen Anzahl $N_k(n)$ verschiedener Punktepaare, die in einer aus n Punkten bestehenden Menge des k -dimensionalen euklidischen Raumes vom Durchmesser 1 den Abstand 1 aufweisen, und also den Durchmesser der Punktmenge realisieren können. Es ist $N_1(n) = 1$ ($n \geq 2$) und $N_2(n) = n$ ($n \geq 3$). Nach einer von A. Vázsonyi stammenden Vermutung gilt $N_3(n) = 2n - 2$ ($n \geq 4$). Ihre Richtigkeit wurde nun vom Verf. mit Verwendung des Eulerschen Polyedersatzes bewiesen. — Ähnliche Beweise wurden ungefähr gleichzeitig und unabhängig auch von S. Straszewicz (dies. Zbl. 77, 142) und von B. Grünbaum [Bull. Research Council Israel, Sect. A. 6, 77—78 (1956)] gefunden. — Ein Korollar des Satzes von Vázsonyi ist die Gültigkeit der Borsukschen Vermutung für dreidimensionale endliche Punktmenge (vgl. das nachstehende Referat).

H. Hadwiger.

Heppes, A. und P. Révész: Zum Borsukschen Zerteilungsproblem. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 7, 159—162, russ. Zusammenfassg. 162 (1956).

Mit Verwendung des Eulerschen Polyedersatzes wird bewiesen, daß eine endliche Punktmenge des dreidimensionalen euklidischen Raumes in vier Teilmengen

von kleinerem Durchmesser zerlegt werden kann. Damit ist auch ein einfacher Beweis des Borsukschen Satzes für konvexe Polyeder des gewöhnlichen Raumes gefunden (vgl. das nachstehende Referat). *H. Hadwiger.*

Grünbaum, B.: A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions. Proc. Cambridge philos. Soc. **53**, 776—778 (1957).

Die von K. Borsuk (dies. Zbl. **6**, 424) stammende Vermutung, wonach eine Punktmenge des k -dimensionalen euklidischen Raumes in $k + 1$ Teilmengen von kleinerem Durchmesser zerlegt werden kann, ist heute für $k \leq 3$ erwiesen. Im Falle $k = 3$ wurde ein komplizierter Beweis von H. G. Eggleston (dies. Zbl. **65**, 153) aufgestellt. — Verf. gibt nun im nämlichen Fall einen bemerkenswert kurzen Beweis. Genauer: Eine Punktmenge A im E_3 vom Durchmesser $D(A) = 1$ läßt sich in vier Teilmengen A_i ($i = 1, \dots, 4$) zerlegen, so daß $D(A_i) \leq 0,9887 \dots$ ausfällt, wodurch die Borsuksche Behauptung $D(A_i) < 1$ verschärft ist. Der vom Verf. entdeckte Beweis verläuft nach der Deckelmethode. Das reguläre Oktaeder T mit $D(T) = \sqrt{3}$ ist bekanntlich ein universeller Deckel, mit dem sich also jede Punktmenge A mit $D(A) = 1$ überdecken läßt. Durch passende Reduktion von T gewinnt Verf. einen neuen Deckel S mit $D(S) = \sqrt{2}$. Dieses konvexe Polyeder S wird sodann in vier Teilpolyeder S_i ($i = 1, \dots, 4$) zerlegt, wobei sich $D(S_i) \leq 0,9887 \dots$ errechnen läßt. Damit resultiert dann die gewünschte Zerlegung von A . *H. Hadwiger.*

Vincensini, Paul: Sur l'application d'une méthode géométrique à l'étude de certains ensembles de corps convexes. Centre Belge Rech. Math., Colloque Questions Réalité en Géométrie, Liège du 23 au 26 mai 1955, 77—94 (1956).

Verf. erörtert das von ihm bereits in einer früher veröffentlichten Schrift (dies. Zbl. **21**, 356) angewandte Verfahren der Minkowskischen Linearkombination konvexer Körper und ihrer Extrapolation. Mit Verwendung kurzer Symbolik für Minkowskis Operationen handelt es sich um die lineare Schar $C_\lambda = (1 - \lambda) A + \lambda B$ [$0 \leq \lambda \leq 1$] die von zwei konvexen Körpern A und B des E_n aufgespannt wird, und um die Frage ihrer konvexen Fortsetzung in die Parameterbereiche $\lambda < 0$ und $\lambda > 1$. Die Diskussion stützt sich auf die Existenz der $n - 1$ stetig vorausgesetzten Hauptkrümmungen auf den Randflächen von A und B . — Bezeichnet \tilde{A} den durch Spiegelung am Ursprung aus A hervorgehenden Körper, so ist mit $A^* = \frac{1}{2}(A + \tilde{A})$ der durch Zentralsymmetrisierung aus A resultierende Körper mit Mittelpunkt gegeben; $2A^*$ ist dann der Vektorkörper von A , der in den Untersuchungen des Verf. eine besondere Rolle spielt. So wird u. a. gezeigt, daß ein beliebiger konvexer Körper C eine Darstellung $C = \nu(D - D^*) + C^*$ gestattet, wo D^* ein willkürlich wählbarer Körper mit Mittelpunkt und D eine Lösung $X = D$ der Bedingung $X^* = D^*$ ist. — Bedeutet $\sigma(A, n)$ die Summe der mittleren Krümmungen in den beiden antipodischen Randpunkten von A , die den beiden Stützebenen an A der Richtung n angehören, so gilt $\sigma(A, n) = \sigma(A^*, n)$ für jede Richtung n . Ist beispielsweise A von konstanter Breite, also A^* eine Kugel, so resultiert die Konstanz der Summe der mittleren Krümmungen in antipodischen Punkten von A . — Abschließend wird noch eine schon früher (dies. Zbl. **23**, 171) vom Verf. gegebene Verallgemeinerung des Helly-Radonschen Satzes begründet, die sich bei Verwendung der Minkowskischen Summe als einfaches Korollar des genannten klassischen Satzes ergibt. *H. Hadwiger.*

Naumann, Herbert: Beliebige konvexe Polytope als Schnitte und Projektionen höherdimensionaler Würfel, Simplexes und Maßpolytope. Math. Z. **65**, 91—103 (1956).

Es bezeichne P_n ein eigentliches konvexes Polyeder des n -dimensionalen euklidischen Raumes E_n mit q Seitenflächen und p Eckpunkten. Ferner sollen α_m , β_m und γ_m das reguläre $(m + 1)$ -Zell, 2^m -Zell und $2m$ -Zell bedeuten. Die sich auf die im Titel angedeuteten Fragen beziehenden Ergebnisse des Verf. sind folgende: (1a) P_n läßt sich als Schnitt $P_n = \gamma_m \cap E_n$ [$m \leq 2^n(n + 1)q$] eines Hyperwürfels

darstellen; (1b) P_n läßt sich als Projektion $P_n = \beta_m | E_n$ [$m \leq 2^n(n+1)p$] eines Hyperoktaeders darstellen. Für Mittelpunktspolyeder mit einer zusätzlich geforderten Symmetrie (Hauptpolytope), die beispielsweise für $n=2$ die regulären $4k$ -Ecke und für $n>2$ die regulären Polyeder mit Ausnahme der Simplexes α_n aufweisen, ergeben sich die Verschärfungen: (2a) $P_n = \gamma_m \cap E_n$ [$m \leq \frac{1}{2}q$]; (2b) $P_n = \beta_m | E_n$ [$m \leq \frac{1}{2}p$], wobei spezielle Mittelpunktsschnitte und orthogonale Parallelprojektionen, die gewünschte Darstellung liefern. Für Simplexes ausreichend hoher Dimension \bar{m} gelten analoge Erzeugungen: (3a) $P_n = \alpha_m \cap E_n$ und (3b) $P_n = \alpha_m | E_n$, wobei für Mittelpunktspolyeder Schwerpunktschnitte und orthogonale Parallelprojektionen in Betracht fallen. Insbesondere läßt sich der n -dimensionale Würfel als Schwerpunktschnitt $\gamma_n = \alpha_{2n-1} \cap E_n$ aus einem $(2n-1)$ -dimensionalen regulären Simplex gewinnen. Die Aussagen (a) und (b) entsprechen sich vermöge einer vom Verf. ausgenutzten Dualität, die sich durch Übergang von Punktz zu Ebenenkoordinaten ergibt.

H. Hadwiger.

Fejes Tóth, L.: Characterisation of the nine regular polyhedra by extremum properties. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 7, 31—48, russ. Zusammenfassg. 48 (1956).

Um Sternpolyeder zweckmäßig systematisch zu erfassen, müssen ihre Bauelemente geeignet fixiert und gezählt werden. Verf. orientiert hierüber und erklärt die mit passender Vielfachheit zu bewertenden Flächenzahlen f , Kantenzahlen k und Eckenzahlen e , welche die verallgemeinerte Eulersche Formel $f - k + e = 2d$ erfüllen, wobei die natürliche Zahl d eine dem Sternpolyeder zugeordnete Dichte bezeichnet. — Für die passend gemessene Oberfläche F eines einer Einheitskugel umschriebenen Sternpolyeders gilt die Ungleichung

$$(a) \quad F \geq k \sin(\pi f/k) \{ \operatorname{tg}^2(\pi f/2k) \operatorname{tg}^2(\pi e/2k) - 1 \},$$

wobei Gleichheit für die neun regulären Sternpolyeder (fünf platonische Körper und vier Sternpolyeder von Kepler-Poinsot) gilt. Bezeichnen R und r Umkugelradius und Inkugelradius, so gilt

$$(b) \quad R/r \geq \operatorname{tg}(\pi f/2k) \operatorname{tg}(\pi e/2k),$$

wo Gleichheit wieder für reguläre Sternpolyeder in Frage kommt. Die bemerkenswerten Ergebnisse (a) und (b) sind im speziellen Fall konvexer Polyeder schon früher vom Verf. gefunden worden [vgl. Verf., Lagerungen in der Ebene, (dies. Zbl. 52, 184), S. 123 (1) und S. 130 (1)]. Auch in höherdimensionalen Räumen nimmt der Radienquotient R/r für die regulären konvexen Polytope unter allen konvexen Polyedern, die mit den regulären „topologisch gleichwertig“ sind, den kleinst möglichen Wert an.

H. Hadwiger.

Zalgaller, V. A.: Über die Deformationen eines Vielecks auf der Sphäre. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 5 (71), 177—178 (1956) [Russisch].

Verf. beweist folgenden Satz: Zwei auf einer offenen Halbkugel gelegene sphärische Polygone P und P' sind kongruent, wenn sie gleiche Seitenzahl besitzen und sich so aufeinander abbilden lassen, daß entsprechende Seiten gleiche Längen haben und die Winkel des Polygons P die entsprechenden von P' nicht übertreffen. Der Beweis dafür ist recht einfach und wird mit Hilfe der von A. D. Aleksandrov in seinen Werken [vor allem in dem Buch „Innere Geometrie der konvexen Flächen“ (dies. Zbl. 38, 352)] dargelegten Methode des Schneidens und Zusammenklebens durchgeführt.

W. Burau.

Giger, Hans: Beiträge zur Theorie von Stützfunktion und Radius. — Die Radialflächen. Commentarii math. Helvet. 30, 241—256 (1956).

Gewisse Gesimsflächen mit Einschluß der Drehflächen werden zusammenfassend als Radialflächen bezeichnet. Die Hauptergebnisse der Arbeit liegen in der Bestätigung der Scherrerschen Vermutung, daß die einzigen Radialeflächen die konvexen

Rotationsflächen sind, und in dem Beweis des Satzes, daß das Katenoid die einzige Radialminimalfläche ist. Die Entwicklung der für die Untersuchung notwendigen Hilfsformeln geschieht im Anschluß an die Schindlersche analytische Darstellung einer anschaulichen Konstruktion der Radialflächen. Zum Schluß werden die Radialflächen konstanter mittlerer Krümmung und die Nabelpunkte auf Radialflächen studiert. *F. Löbell.*

Derry, Douglas: Convex hulls of simple space curves. Canadian J. Math. 8, 383—388 (1956).

Die konvexe Hülle einer Kurve A_n der Ordnung n im n -dimensionalen euklidischen Raum besteht aus allen Punkten der r -Simplexe mit $r+1$ Ecken auf A_n ($n=2r+1$ oder $n=2r$). Für $n=3$ wurde das Resultat von Egerváry (dies. Zbl. 38, 102) angegeben. *H. Gericke.*

Bredon, Glen E.: The isoperimetric problem in the plane. Math. Mag. 30, 63—69 (1956).

Verf. entwickelt einen Beweis des ebenen klassischen isoperimetrischen Problems mit Hilfe unendlicher Prozesse, der ähnlich arbeitet, wie der klassische Beweis von Lebesgue aus dem Jahre 1914. Leider wird der vom Verf. gegebene Beweis weder mit dem Lebesgueschen noch mit dem Carathéodory-Studyschen Beweis konfrontiert. Vielleicht dürfte hier noch bemerkt werden, daß für das klassische isoperimetrische Problem unter Zugrundelegung konvexer Kurven eine Reihe von kurzen Beweisen existiert, die keinen Gebrauch von Grenzprozessen machen. Diejenigen dieser Beweise, die vor 1936 erschienen sind, sind in der klassischen Monographie von Bonnesen und Fenchel zu finden. *A. Dinghas.*

Santaló, L. A.: Sur la mesure des espaces linéaires qui coupent un corps convexe et problèmes qui s'y rattachent. Centre Belge Rech. math., Colloque Questions Réalité en Géométrie, Liège du 23 au 26 mai 1955, 177—190 (1956).

Nach einer gewandten Einführung der integralgeometrischen Dichten dL_r und dQ für r -dimensionale Unterräume L_r und Körper Q , die im n -dimensionalen euklidischen Raum E_n beweglich sind, werden einige einschlägige Formeln der Integralgeometrie kurz begründet. Bezeichnen $H_r = \int dL_r$ das Maß der L_r , die den konvexen Körper Q treffen, W_r das r -te Minkowskische Quermaßintegral von Q , $M_r = \binom{n-1}{r}^{-1} \int S_r d\sigma$ das Integral der mittleren Krümmung der Ordnung r , das sich durch Integration der r -ten elementarsymmetrischen Funktion S_r der $n-1$ Hauptkrümmungen der als hinreichend regulär vorausgesetzten Randflächen σ von Q ergibt, so sind die im ersten Teil gewonnenen integralgeometrischen Beziehungen durch $H_r = c_{rn} W_r$ ($0 \leq r \leq n$) und $n H_r = c_{rn} M_r$ ($1 \leq r \leq n$) gegeben, wobei die Hilfskonstante sich nach dem Ansatz

$$c_{rn} = \binom{n}{r} \frac{\omega_{n-1} \dots \omega_{n-r}}{\omega_1 \dots \omega_r}$$

berechnen läßt, wo ω_i das Volumen der i -dimensionalen Einheitskugel bedeutet. — Durch Anwendung einer interessanten Methode, die im Falle $n=3$ eine bekannte integralgeometrische Herleitung einer klassischen Ungleichung Minkowskis ermöglicht, erzielt Verf. die Verallgemeinerung $M_{n-2}^2 - n \omega_n M_{n-3} \geq 0$, also eine spezielle Ungleichung der Fenchelschen Gruppe. — Im zweiten Teil wird die kinematische Hauptformel

$$\int \chi(Q_0 \cap Q_1) dQ_1 = c_n \sum_0^n \binom{n}{r} W_r^0 W_{n-r}^1$$

erklärt, wo Q_0 ein ruhender, Q_1 ein beweglicher Körper mit ausreichend regulärer Randfläche und χ die Charakteristik von Euler-Poincaré bezeichnen und

$2c_n = n! \omega_1 \dots \omega_{n-1}$ ist. Als Anwendung wird der Mittelwert N der Anzahl N von Würfeln bzw. Kugeln ermittelt, die ein beweglicher Körper Q in einem den E_n vollständig überdeckenden Würfel- bzw. Kugelgitter trifft. Als Korollarien ergeben sich Abschätzungen für die Anzahl kongruenter Würfel bzw. Kugeln, die ausreichen, um einen Körper vom Zusammenhang der Kugel zu überdecken. Beispielsweise läßt sich ein solcher Körper im gewöhnlichen Raum ($n = 3$) stets durch $N \leq 1 + (3/3/4 \pi) M + (9/16) F + (3/3/8) V$ Einheitskugeln überdecken, wobei M , F und V das Integral der mittleren Krümmung, die Oberfläche und das Volumen bezeichnen. Verf. bemerkt hierzu, daß sich die Abschätzung durch Heranziehung günstigerer Kugelgitter verbessern läßt. In der Tat findet sich im bekannten Buch von L. Fejes-Tóth (dies. Zbl. 52, 184) S. 186 (2) eine schärfere Schätzung.

H. Hadwiger.

Stoka, Marius I.: Sur la mesure de l'ensemble des coniques du plan. An. Univ. C. I. Parhon Bucureşti, Ser. Şti. Natur. Nr. 11, 41—43, russ. und französ. Zusammenfassung 44 (1956) [Rumänisch].

En partant d'une définition donnée par l'A. même dans une note antérieure (ce Zbl. 66, 408), il prouve que la mesure de l'ensemble des coniques du plan dont l'équation est écrite sous la forme

$$(a_1 x + a_2 y + a_3)^2 + (a_4 y + a_5)^2 = 1,$$

est la même que la mesure du groupe défini par les formules $x' = a_1 x + a_2 y + a_3$, $y' = a_4 y + a_5$.

Gh. Th. Gheorghiu.

Topologie:

Ribeiro de Albuquerque, José: Zusammenhangseigenschaften in abstrakten Räumen. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 5, 5—62 (1956) [Portugiesisch].

Ausgehend von den Fréchet'schen Definitionen („Les espaces abstraits“, Paris 1928, S. 175) zusammenhängender, bzw. verketteter Mengen werden, insbesondere im Anschluß an das Buch von A. Appert und Ky Fan „Espaces topologiques intermédiaires“ (dies. Zbl. 45, 439), verschiedene Zusammenhangseigenschaften als Grundbegriffe in der Definition abstrakter topologischer Räume aufgefaßt und erforscht. Einige Sätze von Fréchet und Appert werden verallgemeinert, verschiedene, insbesondere drei nach F. Riesz benannte Bedingungen betr. abgeleiteter Mengen untersucht und Beispiele gegeben. Das Hauptziel der Arbeit ist die Lösung zweier von Ky Fan (l. c., S. 112) formulierter Probleme: 1) Welche Bedingungen muß eine vorgegebene Familie F von Untermengen einer gegebenen abstrakten Menge P erfüllen, damit es zumindest eine Schließungsoperation (Topologisierung) \bar{E} in P gebe, so daß F genau die Familie der zusammenhängenden Mengen wird? 2) Welche Bedingungen muß ein Raum erfüllen, damit die Vorgabe der zusammenhängenden Mengen die Topologie vollständig bestimme? Die vom Verf. gefundenen Bedingungen sind zu kompliziert, um hier wiedergegeben zu werden. Schließlich betrachtet Verf. die Variante dieser Probleme, bei der „Zusammenhang“ durch „Verkettung“ ersetzt ist.

D. Tamari.

Iséki, Kiyoshi: Notes on topological spaces. I: A theorem on uniform spaces. Proc. Japan Acad. 32, 27—28 (1956).

Ein separierter, uniformer Raum X heiße absolut abgeschlossen, wenn X abgeschlossen ist in jedem separierten uniformen Raum Y , in welchen X topologisch eingebettet ist; X heiße uniform vollständig, wenn ein vollständiger, separierter, uniformer Raum Y existiert, derart, daß X eine G_δ -Menge in Y ist. Verf. gibt einfache Kennzeichnungen dieser Raumtypen an.

G. Nöbeling.

Arens, Richard F. and James Eells jr.: On embedding uniform and topological spaces. *Pacific J. Math.* 6, 397—403 (1956).

Jeder separierte, uniforme Raum kann als abgeschlossene Menge in einen separierten, konvexen, linearen Raum eingebettet werden (diese Einbettung ist ein in beiden Richtungen gleichmäßig stetiger Homöomorphismus). Jeder metrische Raum kann als abgeschlossene Menge in einen normierten linearen Raum isometrisch eingebettet werden.

G. Nöbeling.

Rudin, Walter: Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications. *Duke math. J.* 23, 409—419; Note of correction. *Ibidem.* 633 (1956).

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, ob für einen vollständig regulären homogenen Raum X (d. h. die topologischen Automorphismen von X wirken transitiv auf X) stets auch der Raum $X^* = \beta X - X$ homogen ist. Insbesondere wird der Fall $X = N$, der diskrete abzählbare Raum, betrachtet. Die ersten beiden Abschnitte bringen Sätze über die Ultrafilter auf N , die größtenteils bekannt (wenngleich nicht immer als solche vermerkt) sind. Sodann wird gezeigt, daß jede offen-abgeschlossene Menge von N^* aus allen Ultrafiltern besteht, die eine passende (unendliche) Teilmenge von N enthalten, was die Existenz eines Homöomorphismus zwischen je zwei solchen Mengen nach sich zieht, und daß jeder nichtleere Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen von N^* ein nichtleeres Inneres besitzt. Aus diesen Ergebnissen wird dann unter Annahme der Kontinuums-hypothese (KH) hergeleitet, daß die P -Punkte von N^* eine dichte Teilmenge der Mächtigkeit 2^c bilden. (Ein Punkt x eines Raumes heißt P -Punkt, wenn jeder abzählbare Durchschnitt von Umgebungen von x wieder eine Umgebung von x ist.) Der Beweis beruht darauf, daß KH gestattet, die Gesamtheit der offen-abgeschlossenen Mengen von N^* mit den abzählbaren Ordnungszahlen zu indizieren, woraus durch Induktion die Umgebungsbasis für einen P -Punkt definiert wird. Es ergibt sich dann leicht, daß N^* neben P -Punkten auch andere Punkte besitzt und somit nicht homogen sein kann. Als Folgerung wird bewiesen, daß unter Annahme von KH X^* nicht homogen sein kann bei beliebigem lokal-kompakten normalen Raum X , der eine „gegen Unendlich“ konvergierende abzählbare Folge besitzt (daß X hierbei normal sein muß, war ursprünglich übersehen worden und wird in der Korrekturnote richtiggestellt). Als letztes wird, wiederum mittels KH, gezeigt, daß die topologischen Automorphismen von N^* transitiv wirken auf die Menge der P -Punkte von N^* . Dies wird erreicht durch Angabe, mittels Induktion, einer ordnungstreu Permutation der Booleschen Algebra der offen-abgeschlossenen Mengen von N^* , die zu zwei beliebig vorgegebenen P -Punkten die zugehörigen Umgebungsbasen ineinander überführt.

B. Banaschewski.

McAuley, Louis F.: On decomposition of continua into aposyndetic continua. *Trans. Amer. math. Soc.* 81, 74—91 (1956).

Verf. gibt eine Verallgemeinerung der Methoden von Zerlegungen kompakter, metrischer Kontinuen nach R. L. Moore [Foundations of point set theory (vgl. dies. Zbl. 5, 54) and G. T. Whyburn (Analytic topology, New York 1942)]. Statt stetiger Kurven tritt hier der Begriff des aposyndetischen Kontinuums von F. B. Jones (vgl. dies. Zbl. 25, 240) auf. Für einen Punkt p eines Kontinuums M bezeichne man mit $M(p)$ die Menge aller Punkte x von M derart, daß es kein unabzählbares, nicht separiertes (vgl. Whyburn, l. c.) Mengensystem $M(p, x)$ gibt mit der Eigenschaft, daß p und x durch jedes Element von $M(p, x)$ getrennt werden. H sei ferner das System aller Mengen $M(p)$ in M . Für $x \in g \in H$ bezeichne man mit $S(g, x)$ die Menge aller Punkte y von g derart, daß es kein Untersystem C von H gibt mit folgenden Eigenschaften: (1) Die Vereinigungsmenge C^* der Elemente von C ist Summe einer endlichen Anzahl von Kontinuen, (2) C^* trennt x von y in M . Dann werden die Sätze bewiesen: Das System H ist eine stetige Zerlegung von M (im Sinne des Verf.) und der dazugehörige Zerlegungsraum ist ein zusammenhängender, aposyn-

detischer, separabler, Hausdorffscher Raum. Dasselbe gilt auch für das System G aller Mengen $S(g, x)$. Eine Anzahl aufklärender Beispiele und Anwendungen der Theorie auf den Fall des kompakten, metrischen Kontinuums werden gegeben.

H. Terasaka.

Anderson, R. D.: Atomic decompositions of continua. *Duke math. J.* **23**, 507—514 (1956).

Sei S ein Kontinuum in einem Hilbertschen Würfel R oder einer triangulierbaren Euklidischen Mannigfaltigkeit R mit $\dim R \geq 2$, k positiv ganz $\leq \infty$ und $< \dim R$, falls $\dim R < \infty$, und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein Kontinuum M in R mit $\dim M = k$ und eine offene Abbildung Θ von M auf S mit: (1) für jeden Punkt $p \in S$ ist $\Theta^{-1}(p)$ ein Kontinuum, welches eine k -Zelle enthält und dessen Hausdorffsche Distanz von p kleiner als ε ist; (2) das System E der $\Theta^{-1}(p)$ ist eine stetige, atomare Zerlegung von M in Kontinua (atomar heißt: für jedes Kontinuum $K \subseteq M$ und jedes Kontinuum $L \in E$ mit $K \cap L \neq \emptyset$ ist $K \subseteq L$ oder $L \subset K$). *G. Nöbeling.*

Anderson, R. D.: One-dimensional continuous curves. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **42**, 760—762 (1956).

Voranzeige von Resultaten, von denen einige separat bewiesen sind, s. R. D. Anderson, dies. *Zbl.* **79**, 166, und *Ann. of Math.*, II. Ser. **67**, 313—324 (1958).

H. Terasaka.

Anderson, R. D.: Open mappings of compact continua. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **42**, 347—349 (1956).

Zusammenstellung von Resultaten über die Existenz monotoner, offener Abbildungen kompakter, metrischer Kontinua, die größtenteils im *Bull. Amer. Math. Soc.* bereits mitgeteilt sind. Die Beweise sollen später publiziert werden.

G. Nöbeling.

Anderson, R. D.: Some remarks on totally disconnected sections of monotone open mappings. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* **4**, 329—330 (1956).

Es seien X und Y kompakte, metrische Kontinua, f eine monotone, offene Abbildung von X auf Y derart, daß $f^{-1}(y)$ nicht ausgeartet ist für jedes $y \in Y$. Verf. nennt eine abgeschlossene, total diskontinuierliche Menge $K \subset X$ Sektion von (X, f, Y) , falls $f(K) = Y$ gilt. In Anlehnung an einen Satz von Kelley [*Trans. Amer. math. Soc.* **52**, 22—36 (1942)] beweist Verf., daß, falls X 1-dimensional oder Teilmenge einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist, (X, f, Y) eine Sektion zuläßt, aber daß, falls $n \geq 2$ oder $n > 3$ ist, die entsprechenden Sätze nicht notwendigerweise gelten.

H. Terasaka.

Whitehead, J. H. C.: Duality in topology. *J. London math. Soc.* **31**, 134—148 (1956).

Cet article présente d'abord la notion de „dualité“ sous sa forme fonctorielle la plus générale, puis dans le cas particulier de la théorie des groupes (dualité de Pontrjagin); en topologie, la dualité apparaît dans la théorie des variétés (dualité de Poincaré et d'Alexander), exposée ici jusque dans ses raffinements les plus modernes. Puis l'A. expose l'introduction de la dualité en homotopie, grâce à la S -théorie qu'il a introduite avec S. Spanier. Un appendice traite de la notion de $(n+1)$ -coconnexité: un espace X est $(n+1)$ -coconnexe, si toute application de X dans la sphère S^q , $q > n$, est inessentielle. Une abondante bibliographie termine l'exposé.

R. Thom.

Bourgin, D. G.: Un indice dei punti uniti. I—III. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **19**, 435—440; **20**, 43—48; **21**, 395—400 (1956).

Ziel der drei Arbeiten des Verf. ist es, die Grundlagen einer Theorie der Indizes von Fixpunkten einer Abbildung $f: X \rightarrow X$ zu entwickeln, wobei X ein kompakter separierter ANR ist. Für derartige Räume läßt sich die Čechsche Homologietheorie

mit rationalen Koeffizienten und der von f induzierte kanonische Homomorphismus mit Hilfe endlicher approximierender Polytope beschreiben. In Letzteren ist aber eine Indextheorie leicht zu erhalten. Verf. beweist u. a.: 1. Die Lefschetzsche Zahl $L(f)$ von f ist gleich der Lefschetzschen Zahl $L(f_a)$, wobei f_a die durch f im Nerv einer hinreichend feinen Überdeckung a von X induzierte Abbildung ist. 2. G sei eine offene Teilmenge von X , die auf ihrem Rand keinen Fixpunkt enthält. Dann ist für die im Nerv einer hinreichend feinen Überdeckung induzierte Abbildung die Lefschetzsche Zahl über einer durch G bestimmten offenen Teilmenge des Nerv unabhängig von der Wahl des Nerv. Schließlich werden noch andere Raumtypen als ANR betrachtet. Verf. zeigt: 3. Ist X ein aNR (zur Def. vgl. Bourgin III) und ist die m -te Iterierte von f homotop zur konstanten Abbildung, so besitzt f einen Fixpunkt. Weiter wird eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Fixpunktes in einer offenen Teilmenge von X , welche auf dem Rande keinen Fixpunkt besitzt, angegeben.

H. Roehrl.

Weier, Josef: Über offene Euklidische Mengen. Math. Nachr. 15, 293—298 (1956).

Vor.: U ist eine zusammenhängende, offene Menge des Euklidischen E_n , f eine stetige Abbildung von U in sich, p ein Punkt von U , z eine ganze Zahl. Beh.: Es existiert eine zu f homotope, stetige Abbildung von U in sich derart, daß p der einzige Fixpunkt von g und der Poincaré-Brouwersche Index von p gleich z ist.

G. Nöbeling.

Wada, Hidekazu: On the space of mappings of a sphere on itself. Ann. of Math., II. Ser. 64, 420—435 (1956).

Let G_n^* be the space of mappings of an n -sphere S^n ($n \geq 1$) on itself, F_n^* the subspace of mappings fixing a point of S^n , and G_n and F_n the components of G_n^* and F_n^* respectively containing the identical mapping of S^n . It is then proved that G_n and $S^n \times F_n$ (respectively G_n^* and $S^n \times F_n^*$) have the same homotopy type if and only if $\pi_{2n+1}(S^{n+1})$ contains an element with Hopf invariant 1. Wu Wen-tsun.

Conner, P. E.: Concerning the action of a finite group. Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 349—351 (1956).

Es sei G eine endliche Gruppe der Ordnung r , welche auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit X wirkt. Unter gewissen „vernünftigen“ Voraussetzungen über X und die Wirkung von G in X gilt für die Eulersche Charakteristik χ des Quotientenraumes X/G die Formel

$$(1) \quad \chi(X/G) = \frac{1}{r} \sum_{g \in G} \chi(X_g),$$

wobei X_g die Fixpunktmenge von g in X bedeutet. Diese Formel wurde von S. Lang benutzt, um in der vorliegenden Situation den Formalismus der Artinschen L -Reihen einzuführen (s. dies. Zbl. 71, 158).

P. Roquette.

Fary, István: Valeurs critiques et algèbres spectrales d'une application. Ann. of Math., II. Ser. 63, 437—490 (1956).

Ce travail est principalement consacré à l'étude du terme E_2 de l'algèbre spectrale d'une application continue, dans un cas plus général que celui des espaces fibrés. L'A. se place dans le cadre de la théorie de Leray (voir la récitation dans ce Zbl. 38, 363) qu'il résume en partie; il s'agit donc de cohomologie d'Alexander-Spanier à supports compacts d'espaces localement compacts. Il utilise à la fois la définition des faisceaux de Leray et une notion (faisceaux ponctuellement isomorphes) directement inspirée par la définition de Lazard-Cartan des faisceaux; mais ces distinctions sont en fait sans grande importance, on pourrait aussi utiliser directement cette dernière, ce qui du reste permet des simplifications dans l'exposé de la théorie de Leray elle-même, et c'est elle qui sera sous-entendue dans la suite de cette analyse. Soit \mathfrak{A} un faisceau sur l'espace X . Un point $x \in X$ est dit non critique pour \mathfrak{A} s'il

possède un voisinage au-dessus duquel \mathfrak{U} est isomorphe à un faisceau constant, critique sinon. On définit par récurrence sur $n \geq 0$ une suite décroissante de fermés X_i où $X_0 = X$ et où X_{i+1} est l'ensemble des points critiques de la restriction de \mathfrak{U} à X_i . L'A. se place principalement dans le cas où $\bigcap_i X_i$ est vide (sinon il définit une suite transfinie d'ensembles critiques). Soient Y un deuxième espace, $f: X \rightarrow Y$ une application continue et \mathfrak{F} l'image du faisceau de cohomologie de X ; \mathfrak{F} est donc défini par le préfaisceau qui associe à $U \subset Y$ l'algèbre $H^*(f^{-1}U, \mathfrak{U})$, où A est un anneau de coefficients. On suppose que les ensembles critiques Y_i ($i \geq 0$) de \mathfrak{F} ont une intersection vide et on pose $X_i = f^{-1}Y_i$. Le résultat principal de ce Mémoire (Théorème 2) dit qu'il existe une algèbre spectrale (E_r) dans laquelle E_∞ est l'algèbre graduée associée à $H^*(X, A)$ convenablement filtrée et où E_2 a les propriétés suivantes:

$$E_2^{p,q} = \sum_{i \geq 0} H^{p+i}(Y_i - Y_{i+1}, \mathfrak{F}_i^{q-i})$$

(\mathfrak{F}_i restriction de \mathfrak{F} à $Y_i - Y_{i+1}$); la restriction de d_2 à $H^a(Y_i - Y_{i+1}, \mathfrak{F}_i^b)$ est la somme de deux différentielles d' , d'' , la première est la différentielle interne de la suite spectrale de $f: X_i - X_{i+1} \rightarrow Y_i - Y_{i+1}$, la seconde est l'opérateur cobord $d'': H^a(Y_i - Y_{i+1}, \mathfrak{F}_i^b) \rightarrow H^{a+1}(Y_{i-1} - Y_i, \mathfrak{F}_{i-1}^b)$ de la suite de cohomologie à supports compacts de $Y_{i-1} - Y_{i+1}$ modulo $Y_i - Y_{i+1}$. Les différentielles ont les propriétés usuelles par rapport aux degrés p , q et $p + q$ représente aussi le degré total, mais $E_2^{p,q}$ peut être non nul pour certaines valeurs négatives de p ou q . Si les espaces Y_i sont de plus localement connexes (l'A. dit alors que f est de type d'homologie simple), la suite spectrale de f restreinte à $X_i - X_{i+1}$ se comporte comme celle d'une fibration localement triviale. Pour démontrer ce théorème, on considère la couverture fine $f^{-1}L \circ K \circ \mathfrak{U}$ (\mathfrak{U} faisceau constant isomorphe à $X \times A$, K (resp. L) couverture fine de X (resp. Y)) que l'on filtre par les sous-complexes $C_p = \sum_{a-b \geq p} f^{-1}L^a \circ K \circ \mathfrak{U}_b$ où \mathfrak{U}_b est le sous-faisceau de \mathfrak{U} , égal à \mathfrak{U} sur $X - X_{b+1}$, à zéro sur X_{b+1} . A. Borel.

Murakami, Shingo: Algebraic study of fundamental characteristic classes of sphere bundles. Osaka math. J. 8, 187—224 (1956).

Let E be the bundle space of a differentiable principal fiber bundle over a compact differentiable manifold M with a compact Lie group G as its structural group. Denote by $I(G) = \sum I^k(G)$ the graded algebra of all real polynomial functions (i. e. functions represented as polynomials in the coordinates of a coordinate system of g) on the Lie algebra g of G invariant under the adjoint group of G . Introduce a connection in the principal bundle (E, M, G) with curvature form Ω , then for any $F \in I^k(G)$, $F(\Omega)$ may be considered as a closed differential form of degree $2k$ over the base manifold M and represents thus an element $\chi(F)$ of the real coefficient cohomology algebra $H(M)$ of M . By Weil, Cartan, and others, χ defines a homomorphism of the algebra $I(G)$ into the algebra $H(M)$ which is independent of the connection chosen and for which the image is no other than the (real coefficient) characteristic algebra of the given bundle as defined by Chern (Cf. e. g. H. Cartan, this Zbl. 45, 306). Based on this theory of Weil-Cartan, the author gives a detailed study of the structure of the characteristic algebra of a principal bundle (E, M, G) in case G is an orthogonal group, a rotation group, or a unitary group, by determining explicitly in each case systems of generators of the algebra $I(G)$. As an illustration of this method let us consider e. g. the case $G = O(n)$, the orthogonal group in the euclidean n -space R^n . With respect to a fixed coordinate system in R^n , the Lie algebra $\mathfrak{o}(n)$ of $O(n)$ may then be represented as the algebra of all real skew-symmetric matrices $\xi = (\xi_{ij})$ with $\xi_{ij} + \xi_{ji} = 0$. For any two vectors $u = (u_1, \dots, u_n)$ and $v = (v_1, \dots, v_n) \in R^n$, define $\xi(u, v) \in \mathfrak{o}(n)$ by $\xi(u, v) = (\frac{1}{2}(u_j v_i - v_j u_i))_{i,j=1, \dots, n}$. Given an invariant polynomial function $F \in I^k(G)$ in polar form, let F' be the real-valued $2k$ -linear function on R^n defined by $F'(u^1, v^1, \dots, u^k, v^k) = F(\xi(u^1, v^1), \dots,$

$\xi(u^k, v^k)$, where $u^i, v^i \in R^n$. Then $F \rightarrow F'$ establishes an isomorphism of $I(G)$ onto a certain subalgebra of the algebra of all multilinear real-valued functions on R^n which are invariant under $O(n)$. The first main theorem on vector invariants for the group $O(n)$ permits then to prove in a purely algebraic manner that $I(G)$ is generated by $m = [n/2]$ polynomial functions P_2, P_4, \dots, P_{2m} given by

$$P_k(\xi) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi} \varepsilon_{\pi} \sum_{\alpha_i=1}^n \xi_{\alpha_1 \alpha_{\pi(1)}} \cdots \xi_{\alpha_k \alpha_{\pi(k)}},$$

in which π sums over all permutations of the k integers $\{1, \dots, k\}$, ε_{π} is the signature of π , and $\xi = (\xi_{ij}) \in o(n)$. The classes $P^{4l} = \frac{1}{(2\pi)^{2l}} \chi(P_{2l}) \in H(M)$ are then no other than the usual real coefficient Pontrjagin classes of the bundle (E, M, G) . The (real) Chern classes in case G is a unitary group and the (real) Pontrjagin classes as well as the (real) Euler-Poincaré class in case G is a rotation group may be introduced in the same manner. By studying various natural homomorphisms between these classical Lie groups, many known formulas and duality theorems about these fundamental (real) characteristic classes (Cf. e. g. W. T. Wu et G. Reeb, Sur les espaces fibrés et les variétés feuilletées, this Zbl. 49, 126) are then proved in quite a simple manner.

Wu Wen-tsun.

Bott, Raoul: An application of the Morse theory to the topology of Lie-groups.
Bull. Soc. math. France 84, 251—281 (1956).

Cette analyse fait suite à celle d'une Note antérieure de l'A. (ce Zbl. 57, 22) annonçant les principaux résultats démontrés dans le présent Mémoire, et elle se bornera à résumer les points qui n'ont pas été couverts dans l'analyse précédente. Ce travail a pour objet l'étude de l'homologie du quotient $G/C(X)$ d'un groupe de Lie compact connexe, simplement-connexe G par le centralisateur d'un tore et de l'espace $\Omega(G, N, P)$ des arcs de G joignant un point P aux points d'une classe d'éléments conjugués de G . Ces espaces sont sans torsion, ont des nombres de Betti nuls en dimensions impaires et leur série de Poincaré se décrit à partir du diagramme des éléments singuliers d'un tore maximal de G . Ces résultats sont obtenus à l'aide de la théorie de Morse, qui est mise en relations avec les éléments singuliers par l'intermédiaire de la notion d'action „variationnellement complète“ d'un groupe d'isométries d'une variété riemannienne. Soient M une variété riemannienne, complète, N une sous-variété, P un point de M non sur N , et $S(M, N, P)$ l'ensemble des segments de géodésiques perpendiculaires à N en leur point initial, et se terminant en P . On note $\Lambda^N(s)$, ($s \in S(M, N, P)$), l'espace des champs de Jacobi sur s , nuls en P , et définis à partir de familles à un paramètre de géodésiques coupant N orthogonalement en leur point initial. L'indice $\lambda^N(s)$ est la somme des dimensions des espaces $\Lambda^N(s')$ où s' parcourt les segments de s joignant l'origine de s à un point intérieur de s . Supposons que P soit régulier pour N , c'est à dire que $\Lambda^N(s) = (0)$ pour tout $s \in S(M, N, P)$ et que $S(M, N, P)$ ne contienne qu'un nombre fini de géodésiques ayant un indice donné. Si tous les indices sont pairs, l'A. déduit des inégalités de Morse que la série de Morse

$$M(M, N, P) = \sum t^{\lambda^N(s)} \quad (s \in S(M, N, P)),$$

est égale à la série de Poincaré $P(\Omega, k, t) = \sum \dim H_i(\Omega, k) t^i$ de l'espace $\Omega = \Omega(M, N, P)$ des arcs de M joignant P aux points de N , pour l'homologie à coefficients dans un corps k . Il s'ensuit alors que Ω est sans torsion et a des nombres de Betti nuls en dimensions impaires. Soit G un groupe d'isométries de M et supposons que N soit une orbite de G . Un point $P \in M$ est alors régulier pour N s'il fait partie d'une orbite de dimension maximum. L'A. dit que l'action de G est variationnellement complète si, quels que soient l'orbite N , le point P non sur N , et $s \in S(M, N, P)$, tout élément de $\Lambda^N(s)$ est la restriction à s d'un élément de l'algèbre de Lie de G . Dans

ce cas, si P est régulier, on a $\lambda^N(s) = \sum \delta(Q)$ où Q parcourt les points intérieurs de s et où $\delta(Q)$ est la différence entre les dimensions des groupes de stabilité de Q et P . L'A. montre que l'action de G est variationnellement complète lorsque M est égal à G , muni d'une métrique bi-invariante, ou à l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G munie d'une métrique euclidienne invariante par le groupe adjoint, G opérant dans les deux cas par les automorphismes intérieurs $\text{Ad } g : x \rightarrow gxg^{-1}$. Dans le premier cas P est sur une orbite de dimension maximum s'il fait partie d'un seul tore maximal T , et l'on voit immédiatement que les éléments de $S(M, N, P)$ sont les géodésiques de T joignant P aux points de $N \cap T$. La relation indiquée plus haut entre dimensions de groupes de stabilité et indices montre alors que les indices sont pairs et conduit à une expression du polynôme de Poincaré, déjà mentionnée dans l'analyse précitée, pour le cas particulier de l'espace Ω_G des lacets de G . Si $M = \mathfrak{g}$, on obtient de manière similaire le polynôme de Poincaré de $\Omega(\mathfrak{g}, N, P)$; mais ici cet espace a même homologie que N puisque M est l'espace euclidien et N , qui est l'orbite d'un élément $X \in \mathfrak{g}$ par le groupe adjoint, s'identifie au quotient $G/C(X)$ de G par le centralisateur de X . — On sait que l'algèbre de cohomologie réelle de G est une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs $2m_1 - 1, \dots, 2m_l - 1$ ($l = \text{rang de } G$). Il s'ensuit que $H^*(\Omega_G, R)$ est une algèbre de polynômes à générateurs de degrés $2(m_1 - 1), \dots, 2(m_l - 1)$; en comparant cela avec le polynôme de Poincaré obtenu par la méthode décrite plus haut, l'A. déduit une relation entre les m_i , les coefficients de la racine dominante et ceux de la somme des racines, qui lui permet de donner une nouvelle méthode de calcul des m_i pour les trois derniers groupes exceptionnels. [Errata dans (3.8), remplacer $\dim N$ par $\dim M$. Dans la partie (a) du théorème de la page 275, remplacer l'inclusion par les deux inclusions $(\Omega^-(a_i) \cup w_i, \Omega^-(a_i)) \rightarrow (\Omega(l_i), \Omega^-(a_i))$; $(\Omega(l_i), \Omega(l_{i-1})) \rightarrow (\Omega(l_i), \Omega^-(a_i))$.] A. Borel.

Bernard, Daniel: Sur les G -structures complexes. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 1821—1824 (1956).

In the first part of this Note, the author uses his theory of equivalence of fiber structures (this Zbl. 71, 388) to solve the problem: when is a structure, defined by a structure group G that is a subgroup of $\text{GL}(n, C)$, equivalent to a structure defined by a subgroup of $\text{GL}(n, R)$. The notion of equivalence is given a precise meaning in that one asks that the repères of the two structures should be images of one-another by a fixed (complex) transformation. The problem is solved completely for the most important cases, e. g. when G is compact, or when the pseudogroup of local automorphisms of the structure is first-order Lie. In the second part, Chern's theory of structural invariants (this Zbl. 53, 16) is reinterpreted in terms of a representation of G into the space of tensors $C_{[k]l}^i$ on V . If G is a complex Lie group, the structural tensors associated to its real or complex structures are the same. H. Guggenheimer.

Guggenheimer, H.: Saggi di topologia delle varietà complesse. I, II, III, Atti Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., Anno 244°, Rend. XI. Ser. 3, Nr. 2, 185—212, 213—231, 232—253 (1956).

Der erste Teil einer Ausarbeitung von Vorträgen — vom Verf. 1954 an der Universität Bologna gehalten — stellt eine breite Einführung in einige fundamentale Tatsachen der algebraischen Topologie dar: Definition simplizialer und singulärer Komplexe, Homologie- und Kohomologiegruppen, die exakte Kohomologiefolge usw. Verf. fügt instruktive Anwendungen dieser Begriffsbildungen bei. Leider stört hier, wie in den folgenden Teilen, eine große Anzahl von Druckfehlern die Lektüre beträchtlich. — Der zweite Teil bringt die Einführung verschiedener Typen von Mannigfaltigkeiten und Pseudomannigfaltigkeiten (siehe Behnke-Stein, dies. Zbl. 43, 303) und den Kalkül der äußeren Differentialformen in seinen Grundzügen. Verf. weist schließlich für Kählersche Mannigfaltigkeiten die Isomorphie zwischen den Gruppen von Hodge und den entsprechenden Kohomologiegruppen nach. —

Teil III: Sei V eine kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit (ohne Singularität), $W \subseteq V$ eine Untermannigfaltigkeit. Den Ausgangspunkt für die Entwicklungen dieser Arbeit bildet die exakte Folge der Hodgeschen Gruppen von V bezüglich W der Ordnung 2:

$$\dots \rightarrow \mathfrak{H}^{t-2}(W) \rightarrow \mathfrak{H}^t(V, W) \rightarrow \mathfrak{H}^t(V) \rightarrow \mathfrak{H}^t(W) \rightarrow \dots,$$

wobei $\mathfrak{H}^t(V, W)$ mit Hilfe der auf W verschwindenden Formen von V gebildet wird. — Die Isomorphie dieser Gruppen mit den entsprechenden Kohomologiegruppen stellt die Möglichkeit einer topologischen Interpretation sicher. Die exakten Folgen (für gerade und ungerade t) geben unmittelbar Beziehungen zwischen den Dimensionen der Gruppen, welche Verf. für mehrere Fälle auswertet (unter Heranziehung des Dualitätssatzes von Poincaré). Die komplexen Flächen der Dim. 2 werden näher untersucht, man erhält Invarianten von V bezüglich Modifikationen (nach Behnke-Stein; als Verallgemeinerung der birationalen Transformationen zu interpretieren). Sei $q_t = \dim \mathfrak{H}^t(W)$, $p_t = \dim \mathfrak{H}^t(V)$, V' eine Modifikation von V , so gilt $q_1 = q'_1$, was sich bei der geometrischen Interpretation als Verallgemeinerung eines berühmten Satzes von Enriques erweist, wonach das Geschlecht der Ausnahmekurven gleich 0 ist. Man erhält ebenso $p_2 - q_2 = p'_2 - q'_2$, wesentlich für den Invarianzbeweis des geometrischen und arithmetischen Geschlechtes bezüglich Modifikationen. Dafür sind allerdings die Differentialformen näher zu analysieren („Le successioni a indici“): die Gruppe $\mathfrak{H}_s^t(V)$ (vom Index s) wird mit Hilfe der Formen $\alpha_s^t = a_{i_1} \dots a_{i_{t-s}} i_{j_1} \dots i_{j_s} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{t-s}} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_s}$ gebildet. (Auf einer Kählerschen Mannigfaltigkeit gilt: $\mathfrak{H}^t(V) = \mathfrak{H}_0^t(V) \oplus \mathfrak{H}_1^t(V) \oplus \dots \oplus \mathfrak{H}_t^t(V)$.) Man erhält wieder exakte Folgen für die indizierten Hodgeschen Gruppen, führt entsprechende Dimensionsberechnungen durch und bekommt so das gewünschte Resultat. Verf. behandelt des weiteren Verallgemeinerungen solcher Sätze auf Kählersche Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension sowie auf Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten. Im letzteren Fall gelangt man bei formal ganz ähnlichem Vorgehen nicht zu entsprechenden topologischen Interpretationen, da hier über eine Isomorphie zwischen den Hodgeschen Gruppen und den Kohomologie-Gruppen nichts bekannt ist.

H. Götz.

Guggenheimer, H.: Opérateurs différentiels et suites exactes sur une variété kählérienne. Tôhoku math. J., II. Ser. 8, 308—323 (1956).

L'A. rappelle la définition d'opérateurs différentiels liés à la notion de type sur une variété kählérienne, et établit des analogies formelles entre la notion de classe et celle de type. Il construit, à l'aide des opérateurs précédents, des groupes d'homologie isomorphes au groupe des formes harmoniques sur une variété kählérienne compacte. Après avoir introduit des opérateurs de restriction et d'extension pour les formes différentielles, relativement à une sous-variété analytique sans singularités, opérateurs qui conservent le type et la classe, il est en mesure de construire des suites exactes à partir des groupes d'homologie précédents, et d'étudier les modifications kählériennes; notamment, il montre que deux variétés ne peuvent se correspondre dans une modification kählérienne, que si leurs genres géométriques coïncident.

F. Norquet.

Guggenheimer, H.: Correzione alla nota: Sulla teoria globale delle trasformazioni puntuali. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 590 (1956).

Cette note appelle l'attention des lecteurs sur deux incorrections d'un article antérieur (ibid. ce Zbl. 67, 409) qui ne sont d'aucune influence sur les résultats.

R. Thom.

Ford jr., L. R. and D. R. Fulkerson: Maximal flow through a network. Canadian J. Math. 8, 399—404 (1956).

Ein „network“ ist ein Graph mit endlich vielen Knotenpunkten a, b, \dots und Kurvenstücken $(a, b), \dots$, wobei jedem Kurvenstück eine positive „Kapazität“

zugeordnet ist. Eine „Kette“ (chain) von a nach h ist ein System von Kurvenstücken (a, b) , (b, c) , \dots (g, h) mit paarweis fremden Knotenpunkten. Der „Fluß“ durch eine Kette (chain flow) wird durch eine nichtnegative Zahl bezeichnet; dabei unterliegt der Gesamtfluß der Bedingung, daß für kein Kurvenstück die Summe der chain flows die Kapazität übersteigt. Ein System von Kurvenstücken, das jede Kette von a nach h unterbricht, heißt „Trennmenge“ (disconnecting set); als ihre Kapazität gilt die Summe der Kapazitäten ihrer Komponenten. Ein „Schnitt“ (cut) ist eine irreduzible Trennmenge. — Die Verf. beweisen: Satz 1. Der maximale Fluß von a nach h ist gleich dem Minimum der Kapazitäten der Trennmengen. Satz 2. Ein network, das sich zusammen mit einer Verbindungskurve (a, h) als ebener Graph zeichnen läßt, enthält eine Kette zwischen a und h , die jeden Schnitt genau einmal trifft. Auf diese beiden Sätze stützt sich ein Verfahren, den Maximalfluß zu konstruieren. Als duales Problem wird eine Minimalweg-Aufgabe gelöst.

D. Bierlein.

Angewandte Geometrie:

• Četveruchin, N. F., V. S. Levickij, Z. I. Prjanišnikova, A. M. Tevlin und G. I. Fedotov: *Lehrgang der Darstellenden Geometrie*. Unter Redaktion von N. F. Četveruchin. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 436 S. R. 9.55 [Russisch].

Inhaltsverzeichnis: Kap. I. Geometrische Transformationen. Kap. II. Die Mehrtafelprojektion. Punkt, Gerade und Ebene auf der Mehrtafelprojektion. Schnittaufgaben. Kap. III. Polyedrische Flächen und Polyeder. Kap. IV. Senkrechte Geraden und metrische Aufgaben. Kap. V. Verfahren der Transformation der Mehrtafelprojektion und ihre Anwendung auf die Lösung von Aufgaben. Kap. VI. Kurven und ihre Projektionseigenschaften. Kap. VII. Gekrümmte Flächen. Ihre Entstehung, Abbildung und technische Anwendungen. Kap. VIII. Die Tangentialebene der Fläche. Kap. IX. Überschneidung der Fläche mit der Ebene und der Geraden. Kap. X. Gegenseitige Überschneidung von Flächen. Kap. XI. Abwicklung von Flächen. Kap. XII. Axonometrische Projektionen. Nachtrag I. Konstruktion von Schatten bei Mehrtafel- und axonometrischen Projektionen. Nachtrag II. Skizze der Entwicklungsgeschichte der darstellenden Geometrie. Literatur.

Theoretische Physik.

Tournarie, Max: *Considérations sur l'histographie des fonctions, notamment dans l'inversion du produit de composition*. C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 2509—2512 (1956).

• Wolfson, J. L. and H. S. Gellman: *Five figure tables for the conversion of electron momentum to electron kinetic energy from 100 to 20000 Gauß-Cm.* (A. E. C. L. Report No. 327.) Reprinted. Chalk River, Ontario: Atomic Energy of Canada. Ltd. 1956. I, 43 p. S 1.00.

Mechanik:

Margulies, G.: *Remark on kinematically preferred co-ordinate systems*. Proc. nat. Acad. Sci. USA **42**, 152—153 (1956).

T. Y. Thomas (dies. Zbl. **65**, 370) hat zeitabhängige Koordinatensysteme „kinematisch ausgezeichnet“ genannt, wenn in ihnen jeweils die momentane Rotation des betrachteten Mediums verschwindet. Verf. zeigt nun, daß zwei solche Koordinatensysteme mit gleichem Zentrum $P(t)$ auseinander durch eine zeitunabhängige orthogonale Transformation hervorgehen.

D. Laugwitz.

Pipes, Louis A.: *Stability of periodic time-varying systems*. Math. Mag. **30**, 71—80 (1956).

Verf. untersucht erneut die Bewegungen eines mathematischen Pendels mit vertikal erschüttertem Aufhängepunkt. Zunächst wird vorausgesetzt, daß die Beschleunigung des Aufhängepunktes bis auf das Vorzeichen konstant ist. Diese

Frage wurde von Erdelyi [Z. angew. Math. Mech. 14, 235—247 (1934); 16, 171—182 (1936)] im wesentlichen mit der gleichen Methode untersucht. Zusätzlich wird nur noch geschwindigkeitsproportionale Dämpfung vorausgesetzt. Sodann wird eine harmonische Erschütterung vorausgesetzt. Die benutzte Methode findet man auch bei Stellmacher (dies. Zbl. 55, 113). *W. Haacke.*

Sideriadès, L.: *Systèmes couplés non linéaires*. J. Phys. Radium 17, Suppl. 159A—175A (1956).

Verf. untersucht ein nichtlineares System, das in der Gestalt

$$dx/X(x, y) = dy/Y(x, y) = dt/T(x, y)$$

geschrieben wird. X, Y, T sind analytische Funktionen ihrer Argumente. Die topologische Untersuchung dieser Gleichungen schließt an Vogel an. Verf. leitet ausführlich für einen allgemeinen Röhrengenerator die Differentialgleichung her und diskutiert sie für viele Spezialfälle (z. B. Van der Polsche Gleichung). Experimentelle Untersuchungen werden zum Vergleich herangezogen. *W. Haacke.*

Alekseev (Alexeiev), V. M.: *Exchange and capture in the three body problem*. Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 599—602 (1956) [Russisch].

Es wird bewiesen, daß, falls die Verhältnisse der Massen zweier Massenpunkte zur Masse des dritten Punktes genügend klein vorausgesetzt werden, im Phasenraume die Menge derjenigen Systeme von Anfangswerten, welche zu Einfang oder (im Falle beliebigen Vorzeichens der Energiekonstante) zu Austausch führen, von positivem Maße ist. Der Beweis, welcher von numerischer Integration keinen Gebrauch macht, beruht (unter Anwendung je eines Hilfssatzes von Hilmi und von Sitnikov) auf einem Grenzübergange, bei welchem die erwähnten Massenverhältnisse gegen Null streben; infolge dieses Umstandes ergibt sich gegenüber dem Sitnikovschen Beweis der Möglichkeit des Einfanges (dies. Zbl. 51, 157) der Vorteil, daß bei der Konstruktion der fraglichen Lösungen die großen relativen Geschwindigkeiten der Massenpunkte vermeidbar sind, wodurch der Beweis des auf den Austausch bezogenen Teiles der Behauptung auch im Falle einer negativen Energiekonstante ermöglicht wird. *I. Földes.*

Lattanzi, Filippo: *Sopra alcune relazioni fra momenti del I° e II° ordine del peso elastico longitudinale di un asta*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 21, 279—288 (1956).

Gegeben sei ein gekrümmter Schaft. Zu jedem Querschnitt entlang des Schaftes möge eine Hauptträgheitsachse gehören, die in der Schaftebene liegt (der Schaft wird als in einer Ebene liegend angenommen) und eine solche senkrecht zu dieser Ebene. Es werden die gegenseitigen Beziehungen zwischen den Momenten erster und zweiter Ordnung des Gewichts des Schaftes in Bezug auf eine in der Schaftebene liegende Gerade zusammengestellt. Die Formulierung erfolgt in einer für den praktischen Gebrauch günstigen Form. *E. Hardtwig.*

Hübner, Gerhard und Ernst Lübecke: *Zur Einwirkung von periodischen, räumlich verteilten Kräften auf die Schwingungen mechanischer Schwingungsgebilde*. Z. Naturforsch. 11a, 492—498 (1956).

The paper deals with forced vibrations of continuous systems with frictional resistance proportional to velocity. The main examples considered are strings, bars, rings, circular arcs. If x is the coordinate determining a point of the system and $y = y(x, t)$ is the elongation after a time t the vibrations considered are given by (*) $M[y] = N[\partial^2 y / \partial t^2 + 2b \partial y / \partial t] - p(x) \sin \omega t$ together with $2m$ ($m = 2$ in the cases mentioned above) homogeneous linear boundary conditions and 2 initial conditions. In (*) b is independent of x and t , $M[y]$ and $N[y]$ are expressions involving x and the derivatives of y with respect to x up to the order m . The main result is that

resonance appears when the frequency of the forcing term is equal to one of the eigenvalues of the system and besides a certain coefficient does not vanish.

M. M. Peixoto.

Zoller, K.: Über das Grammelsche Verfahren bei Eigenschwingungsaufgaben. Ingenieur-Arch. 24, 401—411 (1956).

Il lavoro è principalmente inteso a precisare il legame tra il procedimento di Grammel per il calcolo delle autofrequenze di un sistema oscillante e i principi fondamentali della meccanica. La trattazione è limitata a sistemi elastici unidimensionali semplici (per i quali, cioè, l'energia interna specifica è il semiprodotto di un fattore di deformazione per un fattore di forza) e si prova che il procedimento di Grammel scaturisce dalla applicazione del principio di Hamilton, non all'oscillatore stesso, ma ad un suo modello duale ottenuto scambiando opportunamente tra loro i parametri elastici e inerziali del sistema, insieme alle coordinate cinetiche e dinamiche. La prova è condotta su esempi, ma non mancano considerazioni di carattere più generale. Per le oscillazioni di torsione, si paragonano i risultati così ottenuti con quelli che derivano dalla applicazione del metodo di Rayleigh-Ritz, mostrando come il metodo di Grammel sia, a parità di approssimazione, più vantaggioso.

T. Manacorda.

Linsman, M.: Le graphique des centres instantanés de rotation dans l'étude cinématique des machines. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 25, 198—208 (1956).

Es wird die bekannte graphische Ermittlung der Relativpole in Getrieben entwickelt und auf verschiedene Mechanismen angewendet. *W. Meyer zur Capellen.*

Artobolevskij (Artobolevsky), I. I.: Two new precise leading mechanisms. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 341—344 (1956) [Russisch].

The author presents in this short paper two new precise leading mechanisms. The first mechanism consists of five members with two rotational pairs and one pair of translation. This mechanism serves for drawing circles. The second mechanism has also five members with two pairs of translation and one traverse. This mechanism serves for drawing straight lines. It is shown that further structural modifications can be used such that these mechanisms serve as mechanisms for drawing conic sections.

D. Rašković.

Elastizität. Plastizität:

Budiansky, Bernard and Carl E. Pearson: A note on the decomposition of stress and strain tensors. Quart. appl. Math. 14, 327—328 (1956).

Ein bekannter Satz aus der Vektoranalysis besagt, daß ein beliebiges Vektorfeld sich additiv zusammensetzen läßt aus einem quellenfreien und einem wirbelfreien Anteil. Ein analoger Satz wird für die Tensorfelder der Deformationen und Spannungen abgeleitet.

E. Hardtwig.

Frederick, Daniel: Physical interpretation of physical components of stress and strain. Quart. appl. Math. 14, 323—327 (1956).

Deformationen und Spannungen bilden Tensoren. Je nach der Wahl der krummlinigen Koordinaten nehmen die Systeme der Komponenten dieser Tensoren verschiedene Gestalten an. Im Sinne der Arbeiten von C. Truesdell (dies. Zbl. 51, 381; 55, 150) untersucht Verf., wieviele Systeme von „physikalischen Komponenten“ bei der Lösung von Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie angewandt werden können. Er findet bei den Spannungen deren acht, bei den Deformationen deren zwei.

E. Hardtwig.

Teleman, Silviu: The method of orthogonal projection in the theory of elasticity. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 1, Nr. 1, 49—66 (1956).

Die von H. Weyl (dies. Zbl. 26, 20) untersuchte Methode der orthogonalen Projektion in der Potentialtheorie wird benutzt, um die Dehnung im Innern aus

der Dehnung am Rande bzw. aus dem Druck auf dem Rande eines homogenen isotropen elastischen Stoffes zu bestimmen, auf welchen keine Körperkräfte wirken. Zunächst werden einige Mittelwerteigenschaften der polyharmonischen Funktionen verallgemeinert, dann werden die Integralausdrücke derjenigen Differentialoperatoren angegeben, die in den Formeln der Elastizitätstheorie gebraucht werden. Wird der Drucktensor als solenoidaler und drehungsfreier Tensor vorausgesetzt, so ist er fast überall gleich einem solchen Tensor (Gradienten des Geschwindigkeitsvektors), dessen Komponenten analytische Funktionen sind. Sodann wird ein Hilbertraum für die Tensoren konstruiert, in welchem durch orthogonale Projektion auf gewisse Unterräume die gesuchten Lösungen gewonnen werden. *J. Pretsch.*

Treloar, L. R. G.: Large elastic deformations in rubberlike materials. Verformung und Fließen des Festkörpers. Koll. Madrid 26.—30. Sept. 1955, 208—217 (1956).

Stress-strain relations and associated potential energy functions of incompressible rubbers-like materials are reviewed in terms of the kinetic theory of rubber-elasticity, the phenomenological theory of deformation-invariants and experimental results. Introducing the lowest even-powered invariants of the principal extension-ratios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ in the form

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2, \quad I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$$

where $I_3 = 1$ because of the assumed incompressibility, the general elastic potential of the form $W = f(I_1 - 3) + g(I_2 - 3)$ is derived and discussed in terms of experimental results on vulcanized rubbers. *A. M. Freudenthal.*

Oldroyd, J. G.: The effect of small viscous inclusions on the mechanical properties of an elastic solid. Verformung und Fließen des Festkörpers. Koll. Madrid 26.—30. Sept. 1955, 304—313 (1956).

The stress-strain relations are established for an elastic solid containing small, widely dispersed spherical cavities filled with an elastically compressible viscous liquid. The resulting stress-strain relations are those of an elastically compressible „standard“ (anelastic) solid, with parameters that are combinations of the constants of the constituent elastic and viscous phases and of the volume concentration of the latter. Expressions for the bulk-modulus, the shear modulus and the stress- and strain-relaxation times are derived. *A. M. Freudenthal.*

Iyengar, K. T., Sundara Raja: On a two-dimensional problem in the end-block design of post-tensioned prestressed concrete beams. Proc. 1st Congr. theor. appl. Mech., Nov. 1—2, 1955, 107—112 (1956).

L'A. s'occupe du problème de la demibande élastique plane (d'après la direction Ox), de largeur $2b$, actionnée par des charges normales sur la ligne de but. On utilise ainsi une fonction de tension de type Airy de la forme

$$\Phi = -Ky^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n + B_n \frac{n\pi x}{b} \right) e^{-\frac{n\pi x}{b}} + \int_0^{\infty} [A(\alpha) \operatorname{ch} \alpha y + \alpha y B(\alpha) \operatorname{sh} \alpha y] \cos \alpha x d\alpha$$

qui doit vérifier l'équation biharmonique. Les coefficients A_n, B_n sont donnés par un système infini d'équations et les fonctions $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$ sont déterminées en fonction de ceux-ci. On calcule effectivement les tensions locales au but d'une poutre en béton armé, dont l'armature est post-tensionnée. Le problème de la demibande plane ainsi sollicitée a été étudié encore, à l'aide de quelques fonctions spéciales (J. Fadle, ce Zbl. 23, 412; K. A. Kitover, ce Zbl. 48, 422).

P. P. Teodorescu.

Belluzzi, Odone: Sul comportamento elastico delle travi ad anello. Atti Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., Anno 244°, Rend., XI. Ser. 3, Nr. 1, 28—36 (1956).

Voinea, Radu: Contributions à l'étude de la stabilité élastique des constructions hyperstatiques. Acad. Républ. popul. Roumaine, Inst. Méc. appl., Revue Méc. appl. 1, Nr. 1, 185—202 (1956).

Pârnu, A.: Contribution à l'étude de la courbure des poutres. An. Univ. C. I. Parhon București, Ser. Ști. Natur. Nr. 12, 19—22, russ. und französ. Zusammenfassung 22 (1956) [Rumänisch].

On étudie la déformation d'une poutre en porte à faux, fortement courbée, actionnée par une charge uniformément distribuée.
P. P. Teodorescu.

Poßner, Lothar: Analoge Rechenmethoden (Festigkeitslehre — Elektrotechnik). Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau 2, 15—26 (1956).

Zeichnerische und rechnerische Durchführung von Analogien zwischen einem zweiseitig eingespannten Stab unter axialen Lasten und einer elektrischen Ringleitung, belastet durch gegebene Zapfströme.
R. Zurmühl

Poßner, Lothar: Einspannmomente bei Wellen. Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau 2, 117—133 (1956).

Anwendung der bekannten Mohrschen Konstruktion der Biegelinie auf einfach und mehrfach gestützte Wellen konstanter oder veränderlicher Biegesteifigkeit zur Ermittlung von Einspannmomenten.
R. Zurmühl.

Pickett, Gerald, Sharif Badaruddin and S. C. Ganguli: Semi infinite pavement slab supported by an elastic solid subgrade. Proc. 1st Congr. theor. appl. Mech., Nov. 1—2, 1955, 51—60 (1956).

Nachdem Westergaard [Ingenioren 32, 513 (1923)] das Problem der halbunendlich ausgedehnten Platte auf flüssigem Untergrund in Form eines einfachen Fourier-Integrals gelöst hat, wird die Lösung für das Problem der halbusendlich Platte auf elastischem festen Untergrund in Form eines doppelten Fourier-Integrals als Partikularlösung der Lagrange-Gleichung und eines zusätzlichen einfachen Fourier-Integrals zur Erfüllung der Bedingungen am freien Rand dargestellt. Auslenkungen und Momente werden als einfache Fourier-Integrale gewonnen, die für verschiedene Lastfälle ausgewertet werden können.
J. Pretsch.

Behlendorff, Erika: Über Randwertprobleme bei Häuten und dünnen Schalen im Membranspannungszustand. Z. angew. Math. Mech. 36, 399—413 (1956).

Will man die Spannungen in einer durch äußere Oberflächenkräfte belasteten Schale bestimmen, wobei noch zusätzliche Vorgaben für die Spannungsverteilung längs der Berandung der Schale gemacht werden, so wird im allgemeinen kein Gleichgewichtszustand der Schale bei vorgegebener Oberflächenbelastung möglich sein. Verf. nimmt an, daß die Schubspannungen am Rande verschwinden sollen und untersucht die Frage, welche Bedingungen die äußeren Kräfte erfüllen müssen, damit ein momentloses elastisches Gleichgewicht möglich ist. Zunächst werden die Differentialgleichungen der dünnen Schale mittels des sehr angepaßten Kalküls der Differentialformen abgeleitet, wobei das obige Problem sich auf ein Randwertproblem für elliptische Systeme der Form (*) $u_{11} - v_{12} = A u + B v + C$, $u_{12} + v_{11} = \bar{A} u + \bar{B} v + \bar{C}$ mit der Randbedingung $a_1(s) u + b_1(s) v = f(s)$ reduziert. Dabei sind u_{11} , u_{12} geeignete Richtungsableitungen mit Richtungen, die ihrerseits wieder durch das mechanische Problem ausgezeichnet sind. Die Lösungsverhältnisse von (*) hängen bekanntlich (W. Haack, I. N. Vekua) von dem zu (*) adjungierten System und von der Charakteristik des Vektorfeldes (a_1, b_1) ab. Im vorliegenden Fall ergibt sich die Charakteristik $+2$, so daß die Lösbarkeit des Randwertproblems (*) vom Erfülltsein gewisser Integralbedingungen abhängig ist, in die die Lösungen des adjungierten Problems eingehen, welches von den äußeren Kräften unabhängig ist. Verf. zeigt, daß das adjungierte Randwertproblem gleichbedeutend ist mit dem rein geometrischen Problem, alle infinitesimalen Verbiegungen der Membran-

fläche zu bestimmen, bei denen die Projektion des Verschiebungsvektors der Randpunkte auf die Tangentialebene der Fläche die Randkurve berührt. Kennt man die Lösung dieses Biegungsproblems, so können die Integralbedingungen für jede Kraftverteilung explizit angegeben werden. Diese haben einen wesentlich expliziteren Charakter als bei I. N. Vekua (dies. Zbl. 48, 337). Für Kugelschalen gelingt die Lösung des obigen Biegungsproblems explizit, wie am Schluß der Arbeit gezeigt wird.

G. Hellwig.

Hodge jr., P. G.: Displacements in an elastic-plastic cylindrical shell. *J. appl. Mech.* 23, 73—79 (1956).

A thin-walled cylindrical shell reinforced at either end by rigid rings and loaded by an excess external radial pressure is analyzed under the assumption of an idealized sandwich section consisting of two infinitely thin outer faces carrying membrane stresses only and a finite inner layer transmitting unlimited shear; under bending moments the two membranes become simultaneously plastic. Introducing the Tresca yield condition and associated flow-rule the deformation of the shell is investigated assuming that each sandwich ring is either plastic (when the sandwich faces are plastic) or elastic. Thus the investigation is a modified rigid-plastic rather than a true elastic-plastic analysis. The results indicate that the maximum displacement very close to the collapse load is still only a few times the maximum elastic displacement. Because of the replacement of the homogeneous shell by the idealized sandwich, and the consequent neglect of the true elastic-plastic behavior of the shell in bending, validity of this conclusion with respect to homogeneous shells is somewhat doubtful.

A. M. Freudenthal.

•**Kuhn, Paul:** Stresses in aircraft and shell structures. (McGraw-Hill Publ. Aeronaut. Sci.) New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1956—XX, 435 p. \$ 14.00 (105/-sh.)

„The aim of the work may be described most concisely as: One step beyond $M c/I$ and $T/2 A$ in the simplest manner possible“ ($M c/I$ = Biegespannung, $T/2 A$ = Torsionsspannung beim Balken). Das Buch wendet sich damit hauptsächlich an den Praktiker, dem einfache Rechenverfahren in die Hand gegeben werden (Rezeptbuch); besonders wertvoll für ihn ist Teil II, in dem auf 122 Seiten umfangreiche Versuchsergebnisse mitgeteilt und mit den in Teil I besprochenen Methoden verglichen werden. Es werden nur Aussagen über die auftretenden Spannungen gemacht (stress-analysis), die zulässigen Spannungen (strength analysis) werden i. a. nicht behandelt. — Inhalt: I. Methods of analysis: 1. Preliminary Topics. 2. Elementary Theories. 3. Diagonal Tension. 4. Shear Lag. 5. Two-spar Structures. 6. Four-flange Shells under Torsion (with Restrained Warping). 7. Multistringer Single-cell Shells under Torsion (with Restrained Warping). 8. Cutouts in Plane Panels and Box Beams. 9. Cutouts in Circular Cylinders. II. Experimental Evidence: 10. Tests and Their Evaluation. 11. Verification of Elementary Theories. 12. Diagonal-tension Tests. 13. Shear-lag Tests. 14. Torsion-box Tests. 15. Cutout Tests.

K. Nickel.

Nowacki, Witold: Assemblage stresses in plates. *Proc. 1st Congr. theor. appl. Mech.*, Nov. 1—2, 1955, 9—18 (1956).

Die Ermittlung der zusätzlichen Spannungen, welche bei der Anpassung einer durch Produktionsfehler verkrümmten Platte an eine genau gearbeitete ebene Stütze entstehen, wird mit Hilfe einer vom Verf. früher aufgestellten Formel auf eine Integralgleichung erster Art für die Verbiegung der Platte zurückgeführt. Die Lösungsmethode dieser Gleichung wird an einigen Beispielen für rechtwinklige Platten erläutert, indem man die gesuchte Funktion in trigonometrische Reihen entwickelt, deren Koeffizienten ein unendliches lineares Gleichungssystem erfüllen.

S. Drobot.

Onat, E. T. and R. M. Haythornthwaite: The loadcarrying capacity of circular plates at large deflection. *J. appl. Mech.* 23, 49—55 (1956).

Nella usuale progettazione dei continui al limite di plasticità, secondo la teoria di Prager (questo Zbl. 47, 432), si considera il solido indeformabile finché non intervenga la deformazione plastica, e si trascura l'incrudimento. Ciò non è confermato lecito, almeno per le piastre, dall'esperienza, e gli AA. sottolineano che la spiegazione può trovarsi nel non tener conto della deformazione precedente al collasso. In tale ordine di idee, viene esaminato il comportamento di piastre piane sottoposte a carico dotato di simmetria cilindrica. Partendo dalla soluzione esatta di Hopkins e Prager (questo Zbl. 57, 173) la quale, per una piastra circolare piana caricata nel centro, dà il campo di velocità incipiente, gli AA. determinano approssimativamente il campo di velocità nello stato di deformazione conica vicino a quello piano iniziale, e da questo, con un procedimento che fa capo, subordinatamente a convenienti ipotesi suggerite dalle condizioni al contorno, a considerazioni puramente energetiche, il valore del carico limite. Il procedimento generale è applicato a casi particolari (piastra semplicemente appoggiata, incastrata, membrana) e i risultati paragonati ai dati sperimentali.

T. Manacorda.

Ralston, Anthony: On the problem of buckling of a hyperbolic paraboloidal shell loaded by its own weight. *J. Math. Physics* 35, 53—59 (1956).

Das Knickproblem der flachen Para-Hyperboloid-Schale unter Vertikallast führt auf zwei Differentialgleichungen vom Typ der Schub-Knick-Gleichungen für die ebene Platte. Bei geeigneten Randbedingungen läßt sich die Lösung des Schalenproblems elementar auf die des Plattenproblems zurückführen, wobei allerdings alle Platten-Eigenwerte (nicht nur deren Knicklast) bekannt sein müssen. Der klassische Doppelreihen-Ansatz führt auf zwei unendliche Gleichungssysteme ($m + n$ gerade oder ungerade), die Verf. bis hinauf zu $m + n = 17$ mit Hilfe eines Digitalrechenautomaten löst. Für die Knicklast ergibt sich in Abhängigkeit von Schalen-Dicke zu Pfeil eine Girlandenkurve, die für dünne Schalen in eine Gerade ausläuft.

K. Marguerre.

Stippes, M.: A note on the simply-supported plate. *Quart. appl. Math.* 14, 90—93 (1956).

Im Anschluß an eine Arbeit von B. D. Aggarwala (dies. Zbl. 56, 179), der die vertikale Scherkraft bei der einfach unterstützten Platte, die in einem inneren Punkt einer konzentrierten Belastung unterworfen wird, geschlossen in der Weierstraßschen \wp -Funktion und ihren Ableitungen dargestellt hatte, werden geschlossene Ausdrücke auch für die Biegemomente und die resultierenden vertikalen Scherkräfte am Plattenrand gewonnen.

J. Pretsch.

Wegner, Udo: Berechnung von teilweise eingespannten rechteckigen Platten bei Vorgabe von Randmomenten. *Z. angew. Math. Mech.* 36, 340—355 (1956).

Eine rechteckige Platte sei nur teilweise (d. h. nicht entlang aller Ränder) eingespannt. Zur Befriedigung der Einspannbedingung ist die Superposition von Biegeflächengleichungen erforderlich. Die Koeffizienten der superponierten Gleichung sind aber nur durch Auflösen linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten bestimmbar. Infinite Prozesse dieser Art sind unbequem und ungenau. Auch der andere Weg ist nicht gangbar: das Entwickeln der exakten Lösung der Bipotentialgleichung nach solchen Funktionensystemen, die ein Erfüllen der Einspannbedingungen bei Vermeiden infiniten Prozesse zulassen. Man kennt diese Funktionensysteme nicht. Bei dieser Sachlage ist es verdienstvoll, daß Verf. ein Verfahren angibt, die Biegeflächengleichung in exakter Form (als unendliche Reihe oder als unendliches Integral) anzuschreiben und zwar für rechteckige Platten mit sehr allgemeinen Einspannbedingungen.

E. Hardtwig.

Wittmeyer, H.: Näherungsformel für den Drillungswiderstand eines vielzelligen, dünnwandigen Hohlprismas. *Z. angew. Math. Mech.* 36, 436—443 (1956).

Der Drillungswiderstand eines aus mehreren Zellen bestehenden Hohlprismas läßt sich als Eigenwert einer reell symmetrischen Matrix vom Range 1 darstellen. Von hier aus ergibt sich Näherungsformel und untere Abschätzung als Rayleigh-Quotient, gebildet zu einem Näherungsvektor $t^{(1)}$ zum Vektor t der Zellen-Schubflüsse t_i , wobei $t^{(1)}$ aus einer Ausgangsnäherung $t^{(0)}$ als erster Iterationsschritt eines Gradientenverfahrens gewonnen wird. Die Eigenwertauffassung erlaubt auch eine Deutung verschiedener älterer Abschätzungsformeln, die an einigen Zahlenbeispielen mit der neuen Formel verglichen werden.

R. Zurmühl.

Choudhury, Pritindu: Stress distribution in a thin aeolotropic strip due to a nucleus of strain. *Z. angew. Math. Mech.* 36, 413—416 (1956).

Ein dünner, aeolotroper Streifen werde gedehnt. Das Dehnungszentrum befinde sich in der Mitte zwischen den geradlinigen Enden des (endlichen langen) Streifens. Die im Streifen entstehenden Spannungen werden bestimmt und in Form von Fourierintegralen dargestellt.

E. Hardtwig.

Pârvu, A.: Sur les déformations des barrages soumis à souspressions. *An. Univ. C. I. Parhon Bucureşti, Ser. Şti. Natur.* Nr. 10, 15—18, russ. und engl. Zusammenfassung 18 (1956) [Rumänisch].

On étudie les déformations dans un barrage de poids, de section rectangulaire (problème plan), soumis à des souspressions.

P. P. Teodorescu.

Chakravorty, J. G.: On the distribution of stress in an infinite circular cylinder of transversely isotropic material caused by a band of uniform pressure on the boundary. *Bull. Calcutta math. Soc.* 48, 163—169 (1956).

An einem sehr langen Zylinder greift entlang eines, gemessen an der Zylinderlänge, schmalen Bandes, das um den Zylinder herumführt, gleichförmiger Druck an. Spannungs- und Verrückungsverteilung im Zylinder unterscheiden sich dann merklich von den entsprechenden Verteilungen bei gleichförmiger Belastung über die ganze Oberfläche hinweg. Dieses Problem, dem eine gewisse praktische Bedeutung zukommt, wurde für den Fall des isotropen Zylinders 1944 von Rankin unter Einführung einer Spannungsfunktion behandelt. Ein analoges Problem ergibt sich, wenn Spannungs- und Verrückungsverteilung in einem unendlich ausgedehnten Körper mit zylindrischem Hohlraum bei bandförmiger Belastung aufzusuchen sind. Diese Aufgabe wurde 1941 für den Fall der Isotropie von Westergard gelöst. Die vorliegende Arbeit behandelt beide Probleme, jedoch unter der Voraussetzung transversaler Isotropie bezüglich der Symmetrieachse. Die dabei angewandte Methode bewegt sich im Rahmen der üblichen Elastizitätstheorie.

E. Hardtwig.

Chakravorty, J. G.: On the distribution of stress in a hollow aeolotropic cylinder by a localised shear on a boundary. *Bull. Calcutta math. Soc.* 48, 171—176 (1956).

In den letzten Jahren wurde von einer Reihe von Autoren das Problem der Verdrehung eines elastischen Zylinders oder eines unendlich ausgedehnten isotropen elastischen Körpers mit zylindrischem Hohlraum unter der Voraussetzung spezieller Belastungen behandelt. Hier erfolgt eine Verallgemeinerung dieser Arbeiten: Bestimmt wird die Spannungsverteilung in einer aeolotropisch-zylindrischen Schale, gleich ob endlich oder unendlich, unter der Voraussetzung, daß gleichförmige Scherkräfte in Ebenen senkrecht zur Achse wirken. Die Aufgabe wird mit den üblichen Mitteln der klassischen Elastizitätstheorie gelöst.

E. Hardtwig.

Singh, K. P.: Centrifugal and thermal stresses in rotating discs. *Proc. 1st Congr. theor. appl. Mech.*, Nov. 1—2, 1955, 169—180 (1956).

This paper deals with a tabular method for calculation of centrifugal and thermal stresses in a disc of varying thickness. This method is a combination and continuation of the solutions indicated by Stodola and others.

Aus der Zufssg. des Autors.

Sharma, Brahmadev: Thermal stresses in infinite elastic disks. *J. appl. Mech.* **23**, 527—531 (1956).

In einem ersten Abschnitt wird ein direktes Verfahren angegeben, die Verteilung der Thermalspannungen in einem beliebigen elastischen Körper bei beliebiger Temperaturverteilung zu finden. Die Ergebnisse werden dazu verwandt, die Spannungsverteilung in einer kreisförmigen Scheibe der Dicke d und von unendlich großem Radius bei axialsymmetrischer Temperaturverteilung zu finden. Weiter wird der Fall des Halbraums behandelt, in dem sich die elastischen Eigenschaften in der Tiefe d sprungartig ändern und schließlich, als Spezialfall, die Spannungsverteilung untersucht, die sich einstellt, wenn ein kreisförmiger Bereich der Oberfläche des Halbraums auf konstanter Temperatur (ungleich Null) gehalten wird, während der Rest der Oberfläche auf konstant gleich Null Grad gehalten wird. In einem zweiten Abschnitt wird eine allgemeine Lösung für den unstationären Zustand gegeben.

E. Hardtwig.

Sharma, Brahma Dev: Stresses in an infinite slab due to a nucleus of thermo-elastic strain in it. *Z. angew. Math. Mech.* **36**, 75—78 (1956).

Budiansky, Bernard and Carl E. Pearson: On variational principles and Galerkin's procedure for non-linear elasticity. *Quart. appl. Math.* **14**, 328—331 (1956).

In der Theorie der Plastizität lassen sich — nach Greenberg — die Grundgleichungen aus bestimmten Variationsbedingungen ableiten. Diese Bedingungen haben den Charakter von notwendigen Bedingungen, denen die Verrückungen unterworfen werden müssen. Gezeigt wird nun umgekehrt: genügen die Verrückungen diesen Variationsgleichungen, so stellen sie auch Lösungen des Problems dar.

E. Hardtwig.

Masur, E. F.: An extended upper bound theorem on the ultimate loads of buckled redundant trusses. *Quart. appl. Math.* **14**, 315—317 (1956).

Ergänzung zu der in dies. Zbl. **57**, 403 besprochenen Arbeit.

R. Gran Olsson.

Mitra, D. N.: Finite elastic-plastic rotation of a circular cylinder. *Proc. 1st Congr. theor. appl. Mech.*, Nov. 1—2, 1955, 91—94 (1956).

The paper determines stresses and finite elastic-plastic strains of a rotating circular cylinder with radius a . The author assumes the material as being compressible in both the elastic region ($d \leq r \leq a$) and the plastic region ($0 \leq r \leq d$) (d standing for the elastic-plastic interface). For the elastic region Hooke's law (for finite strains), in the plastic region the Prandtl-Reuss relations for the deviatoric components are introduced, the spherical tensors being proportional. The material is supposed to be ideally plastic, following Tresca's yield condition. Starting from the displacement field, the author determines stresses and strains in both regions, the integration constants and the radius d being found from the continuity conditions for displacements and stresses τ_{rr} at the elastic-plastic interface $r = d$, the boundary conditions $\tau_{rr} = 0$, $\tau_{zz} = 0$ for $r = a$, and the integral condition for vanishing of the axial force in transversal cross-sections. The paper is rather compact, without discussing the results obtained nor giving numerical examples.

W. Olszak.

Parvulescu, N. S.: On the instability of drill pipe strings. *Acad. Républ. popul. Roumaine, Inst. Méc. appl., Revue Méc. appl.* **1**, Nr. 2, 159—178, französ. Zusammenfassung 177—178 (1956).

Zickel, John: Pretwisted beams and columns. *J. appl. Mech.* **23**, 165—175 (1956).

Es wird eine ausführliche Biegetheorie des von Hause aus tordierten Balkens entwickelt. Anwendung: Knicklast eines Stabes von Kreuz-, I- und Rechteck-Profil. Es zeigt sich, daß die Vor-Torsion die Knicklast im allgemeinen herabsetzt (da die Außenfasern weniger tragen, „reduzierte Biegesteifigkeit“), nur bei Stäben

mit sehr verschiedenen Haupt-Trägheitsmomenten kann sie erhöht werden (weil die große Biegesteifigkeit in den Knickvorgang hineingezogen wird). Die Zieglerschen Kurven [Schweizer. Bauzeitung 66, 463 (1948)] ergeben sich als Grenzkurven für sehr schlanke Stäbe.

K. Marguerre.

Olszak, Wacław: Theory of plasticity of non-homogeneous bodies and its practical applications. Proc. 1st Congr. theor. appl. Mech., Nov. 1—2, 1955, 19—50 (1956).

Eine Übersicht der in Polen in den Jahren 1954—55 ausgeführten (und in anderen Zeitschriften ausführlicher dargestellten) Untersuchungen über die Plastizitätstheorie der nichthomogenen Körper, demonstriert an Hand der Lösungsmethode des elasto-plastischen und plastischen Problems eines dickwandigen Kreiszylinders und analogen Problemen für eine nichthomogene dickwandige Kugelschale.

S. Drobot.

Bland, D. R.: Vector fields associated with plane plasticity. Quart. appl. Math. 14, 321—323 (1956).

A symmetric two-dimensional tensor σ_{ij} is associated with the vector v_i by the equations $\sigma_{ij} = M \delta_{ij} + N v_i v_j$ where M and N are functions of v^2 . It is shown that to the stress field of plane plasticity associated vector fields can be found, whereas the converse holds for certain vector fields only. An interesting example of a vector field for which an associated stress field exists is that of the velocity of compressible homenergetic, homentropic fluid flow (unchanging Bernoulli constant; existing p, q -relation). The vector fields corresponding to "plane strain" (Mises or Tresca condition) and to "plane stress" (Mises condition) are written down.

H. Geiringer.

Hodge jr., P. G.: Minimum principles of piecewise linear isotropic plasticity. J. rat. Mech. Analysis 5, 917—938 (1956).

The author studies "piecewise linear" plasticity advocated by him in various publications. The starting point is a yield function which in a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -coordinate system is "piecewise linear". (Such a yield surface may be defined on its own merit, like Tresca's well known hexagonal prism or as an approximation to a chosen continuous yield surface.) The flow rule is taken as required by the v. Mises theory of plastic potential; isotropic strain hardening is admitted. More generally, if Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) are generalized stresses (Prager), the yield function f may be assumed as a combination of several functions f_λ defined by $f_\lambda = \sum_{i=1}^n a_{\lambda i} Q_i - 1$, the $a_{\lambda i}$

being constants. The plastic-potential rule (which requires that in $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -space the "principal" strain-rate vector has the direction of the exterior normal to the yield surface) must then be formulated for general "corners". Next, it is shown that the flow relations (between generalized strain-rates and stresses) may be piecewise integrated, under certain circumstances. Finally, two minimum principles of elasticity theory are extended to certain cases of this linearized plasticity.

H. Geiringer.

•Iliouchine, A.-A.: Plasticité. (Déformation élastico-plastiques). Traduit du Russe par A. Popoff et P. Thomé. Paris: Éditions Eyrolles 1956. V, 376 p. 5520 francs.

The contributions by Russian scientists to the mechanics of the inelastic continuum have been impressive and fundamental. A book by one of the best-known of those research workers is therefore certain to be read with considerable interest by all workers in this field. The present book deals exclusively with problems of elastic-plastic deformation on the basis of a general (non-linear) stress-strain (workhardening) law of the Hencky type under the restriction to small strains. The Mises and Tresca conditions and associated stress-strain relations are treated as special cases of this general relation. The first two chapters deal with the fundamental concepts of stress-and-strain tensors, stress-strain relations under conditions of loading and unloading and include a lucid discussion of the physical-mathematical aspects of the various deformation and flow theories, as well as the concept of the plastic potential

and associated minimum principles. Chapter 3 is concerned with solutions of simple problems, such as elastic-plastic bending, buckling and torsion of bars, and problems of the sphere and the cylinder. Chapters 4 and 5, which make up about one half of the book, contain a very detailed and elaborate analysis of the elastic-plastic bending and buckling of plates and shells of revolution of a work-hardening material, with the carrying capacity of rigid-ideal-plastic structures obtained as limiting cases of the general analysis. Chapter 6 deals with glide-line fields of the incompressible ideal plastic body in plane strain, with application to the problem of penetration, chapter 7 with problems of propagation of plane and spherical waves, as well as of waves due to transversal shock on an elastic-plastic flexible string. The author is obviously well aware of the theoretical shortcomings of the Hencky stress-strain relations used throughout in the actual solution of the various problems. However, the comparison of the various approaches to the formulation of deformation-and-flow-type stress-strain relations in the isotropic plastic medium leads him to the conclusion that the advantages of deformation-type relations in the solution of the elastic-plastic problems far outweigh the inaccuracies associated with their use. In this respect his approach to solutions of boundary value problems in the theory of plasticity which, incidentally, is shared by other outstanding Russian workers in plasticity, differs from that favored by important groups of research workers in the Anglo-Saxon countries. The book represents a very important and refreshing contribution in a field of applied mechanics in which the actual, physically meaningful but mathematically somewhat approximate solution of boundary-value problems has, in recent years, been somewhat neglected in favor of mathematically rigorous solutions of problems of dubious physical meaning. A familiarity with Iljushin's work by all research workers in theoretical plasticity will probably save much effort of duplication of results which, as the book shows, have been available for a number of years to Russian readers.

A. M. Freudenthal.

Velasco de Pando, M.: Eine neue Theorie der Plastizität. Verformung und Fließen des Festkörpers. Koll. Madrid 26.—30. Sept. 1955, 171—175 (1956).

The proposed „new“ theory of plasticity is based on the assumption of the existence of relations, for the work-hardening medium, between strain-rates and stress-rates and is thus a special case of Truesdell's „hypoelastic“ relation. The use of the established equations is, however, not illustrated in the paper.

A. M. Freudenthal.

Bishop, J. F. W.: An approximate method for determining the temperatures reached in steady motion problems of plane plastic strain. Quart. J. Mech. appl. Math. 9, 236—246 (1956).

An approximate method is proposed for the solution of the temperature field generated in steady plane plastic motion by the dissipation of irrecoverable strain-energy. The problem is resolved into two separate steps, one involving heat generation and material transport, the other heat conduction. The first step is solved by setting-up a „transport-chart“ consisting of a grid set-up in the physical plane, at each point of which the initial position of a material element arriving there in the time interval δt , and the temperature rise occurring in its passage through the grid point are noted, assuming no heat conduction and a fixed fraction of work converted into heat. The heat-conduction problem for the same time interval is subsequently solved by replacing the differential equation by a difference equation. The repetition of the computational sequence (I), transport and heat generation, and (II), heat conduction, for a number of time intervals provides an approximate solution of the problem. The method is illustrated by the determination of the temperature field generated in the extrusion of a billet through a square die.

A. M. Freudenthal.

Hopkins, H. G.: The theory of deformation of non-hardening rigid-plastic plates under transverse load. Verformung und Fließen des Festkörpers. Koll. Madrid 26.—30. Sept. 1955, 176—183 (1956).

The equations are established in Cartesian and curvilinear coordinates for the deformation of thin rigid-plastic plates under transverse loads using the Tresca-yield condition.
A. M. Freudenthal.

Signorini, A.: Trasformazioni termoelastiche finite di solidi incomprimibili. C. I. M. E., Teorie non linearizzate in elasticità, idrodinamica, aerodinamica 80 p. (1956).

Si tratta di una esposizione sistematica, in occasione di un Corso C. I. M. E. del contenuto di una memoria dell'A. (questo Zbl. 65, 403) completata dal richiamo di alcuni risultati contenuti in due precedenti memorie (questo Zbl. 28, 21; 36, 395).
T. Manacorda.

Wallisch, W.: Einfluß der Schubverzerrung auf die Eigenschwingungen von Platten. Z. angew. Math. Mech. 36, 291—293 (1956).

Bekanntlich gelingt es, durch eine Verfeinerung der klassischen Theorie der Plattenbiegung, drei anstelle von nur zwei Randbedingungen zu befriedigen und eine Reihe von Effekten zu erklären, welche durch die klassische Theorie nicht erfaßt werden (s. die Arbeiten von Hencky, Reissner, Schäfer und Kromm). Diese Arbeiten beschäftigen sich mit dem statischen Fall, hingegen bilden in dieser Arbeit die Verschiebungs-Grundgleichungen der Elastizitätstheorie den Ausgangspunkt einer mathematisch exakten Näherungstheorie des Problems der transversal schwingenden Platte. Nach einem Integrationsverfahren von E. Weinel werden die Komponenten des Verschiebungsvektors als Funktionen der Ortskoordinaten und der Zeit in Form eines Bernoullischen Polynoms angesetzt. Man betrachtet den Fall der kräftefreien Platte ($\sigma = 0$ für $z = \pm h$). Er liefert zwei partielle Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung. Mit dem Exponentialansatz erhält man zwei transzendente Gleichungen mit einer Näherungslösung, in denen die Oberflächen- und Randbedingungen asymptotisch bezüglich $h/R \rightarrow 0$ erfüllt sind. Der Vergleich mit Versuchsergebnissen (von Chladni gefundene Werte) wurde durchgeführt.
D. Rašković.

Lee, E. H.: Wave propagation in anelastic materials. Verformung und Fließen des Festkörpers. Koll. Madrid 26.—30. Sept. 1955, 129—136 (1956).

The effect of including a simple strain-rate term, as proposed by Malvern, in the equations of one-dimensional plastic wave propagation established by Taylor and Karman is qualitatively discussed in the light of experimental evidence. Plastic waves with linear workhardening are then investigated by using solutions previously obtained for the inelastic („standard“) solid and the results are compared with those of Malvern.
A. M. Freudenthal.

Pacelli, Mauro: Compressione e torsione di due corpi elastici a contatto. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 21, 296—303 (1956).

Il problema della determinazione degli sforzi di taglio nel contatto elastico con attrito e parziale scorrimento è stato risolto da J. L. Lubkin (questo Zbl. 42, 426) in termini finiti nel caso di due sfere. Per lo stesso caso (questo Zbl. 48, 182), e poi nel caso di corpi di forma qualunque (questo Zbl. 65, 406), C. Cattaneo ha stabilito un procedimento che permette di costruire la soluzione in forma di serie, con la possibilità di ottenerne l'approssimazione che se ne desidera. In questa Nota, l'A., osservata un'analogia formale tra le soluzioni date da Cattaneo nel caso di due sfere e nel caso generale, costruisce formalmente, per analogia alla soluzione di Lubkin, la soluzione esatta in termini finiti per il contatto con attrito e parziale scorrimento di

due corpi di forma qualsiasi, controllando poi la sua validità sulle equazioni integrodifferenziali del problema.

T. Manacorda.

Petre, A.: Le flambage des barres droites par choc axial. Acad. Républ. popul. Roumaine, Inst. Méc. appl., Revue Méc. appl. 1, Nr. 2, 153—158, deutsche Zusammenfassung 158 (1956).

Hydrodynamik:

Finn, Robert: Some theorems on discontinuous plane fluid motions. J. Analyse math. 4, 246—291 (1956).

Etude systématique de l'unicité locale des solutions du problème plan des jets ou des sillages, à partir des travaux fondamentaux de A. Weinstein, J. Leray et K. Friedrichs. En utilisant une formule bien connue de T. Levi-Civita, exprimant le théorème des quantités de mouvement dans le cas d'un écoulement potentiel incompressible, l'A. réussit à étendre le théorème d'unicité locale à des parois non-symétriques. Il arrive à se débarrasser des restrictions concernant la courbure totale de la paroi, ce qui présente un intérêt mathématique certain. L'unicité locale est prouvée pour des parois polygonales concaves quelconques, ou bien pour des parois polygonales telles que les vecteurs issus de l'origine et pris parallèlement aux côtés orientés, dans le sens de l'écoulement, soient tous à l'intérieur d'un demi-plan. Les théorèmes d'existence donnés pour les parois polygonales sont ensuite étendus aux cas des parois curvilignes.

C. Jacob.

Fel'zenbaum, A. I.: Über das Studium der Wirbelbewegungen einer Flüssigkeit nach den Methoden der Theorie der analytischen Funktionen mit einer perfekten Menge von singulären Punkten. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat., Mech., Astron., Fis., Chim. 11, Nr. 1, 17—22 (1956) [Russisch].

Bekanntlich kann die Theorie der analytischen Funktionen bei den Untersuchungen der ebenen Strömung von inkompressiblen Flüssigkeiten benutzt werden, insofern in der Flüssigkeit nur isolierte Wirbel existieren. Wenn aber in der Flüssigkeit ganze Gebiete mit Wirbeln gefüllt sind, so existiert in solchen Gebieten kein Geschwindigkeitspotential und folglich auch kein komplexes Potential. Nun betrachtet Verf. ein endliches ebenes Gebiet Σ und in ihm eine perfekte überall unstetige Punktmenge S aus Wirbeln, deren Wirbelstärke γ in den Punkten von S von Null verschieden ist, während sie außerhalb von S gleich Null ist. Er bildet dann die Funktion

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \gamma(t) \ln(z-t) dS, \quad (1)$$

wo z einen Punkt außerhalb von S bezeichnet, t die Menge S durchläuft und dS als Element des Flächenmaßes der Menge S zu betrachten ist. Es wird gezeigt, daß die Funktion (1) die Eigenschaften eines komplexen Potentials besitzt und als solches betrachtet werden kann. Die Methode wurde auf die Berechnung der Zirkulationsströmung und des Auftriebs nach der Kutta-Joukowskyschen Formel angewandt.

T. P. Angelitch.

Lighthill, M. J.: The image system of a vortex element in a rigid sphere. Proc. Cambridge philos. Soc. 52, 317—321 (1956).

Durch einfache Überlegungen wird das Bild eines Wirbelelementes bei Spiegelung an einer Kugel gefunden. Für den transversalen Anteil ergibt sich im Bildpunkt ein transversales Element umgekehrten Vorzeichens; für den radialen Anteil ein gleichsinniges radiales Element, verbunden mit einem gleichförmigen Wirbel, der sich vom Bildpunkt bis zum Kugelmittelpunkt erstreckt. Der letzte Anteil wird durch die Forderung nach Wirbelfreiheit bedingt.

K. Eggers.

Mişicu, M.: Über die Anwendung analytischer Funktionen auf dreidimensionale Probleme der Mechanik deformierbarer Körper. Acad. Républ. popul. Roumaine, Inst. Méc. appl., Revue Méc. appl., 1, Nr. 2, 93—113, französ. Zusammenfassg. 113 (1956).

Deutsche Fassung des 1. Teils der nachstehend besprochenen Arbeit.

Mişicu, M.: Résolution de certains problèmes d'équilibre des milieux continus dans l'espace. I: Procédés de calcul à l'aide de fonctions quaternioniques. — II: Représentation du mouvement des fluides parfaits incompressibles. Commun. Acad. Républ. popul. Roumaine 6, 71—82, 83—86 u. russ. u. franz. Zusammenfassg. 81, 86—87 (1956) [Rumänisch].

I. Verf. bezieht die Punkte des physikalischen, dreidimensionalen Raumes auf die einem nichteuklidischen, vierdimensionalen Raume angehörenden Punkte, indem er zu den tetraedrischen Koordinaten übergeht. Er beweist, daß die Operationen mit Quaternionen den Verrückungen in dem eben eingeführten nichteuklidischen Raume entsprechen. Mit der Heranziehung einer vierten Veränderlichen erhält Verf. eine gewisse Symmetrie in seinen Formeln, indem er verschiedene von Gr. C. Moisil und R. Fueter erhaltene Resultate benutzt. Dadurch finden die Funktionen der Quaternionenvariablen eine angemessene Anwendung auf einige Gleichgewichtsprobleme der kontinuierlichen Medien. Das Lesen der Arbeit könnte viel leichter sein, wenn die benutzte Bezeichnung weniger eigenartig wäre. — II. Man schreibt die Bewegungsgleichungen einer idealen, inkompressiblen Flüssigkeit, indem man die Quaternionen als Koordinaten benutzt. Die auf diese Weise erhaltenen Formen der Kontinuitätsgleichung, der Strom- und Potentialfunktion, der kinetischen Energie usw. werden dazu gebraucht, einige Gleichgewichtsprobleme mittels Funktionen vom Green'schen Typus zu erledigen. Ferner zeigt Verf., daß man neue Flüssigkeitsbewegungen erhalten kann, indem man bekannte Bewegungen einer gewissen analytischen Transformation unterwirft. Hierzu ist zu beachten, daß der Begriff „konforme Abbildung“ vom Verf. im Sinne der isogenen Transformation Volterras angewendet wird.

V. Vălcovici.

Hopf, Eberhard: Repeated branching through loss of stability. An example. Proc. Confer. Differential equations, Maryland 1955, 49—56 (1956).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 31, 329) wird versucht, eine allgemeine Aussage über den laminaren bzw. turbulenten Charakter einer eindimensionalen instationären Strömung für $t \rightarrow \infty$ und in Abhängigkeit von der Zähigkeit zu machen.

J. Pretsch.

Khamrui, S. R.: On the slow steady two-dimensional flow of a viscous liquid in a channel bounded by two non-concentric circular arcs. Bull. Calcutta math. Soc. 48, 155—158 (1956).

En utilisant le système orthogonal de coordonnées curvilignes défini par $\alpha + i\beta = \ln \frac{x + i(y+a)}{x - i(y-a)}$, on trouve pour la fonction de courant une solution de la forme $h\psi = A_0 \operatorname{ch} \alpha + B_0 \alpha \operatorname{ch} \alpha + C_0 \operatorname{sh} \alpha + D_0 \alpha \operatorname{sh} \alpha + [A_1 \operatorname{ch} 2\alpha + B_1 + C_1 \operatorname{sh} 2\alpha + D_1 \alpha] \cos \beta$, les coefficients A_0, \dots, A_1, \dots étant calculés explicitement.

Dan. Gh. Ionescu.

Broer, L. J. F.: On the hydrodynamics of visco-elastic fluids. Appl. sci. Research A 6, 226—236 (1956).

This paper deals with two special cases of motion of a viscoelastic incompressible fluid (Maxwell-body) characterized by the following stress-strain relation $\sigma_{ik} + \tau(\partial \sigma_{ik} / \partial t) = \mu \dot{D}_{ik}$ where $\dot{D}_{ik} = (\partial v_i / \partial x_k) + (dv_k / dx_i)$ is the rate-of-strain tensor and σ_{ik} the deviator of the stress tensor. In the first case, the author obtains an exact solution for periodic laminar flow in a cylindrical tube, after linearizing the equations

of motion by neglecting the convective parts $v_i \partial / \partial x_i$ of the acceleration and elastic terms. In the second case, an approximate solution for the slow steady flow in a film of variable thickness is given. This solution is constructed by using an iteration process in which the first approximation is given by the solution of the corresponding viscous problem in the Stokes approximation. *M. Predeleanu.*

● **Lewis, B., R. N. Pease and H. S. Taylor** (edited by): **Combustion processes.** (High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion. Vol. 2.) London: Oxford University Press 1956. XV, 662 p. 84 s. net.

Lutz, Otto: **Diagrammдарstellungen der Vorgänge in Brennkammern und Staustrahltriebwerken.** Jahrbuch 1955 wiss. Ges. Luftfahrt, 252—264, engl. und französ. Zusammenfassung 264—265 (1956).

Zur Vermeidung umständlicher analytischer Formeln werden graphische Methoden empfohlen. Vor allem die affine Verzerrung eines normierten Druck-Geschwindigkeits-Diagrammes (nach Busemann) dient zur Berechnung stationärer Rohrströmungen eines vollkommenen Gases mit Wärmezufuhr und evtl. Verdichtungsstoß, im übrigen isentropisch und reibungslos. Behandelt werden: konische und zylindrische Brennkammer, letztere mit Einlaufdüse, mit und ohne Enddüse, mit und ohne Verdichtungsstoß im Einlauf; maximale Wärmezufuhr, Ruhedruckverlust durch Wärmezufuhr oder Stoßfront, Schubziffer, Gesamtwirkungsgrad, Mischung zweier Gasströmungen, optimaler Mischdruck, Abweichung der Luft vom Verhalten des vollkommenen Gases. *F. Wecken.*

Mackie, A. G.: **The generalized radially symmetric wave equation.** Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 236, 265—277 (1956).

La recherche des solutions à symétrie radiale de l'équation des ondes dans l'espace à $k + 1$ dimensions se ramène à celle des solutions de l'équation (1) $\Phi_{RR} + (k/R) \Phi_R - \Phi_{TT} = 0$. L'A. résoud le problème de Cauchy pour l'équation (1), où cette fois k est une constante positive quelconque, avec les données $[\Phi]_{T=0} = f(R)$, $[\Phi_T]_{T=0} = g(R)$ en ramenant (1) à l'équation d'Euler-Poisson (2) $W_{rs} + N(r+s)^{-1}(W_r + W_s) = 0$, où $R + S = r$, $R - S = s$, $N = 2k$, et en utilisant les résultats donnés antérieurement (v. ce Zbl. 65, 330) sur la représentation de la solution moyennant des intégrales de contour. Il suffit de considérer le cas où $f(R) = 0$. La solution, obtenue d'abord dans le domaine $T \leq R$, $T \geq 0$, est trouvée ensuite dans le premier quadrant $R \geq 0$, $T \geq 0$. Des applications de ce résultat sont donnés à la dynamique des gaz, l'équation (2) étant celle qui régit l'écoulement unidimensionnel non-permanent d'une masse gazeuse, en contact avec le vide, dont on se donne la distribution initiale de la densité. En second lieu, on peut obtenir la solution du problème de Cauchy relatif à (1) par la méthode de la séparation des variables. La comparaison de la représentation intégrale ainsi obtenue de la solution, avec celle antérieure, conduit à des conclusions relatives à certaines intégrales concernant des fonctions de Bessel. Finalement, le cas où $k < 0$ est également considéré et la méthode de représentation par des intégrales de contour permet d'obtenir la solution de (1) telle que $\Phi = h(T)$ sur la ligne singulière $R = 0$. *C. Iacob.*

Ovsjannikov (Ovsjannikov), L. V.: **A new solution of the hydrodynamic equations.** Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 47—49 (1956) [Russisch].

Es wird eine neue exakte partikuläre Lösung der Gleichungen $du/dt + (1/\rho) \Delta p = 0$, $d \log \rho / dt + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, $d \log p / dt + \gamma \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ für die adiabatische Strömung kompressibler Flüssigkeiten gefunden. Dabei bedeutet $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ den Geschwindigkeitsvektor, während andere Bezeichnungen allgemein üblich sind. Die gefundene Lösung lautet $\mathbf{u} = (dM/dt) M^{-1} \mathbf{x}$, $\rho = (1/|M|) F(M^{-1} \mathbf{x})$, $p = (1/|M|^\gamma) G(M^{-1} \mathbf{x})$. Hier bezeichnet $M = M(t)$ eine nicht singuläre quadratische Matrix dritter Ordnung, die als Lösung der Matrixgleichung $M^*(d^2 M / dt^2) + |M|^{1-\gamma} L = 0$ erhalten wird, M^* die Trans-

ponierte von M und $|M|$ den Modul der Determinante der Matrix M . L ist eine konstante quadratische Matrix dritter Ordnung, $F = F(x)$ und $G = G(x)$ zwei beliebige Funktionen, die der Gleichung $\nabla G = F L x$ genügen. *T. P. Angelitch.*

Guiraud, Jean-Pierre: Sur la nature de la singularité d'un écoulement de fluide compressible au voisinage de la pointe avant d'une aile delta en régime subsonique. C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 2012—2014 (1956).

Nach P. Germain [Rech. aéronaut. no. 44, 3—8 (1955)] läuft das Studium der Singularität der Unterschallströmung um die Spitze eines Dreiecksflügels auf die Frage hinaus: Für welche Werte von ν existiert eine harmonische Funktion der Form $\varphi(x_1, x_2, x_3) = R^\nu f(x_1/R, x_2/R, x_3/R)$, $R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, die den Bedingungen $\varphi_{x_3}(x_1, x_2, 0) = 0$ für $|x_2| < x_1 \tan \gamma$ und $\varphi(x_1, x_2, 0) = 0$ für $|x_2| > x_1 \tan \gamma$ genügt (γ halber Öffnungswinkel des Dreiecksflügels). R. Legendre (dies. Zbl. **71**, 195) gab einen Näherungswert für $\nu(\gamma)$ für den Fall, daß γ nahe bei $\frac{1}{2}\pi$ liegt. In vorliegender Note wird der Näherungswert $\nu \simeq 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos \gamma)$ gefunden für den Fall, daß γ nahe bei Null liegt. Zur Herleitung entwickelt man nach Einführung der mit x_1, x_2, x_3 durch $x_1/R = (1 - \xi^2 - \eta^2)(1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1}$, $x_2/R = 2\xi(1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1}$, $x_3/R = 2\eta(1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1}$ zusammenhängenden Variablen ξ, η in dem vollständigen orthomierten System der Gegenbauerschen ultrasphärischen Polynome die Greensche Funktion des folgenden Randwertproblems: ν so zu bestimmen, daß eine Lösung $F(\xi, \eta)$ von $\Delta F + 4\nu(\nu + 1)(1 + \xi^2 + \eta^2)^{-2}F = 0$ existiert, welche die Bedingungen erfüllt: $F_\eta(\xi, 0) = 0$ für $|\xi| < \tan \gamma/2$, $F(\xi, 0) = 0$ für $|\xi| > \tan \gamma/2$.

H. Behrbohm.

Bader, W.: Graphisches Näherungsverfahren zur Bestimmung der Geschwindigkeit bei kompressibler Strömung. Z. angew. Math. Mech. **36**, 466—468 (1956).

Das Verfahren gestattet die angenäherte Ermittlung der Geschwindigkeitsverteilung für die Umströmung eines Profils bei einer stationären wirbel- und quellenfreien ebenen Unterschallströmung. Zunächst wird ein Kurvennetz ξ_i, η_k , das der Zustrom- und Abflußbedingung annähernd genügt, konstruiert, wobei die η_k -Kurven annähernd mit einzelnen Stromlinien zusammenfallen, während die ξ_i -Kurven ihre Orthogonaltrajektorien darstellen. Hieran schließt sich eine Rechenvorschrift zur Geschwindigkeitsermittlung und eine Iterationsvorschrift zur Verbesserung des Kurvennetzes. Aus dem Gradienten der η_k -Kurven oder auch aus der Abschätzung der Lage der Asymptoten der ξ_i -Kurven wird im wesentlichen auf geometrischem Wege ein roher Näherungswert der Geschwindigkeit $w(\xi, 0)$ auf der Profilstromlinie gewonnen. Mit Hilfe der Forderung der Wirbelfreiheit gewinnt man dann die Geschwindigkeit $w(\xi_i, \eta_k)$ in den einzelnen Punkten des Kurvennetzes. Eine Verbesserung der η_k -Kurven wird aus der Kontinuitätsbedingung durch Vergleich der Abstände zwischen den η_k -Kurven mit den entsprechenden bekannten Abständen in der Parallelströmung weit vor dem Profil ermittelt. Zu den abgeänderten η_k -Kurven sind anschließend die iterierten Orthogonaltrajektorien $\xi_i = \text{const.}$ zu zeichnen. Aus der Bedingung der Wirbelfreiheit kann jetzt der iterierte Wert $w(\xi, 0)$ ermittelt werden.

F. Reutter.

Bader, W.: Zum Kompressibilitätseinfluß auf den Stromlinienverlauf. Z. angew. Math. Mech. **36**, 469—471 (1956).

Vorausgesetzt ist eine stationäre, wirbel- und quellenfreie ebene Unterschallströmung eines kompressiblen Mediums (ideales Gas) mit konstantem Ruhezustand. Ausgehend von der als bekannt vorausgesetzten inkompressiblen Strömung wird im Anschluß an vorstehend besprochene Mitteilung der Einfluß der Kompressibilität auf den Stromlinienverlauf um ein Profil bestimmt. Auf der Profilstromlinie einschließlich der Kontur werden zunächst einzelne Punkte festgelegt und die Orthogonaltrajektorien der aus der bekannten inkompressiblen Strömung näherungsweise

vorliegenden Stromlinien durch diese Punkte bestimmt. Dieses Kurvennetz wird dann unter jeweiliger Berechnung von Geschwindigkeit und Dichte in den Schnittpunkten iterativ verbessert.

F. Reutter.

● **Robinson, A. and J. A. Laurmann: Wing theory.** (Cambridge Aeronautical Series, Nr. 2.) Cambridge: At the University Press 1956. IX, 560 p. 132 text-fig. 75/-net.

Inhalt: I Grundlagen (79 S.): 1. Einleitung, 2. Kinematik, 3. Kontinuitätsgleichung, 4. Eulers Bewegungsgleichungen, 5. Wirbel und Zirkulation, 6. Bernoullis Gleichung, 7. Quell- und Dipolverteilungen, 8. Greensche Formel, 9. Wirbelverteilungen, 10. Zweidimensionale Strömung, 11. Strömung mit Reibung, 12. Grenzschichttheorie, 13. Turbulenz, 14. Joukowski-Bedingung, 15. Strömung hinter dem Flügel. II. Theorie des Tragflügels in stationärer, zweidimensionaler Strömung (89 S.): 1. Allgemeines, 2. Formeln von Blasius, 3. Gesetz von Kutta-Joukowski, 4. Joukowski-Profile, 5. Konjugierte Funktionen, 6. Methode von Theodorsen, 7. Lighthills Methode, 8. Dünne Profile, 9. Goldsteins Näherungsmethode, 10. Doppel Flügel, 11. Gitter, 12. Profilwiderstand. III. Theorie des Tragflügels in stationärer, dreidimensionaler Strömung (129 S.): 1. Einleitung, 2. Aerodynamische Kräfte, 3. Traglinientheorie, 4. Zusammengesetzte tragende Einheiten, 5. Variationsprinzipien, 6. Quell- und Dipol-Darstellungen, 7. Rechteckflügel, 8. Wirbeltheorie, 9. Beschleunigungspotential, Kreisflügel, 10. Flügel kleiner Streckung, 11. Windkanal-Interferenz. IV. Tragflügel in kompressibler Strömung (83 S.): 1. Einleitung, 2. linearisierte Unterschallströmung, 3. Hodographenmethode für zweidimensionale Unterschallströmung, 4. Theorien höherer Ordnung für Unterschallströmung, 5. Linearisierte Überschallströmung, 6. Zweidimensionale Probleme der linearisierten Überschallströmung, 7. Quell-Senkenmethoden: Symmetrischer Fall, 8. Linearisierte Überschallströmung des Flügels mit Anstellung, 9. Spezielle Koordinaten, 10. Keglige Strömungen, 11. Weitere Methoden und Probleme der linearisierten Überschallströmung, 12. Theorien höherer Ordnung für Überschallströmung, 13. Schallnahe Strömung. V. Theorie des Tragflügels in instationärer Strömung (70 S.): 1. Einleitung, 2. Zweidimensionale instationäre inkompressible Strömung, 3. Zweidimensionale Strömung bei konstanter Fluggeschwindigkeit, 4. Nicht-gleichförmige mittlere Geschwindigkeit, 5. Dreidimensionale instationäre inkompressible Strömung, 6. Instationäre kompressible Unterschallströmung, 7. Instationäre kompressible Überschallströmung. — Das aus Vorlesungen hervorgegangene Werk ist für Fortgeschrittenen-Kurse an der Universität, sowie für Aerodynamiker in Industrie und Forschung bestimmt. Dargestellt wird in erster Linie die mathematische Theorie; physikalische Überlegungen, experimentelle Methoden und Ergebnisse sowie technische Nutzenanwendungen treten demgegenüber zurück. Mathematische Kenntnisse, insbesondere der Funktionentheorie, werden vorausgesetzt. Die heute im wesentlichen abgeschlossene Theorie der inkompressiblen, reibungsfreien Strömung wird ziemlich vollständig gebracht, i. a. unter Beschränkung auf die Verhältnisse am Flügel selbst; Rumpf-Flügel-Interferenz z. B. oder das Aufrollen des Wirbelbandes werden nicht behandelt. Zahlreiche Literaturhinweise, die in einem über vier Seiten langen Anhang bis ins Jahr 1955 fortgeführt sind, regen zu weitergehenden Studien an, insbesondere in der Gasdynamik. Das hervorragend ausgestattete Buch hat eine merkliche Lücke in der aerodynamischen Lehrbuchliteratur geschlossen, die klare Darstellung wird sicher viele Leser finden.

J. Weissinger.

Landweber, L. and C. S. Yih: Forces, moments, and added masses for Rankine bodies. *J. Fluid Mech.* 1, 319—336 (1956).

Verff. geben eine vereinfachte Ableitung und eine Verallgemeinerung der hydrodynamischen Relationen von Kirchhoff, Taylor, Lagally u. Cummins über die Bewegung eines Körpers in einer reibungslosen und inkompressiblen Flüssig-

keit. Nichtstationäre Bewegungen, beliebige Translations- und Rotationsbewegungen werden betrachtet. Für eine Rotationsbewegung werden die Koeffizienten der zugeordneten Massen im Fall eines Ellipsoides durch die Singularitäten innerhalb des Körpers ausgedrückt. Ferner werden Näherungsformeln für längliche Körper hergeleitet.

G. Kelbg.

Jacobs, Willi: Interferenz zwischen Rumpf und Flügel von kleinem Seitenverhältnis nach der Theorie schlanker Körper. Jahrbuch 1955 wiss. Ges. Luftfahrt, 168—171, engl. und französ. Zusammenfassung 171 (1956).

Das Störungspotential erfüllt die Laplacesche Gleichung in Ebenen normal zur (ungestörten) Anströmungsrichtung, so daß Methoden der konformen Abbildung anwendbar werden. In Erweiterung einer Arbeit von J. R. Spreiter [J. aeronaut. Sci. 19, 571 (1952)], der den Mitteldecker behandelt hat, werden die Auftriebsverteilungen für verschiedene Verhältnisse der Flügelspannweite zum Rumpfdurchmesser einer Schulterdeckeranordnung berechnet.

W. Szablewski.

Rott, Nicholas and William E. Smith: Some examples of laminar boundary-layer flow on rotating blades. J. aeronaut. Sci. 23, 991—996, 1006 (1956).

Ein Zylinder rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse, die senkrecht zu den Erzeugenden (Spannweitenkoordinate Y) durch die „Profilvorderkante“ $X = 0$ geht. In Gebieten, wo der Abstand X von der Vorderkante klein gegen den Abstand von der Rotationsachse ist, ist die Geschwindigkeitskomponente u senkrecht zu den Erzeugenden in der Grenzschicht näherungsweise die gleiche wie im entsprechenden zweidimensionalen Problem. Die Komponente v in Spannweitenrichtung genügt einer linearen partiellen Differentialgleichung mit von u abhängigen Koeffizienten. Für die von Falkner und Skan sowie von Hartree im Zweidimensionalen behandelte Außengeschwindigkeit $u_1 = \omega Y(x/c)^m$ (c = Sehnenlänge) läßt sich die Bestimmung von v mittels bekannter Transformationen zurückführen auf die Lösung der beiden Randwertprobleme $g'' + f g' - 2 f' g = -2$, $h'' + f h' - (2 - \beta) f' h = -(2 - \beta) f'$ mit $\beta = 2m/(m + 1)$, $g(0) = h(0) = 0$, $g(\infty) = h(\infty) = 1$, in der f die (von Hartree berechnete; transformierte) Geschwindigkeit u bedeutet. Die Funktionen g, h sind für verschiedene, auch negative Werte von m durch numerische Integration berechnet worden; v ergibt sich aus ihnen durch lineare Kombination mit von x abhängigen Koeffizienten. Aus diesen Resultaten läßt sich dann leicht die Geschwindigkeitskomponente v^* senkrecht zu den Potentialstromlinien berechnen. Eine Auftragung von v_{max}^* über der Flügeltiefe mit m als Parameter zeigt minimale Werte, wenn m etwa zwischen 0,1 und 0,3 liegt. — Liegt die Rotationsachse nicht in der Vorderkante, so ist die (bekannte) Geschwindigkeitsverteilung des schiebenden Zylinders zum obigen v zu addieren.

J. Weissinger.

Truckenbrodt, E.: Ein einfaches Näherungsverfahren zum Berechnen der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung. Forsch. Gebiete Ingenieurwes. 22, 147—157 (1956).

Es wird ein von dem Impulssatz ausgehendes Näherungsverfahren zur Berechnung der laminaren Grenzschicht angegeben, welches für die ebene Strömung und den Rotationskörper anwendbar ist für eine beliebige kontinuierliche Verteilung der Absaugegeschwindigkeit längs der Kontur. Der Verlauf der Impulsverlustdicke längs der Kontur des umströmten Körpers wird aus einer nichtlinearen Differentialgleichung erster Ordnung erhalten. Während früher bekanntgewordene Rechenverfahren bei bestimmten Werten des Absaugeparameters versagen, besitzt das vorliegende Verfahren diesen Nachteil nicht mehr. Die Brauchbarkeit des neuen Verfahrens wird durch Vergleich mit einigen exakten Lösungen geprüft. Darüber hinaus werden mehrere Beispiele berechnet.

H. Schlichting.

Graff, H. M. de: Comments on viscous heating. J. aeronaut. Sci. 23, 978—979 (1956).

Es wird für die ebene Couette-Strömung die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung infolge Reibungswärme berechnet. Die Prandtl-Zahl wird zu $Pr = 1$ angenommen.

H. Schlichting.

Geis, Theo: Bemerkung zu den „ähnlichen“ instationären laminaren Grenzschichtströmungen. Z. angew. Math. Mech. 36, 396—398 (1956).

Diese Note enthält ergänzende Bemerkungen zu einer früheren Arbeit von H. Schuh über den gleichen Gegenstand (dies. Zbl. 67, 430).

H. Schlichting.

•Nickel, K.: Bemerkungen über dreidimensionale, laminare und kompressible Grenzschichten. (Bericht 56/23). Braunschweig: Institut für Strömungsmechanik der TH Braunschweig 1956. 17 S., 1 Abb., 1 Tab. DM 7,—.

Es werden allgemeine Probleme und Schwierigkeiten bei der rechnerischen Behandlung dreidimensionaler, laminarer, inkompressibler Grenzschichten erörtert. Die beiden Fälle, in denen eine Entkopplung der Grenzschichtgleichungen möglich ist, werden näher erläutert. Am Beispiel des Pfeilflügels wird gezeigt, wie sich diese Entkopplung zum Aufbau eines Näherungsverfahrens verwenden läßt. Einer Lösung nach Art des Pohlhausen-Verfahrens steht jedoch die Schwierigkeit gegenüber, daß die Formenmannigfaltigkeit der Grenzschichtprofile viel größer ist als im zweidimensionalen Fall. Schließlich wird eine bisher unbekannte dreidimensionale „ähnliche“ Lösung angegeben, die zwei bei der dreidimensionalen Grenzschicht neu hinzukommende Phänomene aufweist. Es tritt Rückströmung auf ohne Ablösung der Strömung, und in der Grenzschicht sind die Geschwindigkeiten teilweise größer als die der Außenströmung (Übergeschwindigkeiten).

K. Gersten.

Nickel, K.: Eine einfache dreidimensionale laminare Grenzschicht. Z. angew. Math. Mech. 36, 303—304 (1956).

In dieser Arbeit werden einige spezielle dreidimensionale Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen für stationäre, inkompressible Schichtenströmungen ($v = \text{const.}$) angegeben. Die Außenströmung besitzt eine Querkomponente $W(x)$. Die Überlegungen fußen auf Annahmen, die es erlauben, den Druck p und zwei Geschwindigkeitskomponenten u, v unabhängig von der dritten Komponente w zu berechnen. Bei Beschränkung auf ein Couette-, Poiseuille- bzw. asymptotisches Absaugeprofil für u gelingt es, nach Einführung geeigneter äußerer Kräfte, w durch Besselfunktionen darzustellen. Im Falle des Absaugeprofils kann die w -Verteilung beliebig viele Schwankungen zwischen Rückströmung und Übergeschwindigkeit ausführen; eine Erscheinung, die nur bei Außenströmungen auftritt, die nicht drehungsfrei sind.

V. Saljnikov.

Pai, S. I.: Laminar jet mixing of two compressible fluids with heat release. J. aeronaut. Sci. 23, 1012—1018 (1956).

Verf. betrachtet kompressible laminare Strahlmischungsvorgänge mit chemischer Reaktionswärmeerzeugung. Es wird angenommen, daß die Mischung ein kontinuierliches Medium darstellt, daß die Gase als ideal betrachtet werden können, und daß die chemische Reaktion nach dem Arrheniusschen Gesetz und ohne rückwärtige Reaktion verläuft. Es werden die Zustands-, Kontinuitäts-, Diffusions-, Bewegungs- und Energiegleichung aufgestellt, statt y wird die Stromfunktion als unabhängige Variable eingeführt. Das erhaltene Differentialgleichungssystem (welches sich auf verallgemeinerte Wärmeleitungsgleichungen reduziert) wird durch ein Differenzenverfahren gelöst, dabei werden noch die folgenden Vereinfachungen gemacht: gleiche Molekulargewichte der beiden Mischungskomponenten; Zähigkeitskoeffizient proportional der absoluten Temperatur; Konstanz von C_p , P_r und Schmidtscher Zahl; vernachlässigbare thermische Diffusion. Die folgenden einfachen Fälle werden betrachtet: Strahlvermischung eines kompressiblen Gases; isotherme

Vermischung zweier kompressibler Gase; Strahlvermischung zweier kompressibler Gase mit gleicher Geschwindigkeit. Für den letzten Fall werden numerische Beispiele angegeben.

P. Čolak-Antić.

Emmons, H. W.: The film combustion of liquid fuel. Z. angew. Math. Mech. 36, 60—71 (1956).

Bei der Verbrennung von Tröpfchen, die größer als etwa 10^{-1} Zoll sind, liegt die chemische Reaktionszone infolge von Wärmeleitungs- und Diffusionsprozessen soweit vom Tröpfchen entfernt, daß die Verbrennungsgeschwindigkeit von diesen Prozessen gesteuert wird. Zur theoretischen Erfassung dieses Vorgangs wird angenommen, daß der Brennstoff eine ebene Oberfläche besitzt, an der die Luftströmung eine Grenzschicht bildet mit einer stabilen Verbrennungszone im Innern, zu welcher von der ‚Wand‘ her verdampfter Brennstoff, von außen her Sauerstoff diffundiert. Der Vorgang wird unter den üblichen Annahmen der Grenzschichttheorie beschrieben durch vier Gleichungen: Erhaltung von Masse, Impuls, Energie und Sauerstoff. Unter der Voraussetzung, daß Sauerstoffverbrauch und produzierte Wärme proportional und daß die kinematische Zähigkeit ν , die thermische Diffusivität $\alpha = k/c_p \rho$ und der Diffusionskoeffizient D von Sauerstoff in Luft einander gleich sind, läßt sich die thermische Energie als linearer Ausdruck der Tangentialgeschwindigkeit u schreiben und damit das System der vier Gleichungen auf das mathematische Problem der kompressiblen Grenzschicht mit Ausblasung reduzieren. Unter der weiteren Annahme, daß das Produkt $\rho \mu$ aus Dichte und Zähigkeit konstant ist, erhält man mittels der Transformation von Chapman und Rubesin [J. aeronaut. Sci. 16, 447—565 (1949)] eine exakte Lösung durch Lösung des Randwertproblems $f''' + f f'' = 0$, $f'(0) = 0$, $f'(\infty) = 2$, $f(0)/f''(0) = \frac{1}{2} B$. In Abhängigkeit von B (‚Heat Ratio‘) lassen sich dann Widerstandsbeiwert und Verbrennungskoeffizient \bar{C}_0 (Verbrannter Brennstoff dividiert durch $\rho_\infty u_\infty$) berechnen (Tabelle), wobei \bar{C}_0 den Wert $1,24 Re^{-1/2}$ nicht überschreiten kann, weil dann die Grenzschicht ‚weggeblasen‘ wird. Eine weitere (Näherungs-)Lösung wird mittels der Rayleighschen Analogie gewonnen. Die theoretischen Resultate zeigen gute Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen (an kugelförmigen Tröpfchen).

J. Weissinger.

Tipei, N.: Contributions à l'étude de la lubrification hydrodynamique. Acad. Républ. popul. Roumaine, Inst. Méc. appl., Revue Méc. appl. 1, Nr. 1, 107—139 (1956).

Es wird die Theorie der Zapfenschmierung mit Hilfe von Differenzengleichungen entwickelt und angewendet auf Zapfen mit konstanten oder veränderlichen Werten für Belastung und Geschwindigkeit sowie auf Zapfen mit veränderlichen geometrischen Elementen (konstanter Radius und lineares Spiel oder konstantes Spiel und nach einem Parabelgesetz veränderlicher Radius oder Radius und Spiel exponentiell veränderlich).

J. Pretsch.

Korst, H. H.: A theory for base pressures in transonic and supersonic flow. J. appl. Mech. 23, 593—600 (1956).

Zweidimensionale stationäre Schall- und Überschallströmung längs einer Wand mit einspringender Ecke. Gesucht ist der Totwasserdruck an der Stufe (base pressure). Er wird beeinflusst a) von der an der Stufe ankommenden Strömung mit ihrer ausgebildeten Wandgrenzschicht, b) von der Expansion um die Ecke, c) von der Vermischung längs der freien Mischungszone und d) von dem abschließenden Verdichtungsstoß am Ende des Totwassergebiets. Physikalische Voraussetzungen: b) An der Ecke finde außerhalb der Reibungsschicht die ungestörte Prandtl-Meyer-Expansion statt. c) Dem Totwassergebiet werde der (annähernd konstante) Druck der Außenströmung aufgeprägt. d) Der abschließende Verdichtungsstoß werde aus der, als reibungsfrei angenommenen, Außenströmung bestimmt. In der Mischungszone c) gehen die Differentialgleichungen einer turbulenten Grenzschicht nach

starker Vereinfachung über in die Wärmeleitungsgleichung, diese wird (wie in einer früheren Arbeit, vgl. dies. Zbl. 58, 409) längs eines „natürlichen Koordinatensystems“ integriert. Es existiert eine asymptotische Lösung, die sich deuten läßt als Lösung für verschwindende Grenzschichtdicke im Bereich von a), d. h. also für $Re \rightarrow \infty$ (Re = Reynoldszahl der Anströmung). Mit dieser speziellen Lösung bestimmt sich der Totwasserdruck eindeutig, im allgemeinen Falle sind dazu noch empirische Daten erforderlich. Der Vergleich der vereinfachten Theorie mit Meßergebnissen bei Totwassergebieten mit und ohne Massenzuwachs gibt gute Übereinstimmung.

K. Nickel.

Keune, Friedrich: Der gewölbte und verwundene Tragflügel ohne Dicke in Schallnähe. Forsch.-ber. Wirtsch.-Verkehrsminist. Nordrhein-Westfalen 279, 25 S. (1956).

Die bekannte Theorie von R. T. Jones [Technical Rep. 835, Nat. Advisory-Committee Aeronaut., Washington (1946)] für ebene, vorn spitze Flügel kleiner effektiver Streckung $\sqrt{|M_\infty^2 - 1|} b^2/F$ (M_∞ Machzahl der Anströmung, b Spannweite, F Fläche des Flügels) wird von der Voraussetzung „eben“ befreit und auf schwach verwundene und schwach gewölbte Flügel übertragen. Dies geschieht durch eine singuläre Darstellung des Geschwindigkeitspotentials $\varphi(x, y, z)$ mit Hilfe der in jedem senkrecht zur Anströmung gelegten Flügelquerschnitt $x = \text{const}$ abgehenden Wirbel als Belegung der Bezugsebene $z = 0$ des Flügels. Allgemeine Formeln werden angegeben für den Gesamtauftrieb, für den Anstellwinkel bei Gesamtauftrieb Null, für das Rollmoment und für das Längsmoment resp. die Druckpunktlagen des Flügels. Doch sind die Längsmomentenformeln falsch, wie z. B. der Vergleich von Gl. (14) und Gl. (16) der Arbeit bei verschwindendem Auftrieb ergibt. — Die Formeln werden auf verschiedene Spezialfälle angewandt, wobei der Flügelgrundriß durch den lokalen Spannweitenverlauf $s(x) = \sigma x (2 - (1 - m)x/x_0)/(1 + m)$ gegeben, die Verwindung als $z = -\chi_n x(y/\sigma x_0)^{2n}$, die Wölbung bis zu in x/x_0 quadratischen Gliedern angesetzt wird (x_0 Wurzelteiefe, m ein reeller Parameter $0 \leq m < \infty$, $n \geq 0$ ganz, χ_n eine nur von n abhängige Konstante, $\sigma = b/2 x_0$). Für $m = 1$ (Dreiecksflügel) ergibt Vergleich mit den nach der Theorie der verallgemeinerten konischen Felder gerechneten (nicht auf kleines Seitenverhältnis beschränkten) Fällen gute Übereinstimmung der Näherungstheorie des Verf. mit den Gliedern erster Ordnung einer Entwicklung der Formeln der allgemeinen Theorie nach der Streckung. Interessant für den Praktiker dürften die Bemerkungen über die zur Erzeugung druckpunktfester Flügel kleinen Seitenverhältnisses notwendigen Wölbungen sein.

H. Behrbohm.

Oswatitsch, K. and F. Keune: The flow around bodies of revolution at Mach number 1. Proc. Confer. High-Speed Aeronautics, Jan. 20—22, 1955, 113—131 (1955).

Seien x, \bar{y} die Cartesischen Koordinaten in einer Meridianebene (Ursprung in der Körperrnase), U, V die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten einer reibungs- und wirbelfreien Strömung um einen nicht-angestellten Rotationskörper $\bar{y} = h(x)$. Für schlanke Körper kann die gasdynamische Grundgleichung approximativ (1) $-u \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + v / y = 0$ geschrieben werden, falls bei Anströmmachzahl $M_\infty = 1$ [mit $\gamma = c_p/c_v$ (Verhältnis der spezif. Wärmen), τ = relative Körperdicke, c^* = kritische Schallgeschwindigkeit] $y = \bar{y} / (\gamma + 1) \pi \tau^2$, $u = \pi^{-1} \tau^{-2} (U/c^* - 1)$, $v = 1/\sqrt{(\gamma + 1) (\pi \tau^2)^3} \cdot V/c^*$ gesetzt wird. Wegen der Wirbelfreiheit kann $\varphi(x, y)$ mit $u = \varphi_x$, $v = \varphi_y$ eingeführt und also die nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung von gemischtem Typ (2) $-\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_y \varphi_{yy} + \varphi_y / y = 0$ betrachtet werden. — In einer Arbeit des Ref. (dies. Zbl. 36, 118) war (2) — ohne das Glied φ_y / y — für den Meyerschen Typ des Schalldurchgangs durch ebene Lavaldüsen dadurch behandelt worden, daß der Längsgeschwindigkeitsgradient $\varphi_{xx} = \partial u / \partial x$ der Düsenströmung aus dem Querschnittsverlauf der Düse gemäß der Kontinuitätsbedingung des Massenflusses mittels der Stromfadentheorie gewählt und somit eine gegebene Funktion $\varphi_{xx} = G(x)$ wurde. Das Durchströmungsproblem von ge-

mischem Typ wurde somit ein solches von durchgehend parabolischem Typ, und die hiermit gerechneten Fälle gaben in einem größeren Machzahlbereich gute Übereinstimmung mit anderweitig berechneten Düsen, gestatteten darüber hinaus aber auch die Behandlung von Düsen stärkerer Krümmung. — Von diesem Gedanken ausgehend wird in vorliegender Arbeit für das Umströmungsproblem von Rotationskörpern der Übergang von (2) zu einer parabolischen Gleichung dadurch bewerkstelligt, daß (ohne tiefere Physik) kurzerhand $q_{xx} = \text{const} = a^{-2}$ gesetzt wird. Für die so modifizierte Gleichung (2) wird die Umströmungsbedingung approximativ auf der Körperachse in der Form $\lim_{y \rightarrow 0} v y = Q_x(x)/(2\pi \cdot \pi \tau^2)$ erfüllt, wo $Q(x)$ die

Querschnittsfläche des Körpers an der Stelle x bedeutet. Als Anström- resp. Anfangsbedingung wird $u(0, y) = v(0, y) = 0$ gewählt und durch einige numerische Rechnungen auf seine Approximationsgüte geprüft. So entsteht ein klassisches Problem aus der Theorie der Wärmeleitung, dessen wohlbekannte Lösung durch Belegung der Körperachse mit quellartigen Schallsingularitäten gewonnen wird. Es wird vorgeschlagen, nur den vorderen (Unterschall-)Teil der Strömung parabolisch, den Überschallteil aber von der Schallisotache an mittels einer schallnahen Charakteristikenmethode zu berechnen. Für verschiedene Werte von a findet man verschiedene Schallisotachen mit entsprechenden $v y$ -Werten auf ihnen. Da diese $v y$ auch aus der Charakteristikenmethode berechnet werden können, ergibt sich die Möglichkeit, eine passende Größe von a mit geringster mittlerer Abweichung beider $v y$ -Verteilungen auszusuchen. — Anwendung dieses Verfahrens auf die vordere Hälfte einer Parabelspindel mit $\tau = \frac{1}{6}$ ergab eine Druckverteilung auf der Körperkontur, die für die hinteren 70% der Halbkörperlänge mit Messungen der FFA (Flygtekniska Försöksanstalten, Stockholm) gut, an der Körperspitze dagegen schlecht übereinstimmt. — Für den Beiwert $c_{D_{M_\infty=1}}(x_0)$ des sonischen Druckwiderstandes desjenigen Körperteils, der zwischen der Spitze und der Stelle x_0 liegt, ergibt die parabolische Theorie allgemein den Wert

$$(3) \quad c_{D_{M_\infty=1}}(x_0) = \frac{1}{2} c_{D_{M_\infty=\sqrt{2}}}(x_0) - \frac{1}{Q_{\max}} \frac{Q_x^2(x_0)}{4\pi} \log \left[h(x_0) \frac{1,781 (\gamma + 1) \pi \tau^2}{2 a^2} \right],$$

wo $c_{D_{M_\infty=\sqrt{2}}}(x_0)$ den Widerstandskoeffizienten bei $M_\infty = \sqrt{2}$ bezeichnet. An der Stelle x_0 des Dickenmaximums ist $Q_x(x_0) = 0$, so daß hiernach der sonische Widerstandsbeiwert eines nicht-angestellten rotationssymmetrischen Halbkörpers unabhängig vom Beschleunigungsparameter a und gleich seinem halben supersonischen Widerstandsbeiwert ist. Für die bereits erwähnte Halbspindel ergibt sich $c_{D_{M_\infty=1}}(x_0) = (7/3) \tau^2 = 0,065$ gegen den Wert 0,058 aus der Druckverteilungsmessung. — Es sei erwähnt, daß bisher unveröffentlichte schwedische Messungen an weiteren sieben Halbkörpern verschiedener Konturen anstelle des Faktors $\frac{1}{2}$ beim Überschallkoeffizienten der Gleichung (3) je nach Form des Körpers Werte von 0,25 bis 0,8 ergaben, so daß die hier gegebene (zumindest in der vorliegenden Form noch recht primitive Theorie) ohne praktische Bedeutung sein dürfte. H. Behrbohm.

Keune, F. and K. Oswatitsch: On the influence of the geometry of slender bodies of revolution and delta wings on their drag and pressure distribution at transonic speeds. Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes 42, 34 p. (1956).

Der in gemeinsamen Arbeiten der Verff. (dies. Zbl. 53, 143; 66, 202; 204; 71, 204 und vorstehendes Referat) bereitgestellte Apparat wird dazu verwendet, die Druckverteilung, hauptsächlich aber den Druckwiderstand einer Reihe von Rotationskörpern und aus ihnen zu bildender äquivalenter Dreiecks- und Schwalbenschwanzflügel im Gebiet des linearisierbaren Unter- und Überschalls und bei Schallanströmung zu berechnen. Vor der Verwendung der auf S. 13 empfohlenen Daumenregel wird aber eindringlichst gewarnt. (Siehe hierzu die Schlußbemerkung des Ref. zum vorstehenden Referat.) H. Behrbohm.

Nocilla, Silvio: Sopra una classe di soluzioni singolari della equazione di Tomotika e Tamada per lo studio dei moti transonici. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 55—61 (1955).

Als Einleitung zu einer Reihe sowohl theoretisch als auch praktisch interessanter Untersuchungen über die transsonische Umströmung zweidimensionaler Profile (siehe die folgenden vier Referate) vertieft und verallgemeinert Verf. in vorliegender Note das schon von S. Tomotika und K. Tamada (dies. Zbl. 43, 405) begonnene Studium der partiellen Differentialgleichung von gemischtem Typ: $T(\tau, \beta) \equiv \tau^2 \Psi_{\tau\tau} + \tau \Psi_{\tau} + (1 - \tau^2) \Psi_{\beta\beta} = 0$, (τ, β reelle Variable). Von der Kapteynschen Reihe $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \Phi J_n(n \zeta)$ in den komplexen Variablen $\zeta = \tau e^{i\sigma}$, $\Phi = \beta + i\alpha$ (σ, α reell) wird mittels Majorisierung nachgewiesen, daß sie im durch $|h(\zeta)| < \lambda \leq 1$ [$h(\zeta) = \zeta \exp \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot (1 + \sqrt{1 - \zeta^2})^{-1}$, $\lambda = e^{-\alpha}$] definierten Gebiet $K^{(2)}$ der ζ -Ebene konvergiert und daselbst eine analytische Funktion von ζ darstellt, und daß sie ferner im durch $0 \leq \alpha < -\log |h(\zeta)|$ gegebenen Streifen S der Φ -Ebene eine daselbst analytische Funktion von Φ repräsentiert. Überdies gelingt es im Anschluß an eine Kapteynsche Formel, diese Reihe zu summieren: die durch sie für ζ aus $K^{(2)}$ und Φ aus S definierte Funktion $\Psi_{-1/2}(\zeta, \Phi)$ ist gegeben durch $\Psi_{-1/2}(\zeta, \Phi) = (1 - \zeta \cos \omega)^{-1}$, wo ω diejenige durch die Forderung $\omega = 0$ für $\Phi = 0$ eindeutig bestimmte in S analytische Funktion von Φ ist, für die $\zeta \sin \omega - \omega + \Phi = 0$ gilt. Offenbar ist $\Psi_{-1/2}(\zeta, \Phi)$ Lösung von $T(\zeta, \Phi) = 0$. — Aus einer Lösung $\Psi(\zeta, \Phi)$ von $T(\zeta, \Phi) = 0$ kann eine neue Lösung $\Psi^{(1)}(\zeta, \Phi)$ gewonnen werden durch den Prozeß

$$\Psi^{(1)}(\zeta, \Phi) = \int_0^{\Phi} \Psi(\zeta, \Phi_1) d\Phi_1 - \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \int_0^{\zeta_1} \frac{1 - \zeta_2^2}{\zeta_2} \Psi_{\Phi}(\zeta_2, 0) d\zeta_2.$$

Mit $\Psi(\zeta, \Phi) = \Psi_{-1/2}(\zeta, \Phi) - 1$ führt dies zu $\Psi_{1/2}(\zeta, \Phi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \Phi}{n} J_n(n \zeta) = \zeta \sin \omega$,

mit $\Psi(\zeta, \Phi) = \Psi_{1/2}(\zeta, \Phi)$ ergibt sich $\Psi_{3/2}(\zeta, \Phi) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \Phi}{n^2} J_n(n \zeta) = -\frac{\zeta^2}{2}$

$-\zeta \cos \omega + \frac{\zeta^2}{4} \cos 2 \omega$, und mit $\Psi = \Psi_{3/2}$ folgt $\Psi_{5/2}(\zeta, \Phi) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \Phi}{n^3} J_n(n \zeta) = \left(-\zeta + \frac{3}{8} \zeta^3\right) \sin \omega + \frac{3}{8} \zeta^2 \sin 2 \omega - \frac{\zeta^3}{24} \sin 3 \omega$. Auch der nächste zu $\Psi_{7/2}$ führende

Schritt mit $\Psi = \Psi_{5/2}$ wird noch explizit ausgerechnet. Die ganze auf diese Weise sukzessive zu erhaltende Funktionenfamilie $\Psi_{n/2}(\zeta, \Phi)$ hat offenbar analoge Eigenschaften wie $\Psi_{-1/2}(\zeta, \Phi)$, von der diejenige hervorzuheben ist, die besagt, daß sie auf dem Rande des Konvergenzgebietes ihrer definierenden Kapteynschen Reihen einen zweifachen Verzweigungspunkt besitzen.

H. Behrbohm.

Nocilla, Silvio: Sopra una classe di profili alari transonici nell'approssimazione di Tomotika e Tamada. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 89, 296—322 (1955).

In der Näherungstheorie von Tomotika und Tamada (loc. cit.) wird die für ein dem Adiabatengesetz genügendes Gas geltende Beziehung $\varrho^{\gamma-1} = \frac{1}{2} (\gamma + 1) - \frac{1}{2} (\gamma - 1) q^2$ (γ = Verhältnis der spez. Wärmen, ϱ Dichte, q Geschwindigkeitsbetrag, beide bezogen auf ihre kritischen Werte) approximiert durch die Beziehung

$$2k(\varrho/q) \{a + (q^2/\varrho)(1/\varrho q)'\} = \{(q^2/\varrho)(1/\varrho q)'\}',$$

wo $a = (2/(\gamma + 1))^{2/(\gamma - 1)}$, $k = ((\gamma + 1)/2)^{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)}$, und der Strich Ableitung nach q be-

deutet. Wird zudem statt q die Größe $\tau = \exp \left[k \int_1^q \frac{q}{q} dq \right]$, statt des lokalen Strömungs-

winkels ϑ (gemessen gegen die Anströmrichtung) die Größe $\beta = k \vartheta / \sqrt{a}$ eingeführt, so genügt die Potentialfunktion $\varphi(\tau, \beta)$ und die Stromfunktion $\psi(\tau, \beta)$ einer reibungs- und drehungsfreien zweidimensionalen Strömung eines Tomotika-Tamada-Gases (eines „TT-Gases“) dem Differentialsystem $\varphi_\tau = \sqrt{a} (\tau - \tau^{-1})$, $\varphi_\beta = \sqrt{a} \tau \varphi_\tau$, aus dem durch Elimination von φ die Grundgleichung $T(\tau, \beta) = 0$ des vorst. Referates für $\psi = \psi(\tau, \beta)$ entsteht. Die τ, β -Ebene spielt nunmehr die Rolle der Hodographenebene, aus der man durch die Relationen $dx = (\cos \vartheta)/q dq - (\sin \vartheta)/q q d\varphi$, $dy = (\sin \vartheta)/q dq + (\cos \vartheta)/q q d\varphi$ unter Beachtung der Zusammenhänge zwischen q, ϑ und τ, β in die physikalische Strömungsebene kommt. — In vorliegender Note zeigt Verf. zunächst, wie man die in voriger Arbeit gewonnenen Funktionen $\Psi_{n/2}$, $n = -1, 1, 3, 5, 7, \dots$ nach zweckentsprechender leichter Modifikation dazu verwenden kann, um aus ihnen durch lineare Kombination mit konstanten Koeffizienten Strömungsfelder aufzubauen, die zu transsonischen Störströmungen um mit Unterschallgeschwindigkeit symmetrisch angeblasene symmetrische Profile einer gewissen Klasse führen, analog wie dies Tomotika und Tamada (loc. cit.) schon mit $\Psi_{-1/2}$ und $\Psi_{1/2}$ getan hatten. Das Wesentliche dabei ist, daß das Unendlichferne der Strömungsebene im Hodographen τ, β einem zweifachen Verzweigungspunkt $P_\infty (\tau_\infty, \beta_\infty = 0)$ der Funktionen $\Psi_{n/2}(\tau, \beta)$ entspricht. Durch Aufschneiden der τ, β -Ebene längs der Strecke OP_∞ der reellen Achse ($O = \text{Origo}$) kann Eineindeutigkeit der Abbildung zwischen der oberen Hälfte ($y \geq 0$) der Strömungsebene und der Hodographenebene erzielt werden. τ_∞ hängt mit dem Imaginärteil α von Φ des obigen Referates durch die Relation $\Re \{ \Phi \} 1/\tau_\infty - \sqrt{1 - \tau_\infty^2} = -\log \lambda = \alpha$ zusammen. Sämtliche Profile dieser Klasse haben eine spitze Nase; für sie alle hat die Nasentangente denselben Winkel $\vartheta_0 = \frac{1}{2} \pi k^{-1} \sqrt{a} = 18^\circ 26' 34''$, den auch das von Tomotika und Tamada behandelte Profil (das Profil T_0) hatte. Dieses Faktum ist eine Folge davon, daß die Stromfunktion dieser Klasse vom Typ $\psi = \sum_n A_n \sin n \beta J_n(n \tau)$ mit ganz-

zähligem n ist. — Alsdann zeigt Verf., wie man durch den allgemeineren Ansatz $\psi = \sum_n A_n \sin n \beta J_n(n \tau) + \sum_n B_n \sin n \beta J_{np}(n p \tau)$ (n ganz, $0 < p < 1$), ohne den Charakter der Verzweigung in P_∞ zu ändern, auftriebslose transsonische Umströmung von symmetrischen Profilen mit beliebigem Nasentangentenwinkel $\vartheta_0 \geq 18^\circ 26' 34''$, u. a. also auch von Profilen mit runder Nase (hierzu ist $\vartheta_0 = \frac{1}{2} \pi$, bei $\gamma = 1.4$ also $p = 0.21230$ erforderlich) erzeugen kann. — Von der Schließungsbedingung (Dicke Null am Profilende) wird analytisch nachgewiesen, daß sie für die Profile der ersten Klasse sicher erfüllt ist. — In einem Schlußparagraphen wird die vorgetragene Methode angewandt, um die (bei Zugrundelegung des TT-Gases) zu $M_\infty = 0.717$ gehörige Strömung um das T_0 -Profil (gegeben durch

$$\psi = \psi^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^{-n} - \lambda^n) \sin n \beta J_n(n \tau) - \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{-n} + \lambda^n}{2} \sin n \beta J_n(n \tau)$$

mit $\lambda = 0.542$) leicht zu modifizieren durch den Ansatz $\psi = \psi^{(1)} + \psi^{(2)}$, wo $\psi^{(2)} = \sum_{n=2}^5 10^{-n} \sin \left(n \sqrt{\frac{a}{k}} \beta \right) J_n \sqrt{\frac{a}{k}} \left(n \sqrt{\frac{a}{k}} \tau \right)$ gewählt wurde. Beide Profile stimmen praktisch fast überall überein (max. Dicke etwa 10.8%). Doch hat das modifizierte Profil nunmehr eine runde Nase mit dem allerdings winzig kleinen Nasenradius $0.865 \cdot 10^{-5}$ Profiltiefe. Beide Profile erreichen bei dem genannten M_∞ annähernd die Schallgeschwindigkeit als die maximale Strömungsgeschwindigkeit auf ihrer Kontur, das neue Profil in etwa 40%, das T_0 -Profil in etwa 43% der Tiefe.

H. Behrbohm.

Nocilla, Silvio: Campi di moto transonici attorno a profili alari simmetrici, senza incidenza, con numero di Mach 1. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 90, 46—62 (1956).

Es handelt sich um Strömungen (des TT-Gases) um zu ihrer Sehne symmetrische Profile, die in Sehnenrichtung mit $M_\infty = 1$ angeblasen werden. Das Strömungsfeld in der physikalischen Strömungsebene (x, y -Ebene, x in Sehnenrichtung) ist somit spiegelbildlich symmetrisch zur x -Achse, mit analoger Symmetrie in der Hodographenebene. Folgende fünf Gebiete sind zu unterscheiden: das Gebiet I (und sein Spiegelbild V an der x -Achse) der oberen Halbebene $y \geq 0$, welches stromauf vor der auf der Profilkontur aufsitzenden und sich seitlich ins Unendliche erstreckenden Schalllinie ($\tau = 1$) liegt, das Gebiet II (und sein Spiegelbild IV an der x -Achse), welches zwischen der Schalllinie und der linksläufigen Grenzcharakteristik liegt (das Profil sei von links her angeblasen), das Gebiet III der Strömungsebene, welches stromab den Gebieten II und IV liegt. Eine entsprechende Gebietsaufteilung ist in der längs OP_∞ aufgeschlitzten Hodographenebene (τ, β deren Polarkoordinaten) vorzunehmen (P_∞ hat $\tau = 1, \beta = 0$). — In vorliegender Note wird — von den oben eingeführten Funktionen $\Psi_{n/2}$ ($n = -1, 1, 3, 5, \dots$) ausgehend — eine Klasse neuer Funktionen definiert, die, wie jene, Lösungen von $T(\tau, \beta) = 0$ sind und die es gestatten, durch lineare Kombination solcher Funktionen die bisher auf $M_\infty < 1$ beschränkten Profilströmungen auf solche mit $M_\infty = 1$ zu erweitern (für $M_\infty = 1$ wird $q_\infty = \tau_\infty = \lambda = 1$). Es sind dies die Funktionen $\bar{\psi}_{-3/2} = i [\partial \Psi_{-1/2} / \partial \lambda]_{\lambda=1}$, $\bar{\psi}_{1/2} = i [\partial \Psi_{3/2} / \partial \lambda]_{\lambda=1}$, $\bar{\psi}_{5/2} = i [\partial \Psi_{7/2} / \partial \lambda]_{\lambda=1}$, ... mit den bei beliebigem β für $\tau < 1$ konvergenten

Reihendarstellungen $\bar{\psi}_{-3/2} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} n \sin n\beta J_n(n\tau)$, $\bar{\psi}_{1/2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\beta}{n} J_n(n\tau)$, $\bar{\psi}_{5/2} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\beta}{n^3} J_n(n\tau)$, ... Diese Reihen können für $\tau < 1$, d. h. in dem Ge-

biet I + V zu $\bar{\psi}_{-3/2} = -\tau \sin \bar{\omega} (1 - \tau \cos \bar{\omega})^{-3}$, $\bar{\psi}_{1/2} = \tau \sin \bar{\omega}$, $\bar{\psi}_{5/2} = \left(-\tau + \frac{3}{8}\tau^3\right) \cdot \sin \bar{\omega} + \frac{3}{8}\tau^2 \sin 2\bar{\omega} - \frac{\tau^3}{24} \sin 3\bar{\omega}, \dots$ summiert werden, wobei $\bar{\omega}$ an τ und β durch

die Relation $f(\bar{\omega}) = \tau \sin \bar{\omega} - \bar{\omega} + \beta = 0$ gebunden ist. $f(\bar{\omega}) = 0$ besitzt im Bereich I + II + IV + V der τ, β -Ebene nur eine einzige reelle Wurzel, dagegen drei von einander verschiedene reelle Wurzeln im Bereich III. Die Funktion $\bar{\omega}$ und folglich auch alle eingeführten Funktionen $\bar{\psi}$ sind reell, antisymmetrisch zur Geraden OP_∞ und gleich Null auf OP_∞ (mit Ausnahme von höchstens P_∞), sie sind analytisch und regulär im Gebiet I + II + IV + V, und sie sind dreiwertig im Gebiet III. In der außerhalb III gelegenen Umgebung von P_∞ verhält sich $\bar{\psi}_{-3/2}$ ($\tau = 1 + \eta$,

$R = 9\beta^2 - 8\eta^3$ gesetzt) wie folgt: $\bar{\omega} \approx \sqrt[3]{3\beta + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{3\beta - \sqrt{R}}$, $\bar{\psi}_{-3/2} \approx -8\bar{\omega}/(\bar{\omega} - 2\eta)^3$, und es zeigt sich, daß $\bar{\psi}_{-3/2}$ sich von einer schon von F. Frankl [Moskovsk. gosudarst. Univ., učenye Zapiski, 154, Mech. 4, 287—310 (1951)] eingeführten Stromfunktion nur unwesentlich unterscheidet, von der dieser nachgewiesen hat, daß sie die für das Profilumströmungsproblem mit $M_\infty = 1$ richtige Singularität im Unendlichfernen der physikalischen Strömungsebene besitzt. Schließlich wird noch das Verhalten der $\bar{\psi}_{-3/2}$, $\bar{\psi}_{1/2}$, $\bar{\psi}_{5/2}$ auf den Grenzcharakteristiken $\pm \beta = \sqrt{\eta} (2 + \eta) - \arcsin \sqrt{\eta} (2 + \eta)$ in der Umgebung von P_∞ studiert, indem in den Reihenentwicklungen $\bar{\psi}_{-3/2} = \pm \eta^{-5/2} \mathfrak{P}_{-3/2}(\eta)$, $\bar{\psi}_{1/2} = \pm \eta^{1/2} \mathfrak{P}_{1/2}(\eta)$, $\bar{\psi}_{5/2} = \pm \eta^{1/2} \mathfrak{P}_{5/2}(\eta)$ einige der ersten Koeffizienten der entsprechenden Potenzreihen $\mathfrak{P}(\eta)$ angegeben werden.

H. Behrbohm.

Nocilla, Silvio: Campi di moto transonici attorno a profili alari. Applicazioni. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 90, 311—331 (1956).

In dieser 4. Note werden die in der 2. und 3. Note eingeführten Stromfunktionen ψ und $\bar{\psi}$ dazu verwendet, um einige symmetrische Flügelprofile in transonischer TT-Gasströmung mit $M_\infty < 1$ und $M_\infty = 1$ zu studieren. Zunächst aber

wird das modifizierte T_0 -Profil der 2. Note wieder betrachtet und durch die Joukowski-Transformation $z = Z + 0.99995^2/Z$ der komplexen z -Ebene ($z = x/l - \frac{1}{2} + iy$, l Profiltiefe) auf die komplexe Z -Ebene in eine kreisnahe Kontur abgebildet. Von dieser aus wird dann die konforme Abbildung auf den Kreis nach A. Castagno (dies. Zbl. 52, 357) experimentell im Elektrolyttank ermittelt. Damit ist die inkompressible Geschwindigkeitsverteilung $(V/V_\infty)_{\text{ink}}$ und der entsprechende Druckkoeffizient $c_{p\text{ink}}$ auf dem modifizierten T_0 berechenbar. Vergleich der vom Verf. für $M_\infty = 0.717$ berechneten q -Verteilung mit den Näherungswerten

$$q = \frac{V_{\text{komp}}}{V_{\text{krit}}} = q_\infty \frac{(1 - a') (V/V_\infty)_{\text{ink}}}{1 - a' (V/V_\infty)_{\text{ink}}}, \quad a' = \left(\frac{M_\infty}{1 + \sqrt{1 - M_\infty^2}} \right)^2$$

nach von Kàrmàn [J. aeronaut. Sci. 8, 337—356 (1941)] und den aus

$$c_{p\text{komp}} = c_{p\text{ink}} \left\{ \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - \left(M_\infty^2 + \frac{2}{\gamma - 1} \right) \left[1 + \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 c_{p\text{ink}} \right]^{-\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right\}^{-1/2}$$

nach R. W. Truitt (Mémoires sur la mécanique des fluides, Paris 1954, S. 397) unter Zugrundelegung isentroper Strömung rückrechenbaren q -Werten ergibt gute Übereinstimmung aller drei $q(x/l)$ -Verläufe. Dies ist nicht mehr der Fall für $M_\infty = 0.752$ (leicht geändertes Profil), wo beide Näherungsformeln in der Umgebung des auf dem Profilaufsitzenden lokalen Überschallgebietes stark von den Nocillaschen Werten abweichen, die das wahrscheinliche Auftreten eines Stoßes in etwa 55% der Tiefe durch ihren dort steilen Geschwindigkeitsabfall andeuten. — Aus der Klasse der für $M_\infty < 1$ durch $\psi = -1/(1 - \lambda)\psi_{-1/2} - \mu\psi_{1/2} + [(1 + \lambda)/(1 + \lambda^2) - \mu]\psi_{5/2}$ (μ ein willkürlicher reeller Parameter) beschriebenen Strömungen, die für $M_\infty = 1$ (d. h. $\lambda = 1$) durch die durch $\bar{\psi} = -\bar{\psi}_{-3/2} - \mu\bar{\psi}_{1/2} - (\mu - 1)\bar{\psi}_{5/2}$ beschriebene Klasse zu ersetzen ist, werden die durch $\lambda = 0.7$ (entspr. $M_\infty = 0.794$), $\mu = 1.9$, die durch $\lambda = 1$, $\mu = 1$ und $\lambda = 1$, $\mu = 4$ gegebenen näher untersucht. Die erzielten Profilkonturen und die diesen zugehörigen q -Verteilungen auf der Kontur werden graphisch gegeben. Das durch $\lambda = 0.7$, $\mu = 1.9$ gegebene Profil, im Vorderteil gut, im Hinterteil schlechter durch ein Kreisbogenprofil angenähert, wird als solches mittels einer Kàrmàn-Trefftz-Transformation in inkompressibler Strömung berechnet, und es wird wieder der Vergleich mit v. Kàrmàns resp. Truitts Näherungsformeln durchgeführt. Auf Grund seiner numerischen Studien glaubt Verf. für den Praktiker die Verwendung der Truittschen Näherung für alle Machzahlen M_∞ empfehlen zu können, für die keine Stöße am Profil auftreten.

H. Behrbohm.

Nocilla, Silvio: Die transsonische Strömung um Flügelprofile mit einer Machzahl der ungestörten Strömung gleich Eins. Jahrbuch 1955 wiss. Ges. Luftfahrt, 186—191, engl. und französ. Zusammenfassung, Diskussion 191—192 (1956).

Während die Stromfunktionen $\bar{\psi} = K_{-3/2}\bar{\psi}_{-3/2} + K_{1/2}\bar{\psi}_{1/2} + K_{5/2}\bar{\psi}_{5/2} + \dots$ (die K gegebene Konstante) in der 3. Note hauptsächlich im „gemischten“ Gebiet I + II + IV + V studiert wurden, wird in der vorliegenden 5. Note deren Verhalten im Gebiet III, und zwar in der Umgebung von P_∞ , also im schallnahen Überschall untersucht. Dabei kann $T(\tau, \beta) = 0$ durch die Tricomigleichung $\psi_{\eta\eta} - 2\eta\psi_{\beta\beta} = 0$ approximiert werden, so daß die Gleichungen der Grenzcharakteristiken nunmehr $\beta = \pm \frac{1}{3}(2\eta)^{3/2}$ lauten. Auf der linksläufigen Grenzcharakteristik (+ Zeichen) nimmt $\bar{\psi}$ offenbar die Werte $\bar{\psi} = \pm \eta^{-5/2}(\alpha_0 + \alpha_1\eta + \alpha_2\eta^2 + \dots)$ mit bekannten Koeffizienten α_i an. Durch Übergang zu charakteristischen Ko-

ordinaten $u = \frac{1}{3}(2\eta)^{3/2} - \beta$, $v = \frac{1}{3}(2\eta)^{3/2} + \beta$ geht dies in (*) $\bar{\psi} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n v^{2n-5}$ über, während die Tricomigleichung in die Normalform $\bar{\psi}_{uv} + \frac{1}{6}(\bar{\psi}_u + \bar{\psi}_v)/(u + v) = 0$ vom Euler-Poissonschen Typ übergeht, deren Riemannsche Funktion bekannt ist.

Durch Studium des zugehörigen Darbouxproblems findet man: In der in III liegenden Umgebung von P_∞ muß $\bar{\psi}$ die Form $\bar{\psi} = \sum_{n=0}^2 r^{\frac{2n-5}{3}} f_n(\delta) + \bar{\psi}$ haben; hierbei sind r, δ Polarkoordinaten in der u, v -Ebene mit Ursprung in P_∞ , $f_n(\delta)$ für $\delta \neq 0$ reguläre Funktionen allein von δ , während $\bar{\psi}$ für $r \rightarrow 0$ beschränkt bleibt. Durch näheres Studium der $f_n(\delta)$ findet man schließlich: Alle Stromfunktionen, die im Innern von III regulär sind und auf der linksgehenden Grenzcharakteristik $u = 0$ die gegebenen Werte (*) haben, lassen sich in III ausdrücken durch einen in P_∞ singulären Teil, welcher auf der rechtsgehenden Grenzcharakteristik $v = 0$ unendlich wird und durch überdies einen Teil, der in III beschränkt bleibt. — Durch Rückgang in die physikalische Strömungsebene zieht Verf. hieraus den Schluß, daß mit Schallgeschwindigkeit bewegte Flügelprofile an ihrer Kontur stets eine Stoßwelle erzeugen.

H. Behrbohm.

Sauer, Robert: Neue Ergebnisse und Entwicklungsmöglichkeiten in der theoretischen Gasdynamik. Jahrbuch 1955 wiss. Ges. Luftfahrt, 26—31, engl. und französ. Zusammenfassung 31—32 (1956).

Es handelt sich um ein Referat über numerische Methoden bei der Behandlung von Überschallströmungen, die am Mathematischen Institut der TH München verbessert und weiterentwickelt wurden, sowie über die Entwicklung einer programmgesteuerten elektronischen Rechenanlage München (PERM) zur Lösung gasdynamischer Aufgaben. Es werden zusammenfassend folgende Probleme erläutert: Verbesserung des Quell-Senken-Verfahrens für axial oder schief angeblasene oder pendelnde Drehkörper nach H. Stetter für glatte Profilkurve und nach I. Münch für Profilkurven mit Knicken; Wechselwirkung Flügel-Rumpf in einer Näherung von Munk-Spreiter und Lösungen von H. Stetter für zylindrischen Rumpf und beliebig gestaltete Flügel; Weiterentwicklung der Charakteristikenverfahren für zwei- und dreidimensionale Überschallströmungen nach R. Sauer und nach K. Samelson, sowie eine Abschätzung der Genauigkeit von F. Bauhuber. Es wird auf die Lösungsmöglichkeiten dieser Aufgaben durch PERM hingewiesen. Zum Schluß wird PERM beschrieben, die etwa 1000 Operationen in der Sekunde ausführen und deren Speicher rund 8 000 40stellige Dualzahlen samt Vorzeichen und Größenordnungsfaktor aufnehmen kann. Das Referat stellt zugleich einen Tätigkeitsbericht über die in den letzten Jahren im genannten Institut erzielten Ergebnisse auf dem Gebiet der Gasdynamik dar.

M. Popov.

Oswatitsch, K.: Die Berechnung wirbelfreier achsensymmetrischer Überschallfelder. Österr. Ingenieur-Arch. 10, 359—382 (1956).

In der vorliegenden Mitteilung werden neue Charakteristikenmethoden für achsensymmetrische Strömungen behandelt. Während das lineare Verfahren von Sauer-Heinz in der Strömungsebene mit festen Mach-Linien und in der Zustandsebene mit nur vom Achsabstand abhängigen Charakteristiken arbeitet, muß man bei den bisher bekannten quasilinearen Verfahren in der Zustandsebene eine Abhängigkeit der Charakteristiken auch vom Zustand in Kauf nehmen. Außerdem werden im allgemeinen Fall (Prandtl-Busemann-Verfahren für Achsialsymmetrie) durch den Achsabstand im Nenner in Achsennähe sehr dichte Gitterpunktnetze erforderlich. — Die neuen Charakteristikenmethoden des Verf. umgehen diese Schwierigkeiten durch Benutzung zweier geeigneter Variablenkombinationen als gesuchte Größen. So kommt man in Schallnähe zu charakteristischen Gleichungen, bei denen wie im Sauer-Heinz-Verfahren die Charakteristiken in der Zustandsebene wiederum nur vom Achsabstand abhängen. Die Machschen Linien in der Strömungsebene sind dagegen jetzt wegen der Nichtlinearität des Problems abhängig vom Zustand. Für den Bereich mittlerer Überschallgeschwindigkeiten werden ähnliche Gleichungen abgeleitet. Zwar sind hier auch die Charakteristiken in der Zustands-

ebene vom Zustand abhängig, doch hat man dafür in Achsnähe keine Sorgen mit einem verschwindenden Nenner. — Im Limes kleiner Störungen ergibt sich in beiden Fällen wieder das Verfahren von Sauer-Heinz. — Beide Verfahren werden an Hand von Beispielen mit dem linearen Sauer-Heinz-Verfahren verglichen.

W. Haack; G. Bruhn.

Carafoli, Elie et Béatrice Horovitz: L'écoulement supersonique autour d'une aile à disque axial. Acad. Républ. popul. Roumaine, Inst. Méc. appl., Revue Méc. appl. 1, Nr. 1, 1—33 (1956).

Es werden linearisierte kegelige Überschallfelder studiert, die der dünnen tragenden (schwach gewölbten) Dreiecksplatte resp. dem nichtangestellten dicken Dreiecksflügel in homogener Parallelanströmung entsprechen, wobei diese Flügel mit zum Flügel senkrechten dünnen, dreiecksförmigen Bauch- und Rückenflossen (mit Spitze in der vorderen Flügelspitze) versehen sind. Weder braucht der Flügel symmetrisch zur Flossenbezugsebene noch die Flosse symmetrisch zur Flügelbezugsebene zu sein. Man bedient sich auf A. Busemann zurückgehender funktionentheoretischer Methoden zur Behandlung der Laplacegleichung in zwei Variablen, denen die von nullter Ordnung homogenen Störgeschwindigkeitskomponenten des Feldes genügen müssen. Sowohl Unter- als auch Überschallvorderkanten werden behandelt. Auch dürfen die Flossen gegen den Wind schwach angestellt sein. — Als Anwendung wird Auftrieb, Widerstand und Rollmoment für den Rechteckflügel mit dreieckigen Endscheiben ermittelt und der aus zwei antisymmetrisch geschränkten Dreiecksflügeln bestehende Kreuzflügler behandelt. — Der Leser sei auch auf die Arbeit „The effects of delta vanes on supersonic wings“ von M. A. Gorgui in *Aeronaut. Quart.* 5, 251—279 (1954) hingewiesen, wo der Rechteckflügel mit dreieckigen Randscheiben auf ähnliche Weise behandelt wurde.

H. Behrbohm.

Carafoli, E. et M. Ionescu: Trainée d'ailes delta doublementconiques à pente variable, en régime supersonique. Acad. Républ. popul. Roumaine, Inst. Méc. appl., Revue Méc. appl. 1, Nr. 1, 35—55 (1956).

Verff. berechnen mittels der linearen Überschalltheorie den Druckwiderstand für Dreiecksflügel, deren Konturfläche folgendermaßen definiert wird: Durch eine Leitlinie in der Ebene $x = \text{const} = x_1$ (x in Anströmrichtung, y in Spannweitenrichtung, z senkrecht zu x, y ; Leitlinie symmetrisch zur Ebene $z = 0$) wird ein von der vorderen und im Koordinatenursprung gelegenen Flügelspitze 0 ausgehender Kegel K_1 gelegt. Von einem Punkt $x = x_0, y = z = 0$ ($0 < x_0 < x_1$) ausgehend wird ein Kegel K_2 zur gleichen Leitlinie gezogen. In den beiden Spurgeraden s_1 und s_2 von K_2 mit $z = 0$ werden die zur x, y -Ebene senkrechten Ebenen errichtet, die K_1 in den ebenen Kurven S_1 und S_2 schneiden. Die von 0 bis zu S_1 resp. S_2 erstreckten Generatrizen von K_1 bestimmen die vordere Konturfläche des Flügels. Eine Ebene $y = \text{const} = y_0$ schneide K_1 und K_2 in den Profilschnitten T_1 und T_2 (die sich auf der Leitlinie treffen). In z -Richtung unter dem auf S_1 gelegenen Punkt P_1 von T_1 liegt der Punkt P_2 des Profilschnittes T_2 von K_2 . P_2 wird geradlinig mit dem Hinterkantenpunkt $R(x = x_1, y = y_0, z = 0)$ verbunden und alsdann für alle stromab von P_2 gelegenen Punkte x die von dieser Verbindungsgeraden P_2R bis zum Schnitt T_2 gerechnete z -Strecke von dem Schnitt T_1 ins Profilinnere abgesetzt. Wird diese Konstruktion für alle stromab von S_1 und S_2 gelegenen Punkte gemacht, so entsteht die hintere Konturfläche des Flügels, der damit in der scharfen Hinterkante $x = x_1$ endet und S_1 und S_2 als scharfe Gratlinien besitzt. Für diese nach rein mathematischen Zweckmäßigkeitsgründen (weil nämlich die Strömung auf dem Hinterflügel aus der Superposition zweier konischer Felder aufgebaut werden kann) definierten Flügel werden dann die möglichen Fälle behandelt: Vorderkanten und Gratlinien Unterschallkanten, Vorderkanten Unterschall- und Gratlinien Überschallkanten, Vorderkanten und Gratlinien Überschallkanten. Schließ-

lich wird auf den Fall des in γ linearen Verlaufs des Profiltangentenwinkels spezialisiert, und es werden die Resultate systematischer numerischer Berechnungen des Druckwiderstandskoeffizienten in Kurvenscharen wiedergegeben. *H. Behrbohm.*

Patralea, N. N.: Le mouvement supersonique autour d'une aile qui traverse un cône presque circulaire. Acad. Républ. popul. Roumaine, Inst. Méc. appl., Revue Méc. appl. 1, Nr. 1, 57—61 (1956).

Man behandelt mit Hilfe der Theorie der linearisierten kegeligen Strömungen die Überschallströmung um eine gegen die Strömung schwach angestellte Flügel-Rumpfkombination, die aus einem dünnen Dreiecksflügel mit Überschallvorderkanten und einem fast-kreisförmigen Rumpf besteht. Fast-kreisförmig bedeutet hierbei, daß die Umströmungsbedingungen des Rumpfes mit hinreichender Approximation auf einem mittleren Kreisbogen erfüllt werden können. Mittels der Busemannschen Radiententransformation werden die Bewegungsgleichungen für die Störgeschwindigkeitskomponenten in die Laplacegleichungen in einer Querschnittsebene transformiert. Nach Abspaltung eines Logarithmus und der bekannten Lösung für den rumpffreien Flügel wird für die komplexe Lösung alsdann eine Laurentreihenentwicklung angegeben, deren Koeffizienten sich aus den Randbedingungen leicht berechnen lassen. *H. Behrbohm.*

Holt, M.: The initial behaviour of a spherical explosion. I: Theoretical analysis. II: Application to PETN charges in air and water. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 234, 89—109, 110—115 (1956).

Teil I. Die von Berry und Holt (dies. Zbl. 56, 202) unter speziellen Voraussetzungen durchgeführte theoretische Untersuchung der Stoßwellenentstehung bei einer kugelsymmetrischen Detonation wird ausgedehnt auf den Fall beliebiger Zustandsgleichungen für die Sprengstoffschwaden und für das umgebende Medium. Es ergeben sich qualitativ die gleichen Verhältnisse wie a. a. O., insbesondere außer der Luftstoßwelle eine zugleich entstehende, in die Schwaden hineinlaufende Stoßfront. — Teil II. Die Auswertung der gefundenen Formeln durch Einsetzen der Daten für Nitropenta und Luft bzw. Wasser zeigt große quantitative Unterschiede zwischen diesen beiden Fällen. *F. Wecken.*

Holtmark, J., J. Lothe, S. Tjøtta and W. Romberg: A theoretical investigation of sound transmission through horns of small flare, with special emphasis on the exponential horn. Arch. Math. Naturvid. 53, 139—181 (1956).

Investigations of the propagation of sound waves in an infinite exponential horn are carried out under the assumption that the second power of the slope of the horn contour everywhere is small compared to unity. Possible modes of propagation and the coupling between different modes are investigated. Numerical calculation show in which way the different higher order waves rise up along the horn when only the principal wave is excited at the throat of the horn.

F. Oberhettinger.

Craggs, J. W.: The oblique reflexion of sound pulses. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 237, 372—382 (1956).

Wenn eine Schallwelle unter dem Winkel der Totalreflexion auf eine ebene Grenzfläche auftrifft, bildet sich im stationären Zustand im dünneren Medium in der Nähe der Grenzschicht ein „Nahfeld“ aus, in dem eine exponentiell abklingende Energiedichte herrscht. Wenn die auf die Grenzschicht auftreffende Welle nur aus einem Schallimpuls besteht, taucht natürlich die Frage auf, wie sich das Nahfeld bildet. Da dieses Problem mit den üblichen Methoden schwer zu behandeln ist, untersucht Verf. die Verdichtungswelle, die von einem dünnen Keil ausgeht, der sich mit Überschallgeschwindigkeit auf die Grenzschicht hinbewegt. Die Benutzung der verschiedenen Randbedingungen führt auf ziemlich komplizierte Ausdrücke, aus denen

Verf. schließt, daß neben der total reflektierten Verdichtungswelle eine gestreute Welle im dichteren Medium auftritt. *M. Heckl.*

Kästner, Siegfried: Das Reflexionsvermögen und die Durchlässigkeit eines Schichtsystems visko-elastischer Medien bei Einfall einer ebenen Schallwelle unter beliebigem Winkel. II. Ann. der Physik, VI. F. 19, 102—115 (1956).

In una precedente Memoria (questo Zbl. 70, 435) l'A. ha trattato il problema della propagazione e riflessione per generico angolo di incidenza di onde piane in uno strato formato da un numero finito di lamine indefinite elastico viscoso, nelle quali possano propagarsi sia onde di compressione che di distorsione. In questo lavoro viene esaminato il caso che lo strato sia formato da un numero qualsiasi di lamine, delle quali alcune siano del tipo poco sopra indicato (tipo A), e le altre consentano solo propagazione di onde di compressione (tipo B). La soluzione è ottenuta, con procedimento analogo a quello della prima memoria, nei quattro casi: che il semispazio di incidenza e quello di trasmissione appartengano ambedue al tipo A o al tipo B, oppure uno appartenga al tipo A e l'altro al tipo B. *T. Manacorda.*

Jones, D. S.: A new method for calculating scattering with particular reference to the circular disc. Commun. pure appl. Math. 9, 713—746 (1956).

The problem of the diffraction of a harmonic sound wave by a rigid circular disc of radius a for a symmetrical incident field (in which the pressure distribution on the disc depends only on the radius) is shown to be governed by a Fredholm integral equation. For this an approximate solution in the form of an expansion in powers of ka (k = wave number) is given for the case of a plane sound field incident perpendicular to the disc. For the case before and for an incident field due to a point source on the axis of the disc the integral equation is solved approximately by approximation of the kernel. The scattering coefficient is determined and numerically evaluated (for the incident spherical wave under the assumption that the distance of the point source from the disc is large compared to the wave length). A formula for an estimate of the error in the scattering coefficient made by the approximation employed here is given. *F. Oberhettinger.*

Stoker, J. J.: Some recent progress in the theory of surface waves in water. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 251—263 (1956).

Verf. gibt einen ausgezeichneten Überblick über verschiedene Probleme der Oberflächenwellen, die — mit einer Ausnahme — in den letzten Jahren mit Unterstützung des Office of Naval Research der U. S. Navy bearbeitet worden sind. Die Schwierigkeit der Probleme von Oberflächenwellen liegt darin, daß die an der freien Oberfläche zu stellende Grenzbedingung nichtlinear ist. Vereinfachungen sind entweder dadurch möglich, daß man die Grenzbedingung durch Beschränkung auf kleine Amplituden linearisiert oder dadurch, daß die Wassertiefe als klein vorausgesetzt wird. Entwickelt man die allgemeine Lösung in eine Reihe nach einem Parameter, der aus Wassertiefe und Wellenlänge gebildet wird, so läßt sich zeigen, daß die „Seichtwasserwellentheorie“ das Anfangsglied dieser Reihe darstellt. Als weitere Probleme werden besprochen a) die Brechung der Wellen an einer senkrechten ebenen Barriere, b) die Bewegung von Schiffen als frei schwimmende Körper, c) strenge Lösung des Problems der Einzelwelle („solitary wave“), d) Berechnung der Wasserbewegung in Flüssen von veränderlichem Querschnitt und Einsatz elektronischer Rechenmaschinen zur Hochwasservoraussage. *W. Wuest.*

Pezzoli, Giannantonio: La propagazione delle onde nei canali a fondo orizzontale. Atti Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., Anno 244°, Rend., XI. Ser. 3, Nr. 2, 159—184 (1956).

In der vorliegenden Arbeit wird die Ausbreitung und Dämpfung von Wellen, insbesondere Flutwellen, in einem horizontalen Kanal untersucht, in dem also das ungestörte Wasser ruht. Das Problem wird in eindimensionaler Näherung, aber mit Berücksichtigung der Reibung behandelt. Für $x = 0$ (was etwa der Mündung des

Kanals in das Meer entsprechen würde) wird eine harmonische Schwingung angenommen. Für die Reibung wird ein vom Quadrat der Geschwindigkeit abhängiges Gesetz angenommen. Zur Lösung der Differentialgleichung wird ein Verfahren der sukzessiven Approximation angewandt, wobei die reibungslose Lösung als erste Näherung benutzt wird. Für die Berechnung der Korrekturfunktionen wird eine Fourierentwicklung vorgenommen. Das gleiche Problem wird noch nach einem anderen Näherungsverfahren behandelt, das zwar weniger genau ist, aber durchsichtigere Ergebnisse liefert. Hierbei wird nämlich das quadratische Reibungsgesetz durch ein in der Gesamtwirkung gleichwertiges lineares Gesetz ersetzt. Die numerischen Ergebnisse zeigen, daß sich die Wellenfronten aufteilen, aber unter der Reibungswirkung gleichzeitig in der Amplitude abschwächen. Doch schließt die Theorie auch Fälle ein, bei denen die Wellen zunächst geschwächt werden, nach Durchlaufen eines Minimums aber wieder angefast werden. Experimentell sind solche Fälle bisher nicht beobachtet worden, so daß es nicht ausgeschlossen erscheint, daß sie nur durch die Näherungsverfahren hereingetragen werden.

W. Wuest.

Supino, Giulio: Onde di ampiezza crescente su moto-base permanente. Atti Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., Anno 244°, Rend., XI. Ser. 3, Nr. 1, 37—54 (1956).

Die Wellenfortpflanzung in offenen Gerinnen wird, ausgehend von den hydraulischen Grundgleichungen, unter Berücksichtigung der Stromfadenkrümmung für eine nichtgleichförmige Grundströmung behandelt. Die Lösung wird nach einer undurchsichtigen Variablentransformation in Form einer Sinuswelle angeschrieben, deren Amplitude durch eine Potenzreihe gegeben ist, für deren Koeffizienten Formeln zusammengestellt werden. Die Lösung wird auf die Strömung hinter einem teilweise geöffneten Schütz angewandt und mit Versuchen verglichen, die am Hydraulischen Institut der Universität Bologna an einem 7 m langen und 0,12 m breiten Gerinne durchgeführt wurden. Für die recht erheblichen Abweichungen zwischen Rechnung und Messung werden verschiedene Gründe angeführt.

W. Wuest.

De, S. C.: Kinematic wave theory of bottlenecks of varying capacity. Proc. Cambridge philos. Soc. 52, 564—572 (1956).

Evangelisti, Giuseppe: Sopra il calcolo dei piccoli rigurgiti nei canali scoperti. Atti Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., Anno 244°, Rend., XI. Ser. 3, Nr. 2, 52—58 (1956).

Verf. leitet eine einfache Formel ab, um die Überströmprofile in einem schwach geneigten offenen Gerinne bei stationärer Bewegung in eindimensionaler Näherung zu berechnen. Für die Durchflußmenge und den Querschnitt wird dabei die Annahme gemacht, daß sie proportional einer vorgegebenen Potenz der mittleren Wassertiefe seien. Wegen der vorausgesetzten Kleinheit der Störungen kann bei den erhaltenen Integralen eine Reihenentwicklung vorgenommen und die Integrale können explizit ausgewertet werden. An Beispielen wird gezeigt, daß die durch die Näherung begangenen Fehler nur gering sind.

W. Wuest.

Carman, P. C.: Flow of gases through porous media. London: Butterworths Scientific Publications; New York: Academic Press, Inc. 1956. IX, 182 p. 30s.

This book is, as far as possible, a complete account of the flow processes involved when gases flow into or through finepored media. Chap. I deals with viscous flow in unconsolidated beds. The subject is approached from the viewpoint of the Kozeny theory and its limitations are fully discussed for relative permeability and for high porosities. Chap. II discusses the viscous flow in abnormal pore texture, by considering the cases of non-uniform pore textures, giving high permeabilities, and of high tortuosities, giving low permeabilities. Both factors are treated in detail, and methods for their measurement are discussed. The last section of this chapter deals with the simultaneous flow of two fluid phases. In chap. III, slip flow, free molecule flow, and

diffusional flow are presented. The transition from purely viscous flow to Knudsen flow is first considered for single capillaries, and the relationships obtained are applied to a pore space, considered to be similar to a bundle of capillaries. A short final section deals with diffusional flow of gases within porous media. Chap. IV presents author's own method for measuring specific surface, based on the measurement of permeability. Chap. V discusses the flow of sorbable gases. Chap. VI summarises the methods of separating gas mixtures by flow and diffusion in porous systems. Particular emphasis is placed on the principles involved in recent methods which have already proved to be of interest or promise possibilities for the future. In chap. VII, two topics are discussed, namely: 1°) the part played by inertial resistance in flow of gases through porous media, and 2°) fluidization of a granular bed by an upward-moving gas stream. As in the previous chapters, the discussion is concerned with the relationship between the flow-rate and the pressure drop producing it.

Dan. Gh. Ionescu.

Wärmelehre:

● **Münster, A.: Statistische Thermodynamik.** Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1956. XI, 852 S. Mit 193 Textabbild. DM 138.—.

Der Verf. zitiert Goethe in seinem Vorwort: „So eine Arbeit wird eigentlich nie fertig“. Umso angenehmer überrascht ist man, wenn man spürt, daß dies Werk doch „fertig“ ist. Und das, obwohl es sich nicht weniger vorgenommen hat, als die Darstellung der gesamten statistischen Mechanik (einschließlich Quantenstatistik) mit allen denkbaren Anwendungsgebieten (Gase, Flüssigkeiten und Kristalle). Dazu eine kurze Darstellung der klassischen Mechanik und der Quantenmechanik (auf 16 Seiten, einschließlich der Diskussion der Dichtematrix), die dem Ref. sehr gelungen erscheint. So ist das Buch eine Art Handbuch geworden, in dem auch der Fachmann mit Gewinn lesen und nachschlagen kann. Es ist bei der Fülle des Stoffes unmöglich auf Einzelheiten einzugehen. Der Verf. hat offensichtlich die Literatur sehr sorgfältig studiert und in den Ableitungen und Diskussionen die besten Methoden und Argumente zusammengetragen. Wir erwähnen besonders die Diskussion des Versagens der μ -Raum-Statistik, die Begründung der Symmetrieeigenschaften der Wellenfunktionen identischer Teilchen und der Kontinuitätsgleichung der Verteilungsfunktion bei den Grundlagen, die Kondensationstheorie, die Theorie kooperativer Erscheinungen in den Kristallen und vieles andere bei den Anwendungen. Daß der Ref. nicht immer mit dem Verf. übereinstimmt, ist klar. Er würde z. B. den Ergodensatz der Annahme gleicher a priori-Wahrscheinlichkeit (wie sie der Verf. formuliert) vorziehen. Aber das sind Geschmacksfragen (weil man so oder so mit Hypothesen beginnt) und sie beeinträchtigen nicht im geringsten den großen Wert dieses Buches. Nur sollte es nicht gar so teuer sein. *H. Kümmel.*

Jaglom (Yaglom), A. M.: Application of function space integrals to the evaluation of the statistical sum of quantum statistics. Teor. Verojatn. Primen. 1, 161—167, engl. Zusammenfassg. 167 (1956) [Russisch].

Die Entwicklung der statistischen Summe in der Quantenstatistik nach Potenzen der Planckschen Konstanten wird mittels einer einfachen Methode abgeleitet. Sie bedient sich des bekannten Ergebnisses von Feynman und von Kac über die Darstellung der fundamentalen Lösung gewisser parabolischer partieller Differentialgleichungen in der Gestalt von Wiener'schen Integralen. *K. Baumann.*

Prigogine, I. et R. Balescu: Phénomènes cycliques dans la thermodynamique des processus irréversibles. Acad. roy. Belgique Bull. Cl. Sci. V. Sér. 42, 256—265 (1956).

Die Stabilität des stationären Zustandes wird untersucht für Systeme, die weit vom thermodynamischen Gleichgewicht entfernt sind und deren phänomenologische

Gleichungen (bezogen auf die Abweichungen nicht vom Gleichgewicht, sondern vom stationären Zustand) eine antisymmetrische Matrix besitzen. Als Grundlage dient eine Ungleichung von Glansdorff und Prigogine (dies. Zbl. 57, 191); sie ordnet solchen Systemen einen bestimmten Sinn der Rotation um den stationären Zustand, welcher selbst aber nie erreicht wird, zu. Der Sinn hängt nur von der Natur des Systems ab. Das von Volterra behandelte Modell zweier wechselwirkender biologischer Populationen ist ein Analogiebeispiel eines solchen Systems. *J. Meixner.*

Glansdorff, P.: Sur une loi de modération des transformations chimiques irréversibles. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 42, 628—630 (1956).

Prigogine und Glansdorff (dies. Zbl. 57, 191) haben gezeigt, daß in einem System im mechanischen Gleichgewicht mit zeitunabhängigen Oberflächenbedingungen für Temperatur und chemische Potentiale neben der Positivität der Entropieproduktion $P = \sum X_i J_i \geq 0$ die weitere Beziehung $\sum J_i dX_i/dt \leq 0$ gilt. In der letzten Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen nur für den stationären Zustand. Dieses Theorem unterliegt keinen Beschränkungen hinsichtlich des Abstandes vom thermodynamischen Gleichgewicht; auch sind keine Onsager-Casimirschen Reziprozitätsbeziehungen bei seiner Ableitung zu benutzen. Die vorliegende Arbeit setzt die Verhältnisse am speziellen Beispiel eines Systems auseinander, in welchem chemische Reaktionen ablaufen können, welches homogen, isobar und isotherm ist und bezüglich einer oder mehrerer Komponenten in Kontakt mit Bädern vorgeschriebenen chemischen Potentials ist. *J. Meixner.*

Glansdorff, P. et J. Passelecq: Sur les transformations irréversibles voisines d'un état stationnaire pour des contraintes à courants constants. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 43, 188—194 (1957).

Der im obenstehenden Referat erwähnte Satz von Glansdorff und Prigogine wird auf den Fall erweitert, daß die Oberflächenbedingungen zeitlich konstanter Temperatur oder chemischer Potentiale teilweise oder ganz durch zeitliche Konstanz der zugeordneten Stromdichten auf der Oberfläche ersetzt sind und es werden Bedingungen dafür angegeben, daß das System sich nicht aus dem stationären Zustand entfernen kann. Erst werden die thermische Leitfähigkeit und die chemischen Reaktionen gesondert behandelt, daran schließt sich die Diskussion des allgemeinen Falls. *J. Meixner.*

Klein, Martin J.: Generalization of the Ehrenfest urn model. Phys. Review. II. Ser. 103, 17—20 (1956).

In essence, the model considered is the following. $R + l$ distinguishable balls are in urn A , $R - l$ in urn B at time $n\tau$, where τ is given, and n is a positive integer. At this time $n\tau$ a transition occurs which is either $A \rightarrow B$ or $B \rightarrow A$ for one of the particles. Each ball has an equal chance of being chosen for the transition, and the probabilities for the two transitions at time $n\tau$ are respectively $p(R + l)/2R$ and $p'(R - l)/2R$ ($0 < p, p' < 1$). This specification holds for all integers n . The model represents a system with two energy levels in contact with a heat bath. The stochastic equations are formulated and solved. *P. T. Landsberg.*

Brinkman, H. C.: Brownian motion in a field of force and the diffusion theory of chemical reactions. Physica 22, 29—34 (1956).

Hamburger, L.: Sur quelques transformations de variables relatives à l'équation de la chaleur. Acad. Républ. popul. Roumaine, Inst. Méc. appl., Revue Méc. appl. 1, Nr. 1, 203—214 (1956).

Data l'equazione del calore in uno spazio ad $n + 1$ dimensioni $(x_1, x_2, \dots, x_n; t)$, $\Delta U = U_t$, si cercano, estendendo così un noto risultato di Appel per lo spazio $(x; t)$, le possibili trasformazioni $y_i = y_i(x_j; t)$, $\tau = \tau(x_j; t)$, $U = V(y_i; \tau)$, $\sigma(x_j; t)$, per le

quali la equazione del calore rimane immutata. Con l'ausilio del calcolo matriciale, si mostra che, come già nel caso unidimensionale di Appel, le trasformazioni ricercate non possono essere altro che inversioni, similitudini o loro combinazioni, a meno naturalmente di traslazioni o rotazioni rigide. *G. Sestini.*

Baratta, Maria Antonietta: Sopra un problema cilindrico non lineare di propagazione del calore. *Rivista Mat. Univ. Parma* 6, 389—398 (1955).

Baratta, Maria Antonietta: Sopra un problema non lineare di propagazione del calore in un mezzo dotato di simmetria sferica. *Boll. Un. mat. Ital., III. Ser.* 11, 427—431 (1956).

Si risolve il problema della ripartizione del calore in due mezzi omogenei e termicamente isotropi, riempienti un cilindro e un manicotto cilindrico rotondi, indefiniti e coassiali (primo lavoro) — oppure una sfera ed una crosta sferica concentriche (secondo lavoro) — quando sulla superficie comune ai due mezzi esiste una distribuzione di sorgenti variabile col tempo ed una resistenza termica di contatto, funzione del salto termico $\Phi(t)$ tra le temperature dei due corpi sulla superficie in contatto. Il problema analitico non lineare è ricondotto, come nel caso di flusso lineare, esaminato in precedente lavoro (cfr. questo Zbl. 58, 420) alla risoluzione di una equazione integrale, non lineare, singolare di Volterra di seconda specie nell'incognita funzione $\Phi(t)$. *G. Sestini.*

Kuščer, I.: Milne's problem for anisotropic scattering. *J. Math. Physics* 34, 256—266 (1956).

Das Milnesche Problem für anisotrope Streuung bei beliebiger Streufunktion wird nach einer Methode behandelt, die eine Verallgemeinerung eines Ansatzes von Chandrasekhar darstellt. Explizite Ausdrücke für die asymptotische Näherung in großen Tiefen, sowie die exakte Lösung an der Oberfläche werden für die mittlere Intensität angegeben. *K. Hunger.*

Beattie, I. R. and D. R. Davies: A solution of the diffusion equation for isotopic exchange between a semi-infinite solid and a well stirred solution. *Philos. Mag., VIII. Ser.* 1, 874—879 (1956).

Con l'uso della trasformata di Laplace si dà l'espressione della concentrazione C in un processo di diffusione di un solido seminfinito in un dato volume V di liquido bene agitato, ritenendo valide le due leggi di Fick e limitandosi al caso unidimensionale. Sono dati i diagrammi della C in funzione del tempo t sulla superficie di separazione solido-soluzione e in funzione della coordinata locale x per alcuni valori di t ed anche, fisso t , per valori diversi del rapporto A/V , essendo A l'area della superficie comune al solido e alla soluzione. *G. Sestini.*

Acrivos, Andreas: The transient response of stagewise processes. II. *J. Soc. industr. appl. Math.* 4, 120—130 (1956).

An den ersten Teil seiner Abhandlung anknüpfend (dies. Zbl. 72, 209) dehnt der Verf. im zweiten Teil seine Untersuchungen auf solche chemischen Prozesse aus, bei denen Retardierungen eintreten, sei es, daß die Flüssigkeit zum Durchlaufen eines Kanals eine gewisse Zeit braucht, um von einem Reaktor zu einem anderen zu gelangen, sei es, daß sie während einer gewissen Zeitspanne festgehalten wird, um Kontrollmessungen vornehmen zu können. Wird die Temperatur im n -ten Reaktor mit $T(n)$ bezeichnet, die Konzentration der i -ten Komponente im n -ten Reaktor mit $c_i(n)$, und ist

$$E_C^{-1} f(t) = f(t - \vartheta_C), \quad E_R^{-1} f(t) = f(t - \vartheta_R)$$

(ϑ_C und ϑ_R sind Nachlaufzeiten), so führt die lineare Theorie auf das folgende

System von Differentialgleichungen für die $\delta T(n)$ und die $\delta c_i(n)$

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta T(n)) &= \sum_{k=0}^N a_k(n) [E_R^{-1} \delta T(k) - \delta T(n)] + \left(\frac{dh(n)}{dT(n)} \right)_0 E_C^{-1} \delta T(n) \\ &\quad + \sum_{j=1}^l b_j \left\{ \left(\frac{\partial R_j}{\partial T(n)} \right)_0 \delta T(n) + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial R_j}{\partial c_i(n)} \right)_0 \delta c_i(n) \right\}, \quad 1 \leq n \leq N, \\ \frac{d}{dt}(\delta c_i(n)) &= \sum_{k=0}^n a_k(n) [E_R^{-1} \delta c_i(k) - \delta c_i(n)] + \sum_{j=1}^l v_j^i \left\{ \left(\frac{\partial R_j}{\partial T(n)} \right)_0 \delta T(n) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial R_j}{\partial c_i(n)} \right)_0 \delta c_i(n) \right\}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned} \right.$$

Dieses System kann mit

$$x(n) = \begin{pmatrix} \delta T(n) \\ \delta c_1(n) \\ \vdots \\ \delta c_m(n) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N) \end{pmatrix}$$

symbolisch als Matrixengleichung geschrieben werden,

$$dx/dt = A(E_R^{-1}, E_C^{-1}) x.$$

Die Benutzung der Laplaceschen Transformation führt auf die Lösung

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{s_k t} \operatorname{adj} [s_k I - A(e^{-s_k \vartheta_R}, e^{-s_k \vartheta_C})] \frac{d}{ds} \left[s I - A(e^{-s \vartheta_R}, e^{-s \vartheta_C}) \right]_{s=s_k} x(0),$$

worin s_r die Wurzeln der transzendenten Gleichung

$$\Delta(s) = \det [s I - A(e^{-s \vartheta_R}, e^{-s \vartheta_C})] = 0$$

bedeuten. Die Lösungen des Systems (1) sind stabil, wenn die Nullstellen von $\Delta(s)$ nicht in der positiven Halbebene liegen. — Bei den folgenden Untersuchungen über gestörte Systeme wird die Antwort auf einen im Zeitpunkt $t = 0$ wirkenden Stoß durch das symbolisch in Matrizenform dargestellte System von Differentialgleichungen

$$dx/dt = A(E_R^{-1}, E_C^{-1}) x + g(t)$$

beschrieben. Auch dieses Gleichungssystem wird mit Hilfe der Laplaceschen Transformation gelöst. Ein numerisches Beispiel beschließt die Arbeit. *W. Quade.*

Elektrodynamik. Optik:

Hansen, Robert C.: Electromagnetic field solutions for rotational coordinate systems. *Canadian J. Phys.* **34**, 893—895 (1956).

Die Lösung der vektoriellen Helmholtz-Gleichung $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{E} = k^2 \mathfrak{E}$ wird in der Form $\mathfrak{E} = \operatorname{rot} (a_3 \cdot f)$ angesetzt (a_3 Einheitsvektor in Richtung der Rotations-Symmetrieachse, f skalare Raumfunktion). Die Diff.-Gleichung für f ist dann identisch mit der Diff.-Gleichung für die Drehwinkel-unabhängige Funktion bei einem Separationsansatz für die Maxwell'schen Gleichungen, wenn der Eigenwert $m = 1$ für die Drehwinkel-abhängige Funktion genommen wird. *D. Kamke.*

Castro, E. de: Su un coordinamento delle definizioni e delle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo. *Atti Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., Anno 244°, Rend., XI. Ser.* **3**, Nr. 2, 97—114 (1956).

Smythe, W. R.: Charged right circular cylinder. J. appl. Phys. 27, 917—920 (1956).

Die Bestimmung des elektrostatischen Potentials in der Umgebung eines kreiszylindrischen geraden Leiters (Länge $2c$, Radius a) wird so durchgeführt, daß eine Oberflächenladungsdichte

$$\sigma_s = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[\left(\frac{c}{a} \right)^2 - \left(\frac{z}{a} \right)^2 \right]^{n-1/3}$$

auf der Mantelfläche,

$$\sigma_e = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[1 - \left(\frac{\varrho}{a} \right)^2 \right]^{n-1/3}$$

auf den Endflächen eingeführt wird. Dann läßt sich das Potential im ganzen Raum (Zylinderkoordinaten z, ϱ, Θ) angeben. Die Bedingung, daß im Innern, speziell bei $\varrho = 0$, die geraden Ableitungen von V nach z verschwinden müssen, führt zu Gleichungen für A_n und B_n , die iterativ und numerisch gelöst werden können. Bricht man die Reihe ab, so ergibt sich konstantes Potential nicht genau auf der Kreiszylinderfläche. Beispiele werden angegeben für die Verhältnisse $c/a = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2$ und 4 und Näherungen bis zu A_3 und B_3 , auch A_4 und B_2 . — Die Kapazität wird berechnet zu

$$C = \pi a \varepsilon \sum_n \left[\frac{2 B_n}{n + \frac{2}{3}} + \frac{(2b)^{1/3} b^{2n} \left(n - \frac{1}{3} \right)! G A_n}{\left(n + \frac{1}{6} \right)!} \right]$$

mit $G = \left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right)^2 \left(\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right)^{-1} = 0,684463408$; ε = Dielektrizitätskonstante.

D. Kamke.

Waters jr., William E.: Properties of a coaxial-torus capacitor. J. appl. Phys. 27, 1211—1214 (1956).

Führt man in einer die Symmetrie-Drehachse enthaltenden Schnittebene Polarkoordinaten (r, Θ) ein mit Zentrum in dem gemeinsamen Mittelpunkt von innerer und äußerer Elektrode (Schnittfigur zwei konzentrische Kreise), so lautet die Laplace'sche Gleichung für den Elektroden-Zwischenraum

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[\mu (1 - \mu \cos \Theta) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial}{\partial \Theta} \left[\frac{1 - \mu \cos \Theta}{\mu} \frac{\partial V}{\partial \Theta} \right] = 0$$

mit $\mu = r/b$ (b eine Maßstab-Konstante). V ist periodisch in Θ und außerdem eine gerade Funktion. Da es den Verff. nicht gelang eine Koordinaten-Transformation zu finden, nach welcher die Diff.-Gleichung separierbar war, wurde ein Fourier-Reihenansatz

$$V(\mu, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mu) \cos n \Theta$$

verwendet. Rekursionsformeln für $a_n(\mu)$ werden angegeben. — Die Kapazität für den koaxialen Toruskondensator ergibt sich zu

$$C = 4 \pi^2 \varepsilon b \left[\frac{1}{\ln a/c} - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left\{ \frac{1 - (c/a)^2}{\ln a/c} - \frac{2c}{a} \right\} \right]$$

mit b = Radius der zentralen Kreislinie des Torus, a Radius der äußeren Torus-Elektrode, c Radius der inneren Torus-Elektrode, ε Dielektrizitätskonstante.

D. Kamke.

Tonolo, Angelo: Sulla determinazione del campo elettromagnetico all'interno di un conduttore omogeneo e isotropo. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 20, 556—560 (1956).

L'A. completa i calcoli della nota già recensita in questo Zbl. 71, 212.

D. Graffi.

●Neeteson, P. A.: Analysis of bistable multivibrator operation. The Eccles-Jordan flip-flop circuit. (Philips Technical Library.) Eindhoven: N. V. Philip's Gloeilampenfabrieken, Hamburg: Deutsche Philips G. m. b. H. 1956. 82 p.

Der bistabile Multivibrator besteht aus zwei gleichen Trioden, deren Anoden- und Gitterkreise durch R-C-Schaltungen derart gekoppelt sind, daß immer eine der beiden Röhren leitet und die andere nicht. Das ergibt zwei stabile Zustände, die man mit zwei möglichen Stellungen eines Schalters vergleichen kann. Durch einen Spannungsimpuls auf die Gitter der Röhren kann man einen Übergang von einem Zustand in den anderen bewirken. Die Schaltung ist schon seit 1919 bekannt, hat aber erst in den letzten Jahren für elektronische Zähl- und Rechengерäte, als Frequenzteiler usw. größere Bedeutung erlangt. Daher machte sich das Bedürfnis nach einer genaueren Theorie geltend. Der Verf. gibt zunächst eine Übersicht der bisherigen Literatur und stellt sich dann die Aufgabe, die Funktion des Multivibrators „dynamisch“, das heißt im Hinblick auf die Übergangsvorgänge zu behandeln, um daraus Aufschlüsse über die erforderliche Höhe der auslösenden Impulse und ihre größte zulässige Folgefrequenz zu erhalten. Zu diesem Zweck zerlegt er den Umschaltvorgang in folgende drei Phasen: 1) Die Schaltung befindet sich in Ruhe; die Nachwirkungen alles Voraufgegangenen sind vollständig erloschen. Die erste Röhre ist leitend, die zweite nicht. Ein trapezförmiger, negativer Spannungsimpuls wirkt auf beide Gitter und macht beide Röhren nichtleitend. Das Netzwerk verhält sich passiv; es steht unter der Wirkung des Impulses und der plötzlichen Ausschaltung von Anoden- und Gitterstrom der ersten Röhre. 2) Die zweite, ursprünglich nichtleitende Röhre erreicht zuerst den Punkt, bei dem der Anodenstrom zu fließen beginnt und allmählich wächst, während die Anodenspannung sinkt. Ein Gitterstrom ist noch nicht vorhanden. 3) Der Gitterstrom der zweiten Röhre setzt ein. Die ganze Schaltung geht allmählich in den stabilen Endzustand über. — Wenn in diesem Endzustand überhaupt kein Gitterstrom fließt, so fällt die dritte Phase weg. Für jede der drei Phasen wird die Reaktion des Netzwerkes gesondert berechnet, und ihre Anteile werden überlagert. Dabei wird das zeitlich veränderliche Netzwerk durch ein konstantes lineares ersetzt, welches unstetige Strom- und Spannungsquellen enthält. Diese werden mit Hilfe der Heavisideschen Sprungfunktion dargestellt, und ihre Wirkung auf das Netzwerk wird mit Operatoren berechnet. Folgende vereinfachende Annahmen werden gemacht: Der Impuls ist so hoch und sein Anstieg so steil, daß die ursprünglich leitende Röhre augenblicklich ausgeschaltet wird. Die Endflanke des Impulses bleibt unberücksichtigt. Die Röhrenkennlinien werden als Gerade angenommen. Die Spannung zwischen Gitter und Kathode der leitenden Röhre wird gleich Null gesetzt. Auch unter diesen Vereinfachungen werden die Rechnungen noch sehr kompliziert. Der Verf. führt sie numerisch an mehreren Beispielen durch, vergleicht die errechneten Schwingungsformen mit Oszillogrammen und findet gute Übereinstimmung. Er gibt Hinweise für die zweckmäßige Dimensionierung. Die erforderliche Höhe der auslösenden Impulse liegt etwa zwischen 10 und 30 Volt. Schwieriger ist es, die höchste Impulsfolgefrequenz anzugeben, bei der der Multivibrator noch zuverlässig arbeitet; sie scheint etwa in der Größenordnung von 200 kHz zu liegen.

G. Günther.

Arus, Lorenzo: Sulle oscillazioni forzate nei sistemi non lineari a n gradi di libertà. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 7 (1953—54), 182—188 (1956).

L'A. determina un valore maggiorante, di semplice significato fisico, per le correnti periodiche, di periodo T , in un sistema di n circuiti ($n > 2$), collegati induttivamente, di resistenza non lineare, soggetti a forze elettromotrici sinoidali di periodo T . Il risultato viene ottenuto nelle seguenti ipotesi: a) le mutue induzioni sono tutte negative, b) T inferiore al più piccolo periodo delle oscillazioni proprie del sistema quando le resistenze sono nulle. L'A. espone anche qualche proprietà di queste oscillazioni.

D. Graffi.

Davidson, P. M.: Some theorems in group velocity. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 9, 122—127 (1956).

The motion in various types of dispersive media resulting from an arbitrary initial state of disturbance is characterized by certain quantities which are independent of the time and may be expressed as a suitable average of the group velocity (or a power of it) over the range of wave contained in a Fourier spectrum of the original disturbance.

F. Oberhettinger.

Ževakin (Zhevakin), S. A. and V. M. Fajn (Fain): The theory of nonlinear effects in the ionosphere. Soviet Phys., JETP 3, 417—425 (1956), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 30, 518—527 (1956).

Die Resultate der Arbeit von Fain (dies. Zbl. 67, 234) werden angewandt. Die ionosphärische Kreuzmodulation wird berechnet für den Grenzfall kleiner und großer Modulationsfrequenz (verglichen mit dem Produkt Stoßzahl mal Massenverhältnis Elektron zu Ion). Im ersten Fall wird aus der Erhöhung der effektiven Temperatur direkt die Vergrößerung der Stoßzahl entnommen. Im Gegensatz zum Zitat wird elliptische Polarisation der Störwelle betrachtet; dadurch kommt ein Zusatzterm in die effektive Temperatur, der negativ für die Drehrichtung der ordentlichen, aber positiv für die der außerordentlichen Komponente ist. Der spezielle Fall der Gyro-Resonanz wird gesondert behandelt. Im zweiten Fall werden die Formeln des Zitats benutzt. Numerische Abschätzung ergibt, daß die bisher benutzten Näherungen oft unzureichend sind, jedenfalls bei Sender-Leistungen von 250 kW und mehr. Schließlich wird die Selbst-Modulation berechnet, indem der aus der gestörten Verteilung folgende Strom in die Maxwell'schen Gleichungen eingesetzt wird. Es zeigt sich, daß in Vilenskii's Arbeit (dies. Zbl. 52, 438) ein Normierungsfehler unterlaufen ist; V. hat den Effekt auf die Amplitude 4-fach, den der Phase 1200-fach überschätzt.

K. Rawer.

Epstein, Paul S.: Theory of wave propagation in a gyromagnetic medium. Reviews modern Phys. 28, 3—17 (1956).

Seit einigen Jahren ist ein Material bekannt (Ferrit), in dem die Dielektrizitätskonstante für periodische elektromagnetische Felder ein reeller oder komplexer Skalar ist, die Permeabilität aber ein Tensor der Form

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & i\kappa & 0 \\ -i\kappa & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß ein zusätzliches räumlich und zeitlich konstantes äußeres Magnetfeld in z -Richtung angelegt worden ist. Die Tensorkomponenten hängen von diesem Feld und von der Frequenz des periodischen Feldes ab. Verf. berichtet über Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen in diesem Material, die der Ausbreitung von Wellen entsprechen und geht vor allem auf die Anwendungen im cm-Wellenbereich ein.

G. Höhler.

Wu, Tai Tsun: Highfrequency scattering. Phys. Review, II. Ser. 104, 1201—1212 (1956).

In der Arbeit wird die Reflektion ebener hochfrequenter, elektromagnetischer Wellen an den einfachsten Körpern wie Kreiszylinder und Kugel berechnet. Vor allem werden dabei Formeln für den wirksamen Radar-Querschnitt angestrebt. Wie üblich werden die metallischen Hindernisse als vollkommen leitend angesehen. Neben dem elektromagnetischen Reflektionsvorgang wird auch noch für die starre Kugel die Reflektion akustischer Wellen und für die undurchdringliche Kugel die nach quantenmechanischen Gesetzen ablaufende Rückstrahlung untersucht. Besondere Aufmerksamkeit wird den Kriechwellen zugewandt. Für den Streuungsquerschnitt eines Kreiszylinders werden asymptotische Entwicklungen angegeben, die besonders für

sehr kleine Wellenlängen brauchbar sind. Schließlich wendet der Verf. die besondere Methode, die er für das Studium der Kriechwellen benutzt, auch noch auf die angenäherte Berechnung der Stromverteilung auf der Oberfläche der Hindernisse an.

H. Buchholz.

Hoehnke, Hans-Jürgen: Die Konstanten der Wellenleitungen. Eine Ausdehnung der Abrahamschen Leitungstheorie. Arch. Elektrotechn. 42, 426—448 (1956).

Verf. diskutiert den Übertragungsmechanismus für UKK-Wellen in dielektrischen und metallischen Wellenleitungen. Er zeigt, daß der Übertragungsmechanismus für T—M-Wellen sowohl durch die effektiven als auch durch die scheinbaren Konstanten beschrieben werden kann. Der Fall ebener geschichteter Medien wird behandelt.

H. Falkenhagen, G. Kelbg.

Aymerich, Giuseppe: Sulla teoria della propagazione in una guida contenente un dielettrico giromagnetico. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 26, 165—180 (1956).

L'A. riconduce il problema della propagazione in una guida d'onda riempita totalmente o parzialmente da un mezzo giromagnetico e giroelettrico (il campo agente sul mezzo è parallelo all'asse della guida) ad un sistema di equazioni integrali del tipo di Fredholm. Dopo aver indicato un metodo per dedurre, da queste equazioni, i numeri d'onda relativi ai modi di propagazione, considera la guida a sezione circolare e stabilisce condizioni sufficienti per l'esistenza di modi dissimetrici.

D. Graffi.

Toraldo de Francia, Giuliano: Il metodo variazionale di Levine e Schwinger, applicato agli schermi a conduttività unidirezionale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 21, 86—91 (1956).

Die Variationsmethode der Beugungstheorie von Levine und Schwinger wird für einen Schirm von gerichteter Leitfähigkeit formuliert. Die Anwendung auf einen sehr kleinen Kreisschirm ergibt den vom Verf. bereits früher (dies. Zbl. 71, 215) abgeleiteten Wert für den Streuquerschnitt.

Walter Franz.

Voelker, Dietrich: Anwendung der Laplace-Transformation auf die Beugung an unregelmäßigen Gittern. Revista Un. mat. Argentina 18, 3—15 (1956) [Spanisch].

Ein paralleles Strahlenbündel fällt senkrecht auf ein Gitter mit unendlich langen Spalten, deren Abstände t vom Anfangsspalt von 0 bis ∞ laufen. Die Beugung wird durch eine Linse (von unendlicher Ausdehnung in der Spalttrichtung) beobachtet. Das Problem kann dann als eindimensional behandelt werden (Fraunhofersche Beugung),

und die beobachteten Amplituden sind bis auf einen Faktor $a(p) = \int_0^{\infty} e^{-2\pi i t} F(t) dt$,

wo $F(t)$ die Transparenz der Spalte (die beliebige Werte haben kann und nicht konstant zu sein braucht) bedeutet und $p = (\pi/\lambda) \sin 2\vartheta$ ist mit $\lambda =$ Wellenlänge des Lichtes, $2\vartheta =$ Beugungswinkel. Das Fourier-Integral $a(p)$ wird als Wert

des Laplace-Integrals $\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$ auf der imaginären Achse aufgefaßt ($s = 2\pi i$)

und für verschiedene Gitter explizit ausgerechnet: mit einem Spalt mit nichtkonstanter Transparenz, mit unendlich vielen Spalten mit gleicher Breite und wachsenden bzw. abnehmenden Abständen, und mit zunehmender Breite und zunehmenden Abständen. Dabei kann festgestellt werden, welche Spaltverteilungen endliche Amplituden ergeben, bzw. welche Dämpfung der Transparenz bei gegebener Spaltverteilung zur Erzielung einer endlichen Amplitude nötig ist.

G. Doetsch.

Keller, J. B., R. M. Lewis and B. D. Seckler: Asymptotic solution of some diffraction problems. Commun. pure appl. Math. 9, 207—265 (1956).

Die Lösung eines Beugungsproblems wird als asymptotische Entwicklung nach Potenzen der Wellenzahl aufgesucht. Dazu wird von der Eikonalgleichung als

nullter Näherung ausgegangen; die höheren Näherungen werden sukzessive aus homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung gewonnen, welche längs Strahlen integriert werden. Die Methode wird auf eine große Zahl von Beugungsproblemen angewandt, welche zum Teil bisher noch nicht gelöst worden waren. Bei den bereits bekannten Beispielen ergibt sich Übereinstimmung mit den früheren Formeln.

Walter Franz.

Sivuchin (Sivukhin), D. V.: Theory of elliptic polarization of light reflected from isotropic media. Soviet Phys., JETP 3, 269—274 (1956), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 30, 374—381 (1956).

Verf. leitet für die Amplituden des reflektierten Lichtes Gleichungen ab, indem der Effekt einer Übergangsschicht des betrachteten Mediums berücksichtigt wird. Spezielle Voraussetzungen über die molekulare Struktur des Mediums oder der Grenzschicht werden nicht gemacht, so daß die Gleichungen sowohl für dicke als auch für monomolekulare Schichten gültig sind.

H. Falkenhagen, G. Kelbg.

Sokolov, A.: On the relativistic motion of electrons in magnetic fields when quantum effects are taken into account. Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 3, 743—759 (1956).

Verf. berichtet über neuere Arbeiten zum Problem der elektromagnetischen Strahlung von Elektronen, die sich mit sehr großer Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn bewegen. Insbesondere geht er dabei auf Quanteneffekte ein, die u. U. bei mehreren GeV die Stabilität der Elektronenbahnen im Synchrotron gefährden und schließlich zusammen mit den stark ansteigenden Energieverlusten durch Abstrahlung die praktisch erreichbare Maximalenergie für Zirkularbeschleuniger festlegen.

G. Höhler.

Nardini, Renato: Sui fronti d'onda nella magneto-idrodinamica. Rivista Mat. Univ. Parma 7, 1—32 (1956).

Si esamina, in modo sistematico, la possibilità di una propagazione di tipo ondoso per fenomeni magneto-idrodinamici. Si mostra che, per conducibilità elettrica γ finita, c'è separazione fra eventuale propagazione elettromagnetica ed eventuale propagazione idrodinamica, mentre per mezzi viscosi non è possibile alcuna propagazione. Nel caso di mezzi ideali e con $\gamma = \infty$, se non si trascura la corrente di spostamento ed il mezzo è incompressibile, sono possibili, in generale, 4 valori per la velocità di avanzamento di fronti d'onda magneto-idrodinamici: due di tali valori si distinguono fra loro e dai rimanenti solo se sul fronte d'onda non è nulla la componente tangenziale H_t del campo magnetico. Questi due valori sussistono anche per mezzi compressibili, dove, sempre per $H_t \neq 0$, si possono avere altri modi (da 2 a 4), dovuti a sovrapposizione di fenomeni magneto-idrodinamici ed acustici. Due di tali modi misti sussistono anche trascurando la corrente di spostamento: al riguardo si riportano dati numerici relativi a questioni di fisica cosmica. Autoreferat.

Vacca, Maria Teresa: Onde magneto-idrodinamiche in un fluido elettricamente conduttore entro un tubo indefinito a sezione rettangolare. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 90, 633—646 (1956).

On étudie la propagation d'ondes magnéto-hydrodynamiques dans un fluide homogène, isotrope, incompressible électriquement conducteur, se mouvant dans un tube indéfini à section rectangulaire, et étant sous l'influence d'un champ magnétique axial uniforme \vec{H}_0 . En cherchant des solutions de la forme $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$, $\vec{v} = \pm \sqrt{\mu/4\pi\rho} \vec{h}$, on trouve que le mouvement du fluide est constitué par une propagation suivant l'axe z , d'ondes magnéto-hydrodynamiques sinusoïdales par rapport au temps, ayant une amplitude fonction de x et y et s'atténuant pour les z croissants.

Dan Gh. Ionescu.

Socio, Marialuisa de: Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche in un gas ionizzato soggetto a un campo magnetico. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 7 (1953—54), 68—77 (1956).

L'A., con semplici considerazioni di calcolo vettoriale omografico, ricava, in modo organico, le diverse formule proposte da vari autori per la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche piane in un gas ionizzato soggetto a un campo magnetico. Determina inoltre l'espressione del campo elettromagnetico dell'onda stessa e ne studia la sua polarizzazione. *D. Graffi.*

Stewartson, K.: Motion of a sphere through a conducting fluid in the presence of a strong magnetic field. Proc. Cambridge philos. Soc. 52, 301—316 (1956).

Der Strömungszustand einer leitenden viskositätsfreien Flüssigkeit in der Umgebung einer gleichförmig bewegten Kugel unendlicher Leitfähigkeit wird mittels Laplace-Transformation für das Anfangswertproblem: ruhende Kugel für $t \leq 0$, gleichförmig bewegte Kugel für $t > 0$ asymptotisch für $t \rightarrow \infty$ berechnet. Ein starkes homogenes Magnetfeld wird zugelassen. Die Bedingungen, unter denen Verschiebungsstrom, Raumladungen, Viskositätseffekte quadratische elektromagnetische und Trägheitsterme vernachlässigbar sind, werden abgeschätzt. Unter diesen Voraussetzungen bewegt sich für $t \rightarrow \infty$ bei beliebiger Bewegungsrichtung zum Magnetfeld die Flüssigkeit innerhalb des zur Bewegung parallelen Zylinders durch den Kugelumfang wie ein starrer Körper gleichförmig mit der Kugel mit. Auf der Zylinderfläche wird die Geschwindigkeit für $t \rightarrow \infty$ singulär, wegen der Vernachlässigung von Viskosität und nichtlinearen Termen. Die Strömungsgeschwindigkeit außerhalb des Zylinders nimmt mit wachsendem Abstand r von der Symmetrieachse ab (für orthogonale Bewegung proportional r^{-3}). Die asymptotischen Lösungen bleiben trotz der Singularität im wesentlichen konsistent, solange die hydrodynamische Reynolds-Zahl groß, die magnetische Reynolds-Zahl klein ist, und die magnetische Energie groß ist gegen die Trägheitsenergie. — Die Analogie zur Bewegung eines Körpers in einer rotierenden Flüssigkeit und die Übertragung der Ergebnisse auf beliebig geformte Körper werden diskutiert. *H. Rother.*

Blanc-Lapierre, André, Pierre Dumontet et Michel Savelli: Sur quelques points de la théorie de la détection quadratique du bruit de fond. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 2911—2913 (1956).

Les AA. étudient le spectre de $X^2(t) + S^2(t)$ où $X(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire laplacienne et où $S(t)$ est la transformée de dans certains filtres linéaires particuliers. (Résumé des auteurs.) *R. Féron.*

Costa de Beauregard, Olivier: Sur l'équivalence entre information et entropie et sur l'irréversibilité en physique. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 1728—1730 (1956).

Discussion (verbale) des modèles de la mesure physique de J. von Neumann et de L. Brillouin. *B. Mandelbrot.*

Relativitätstheorie:

Estabrook, Frank, B.: Nonclassical transformation in special relativity. Phys. Review, II. Ser. 103, 1579—1580 (1956).

Hoang, Pham Tan: Sur le potentiel électromagnétique créée par des particules chargées. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 2103—2106 (1956).

Im Riemannschen Raum-Zeit Kontinuum von gegebener Metrik unter der Annahme des quasi-statischen Zustandes wird das elektromagnetische Potential bestimmt, welches durch ein System von geladenen Teilchen erzeugt wird. Der Verf. zeigt dann, daß dieses Potential die erste Annäherung von, auf besondere Art, modifizierten Gleichungen des antisymmetrischen Feldes in der Einsteinschen einheitlichen Feldtheorie befriedigt. *T. P. Angelitch.*

Takeno, Hyôitirô: Some wave solutions of Einsteins generalized theory of gravitation. Tensor, n. Ser. 6, 69—82 (1956).

Das früher von Hlavatý im Rahmen seiner allgemeinen Untersuchung über die Geometrie der unitären Feldtheorie Einsteins gewonnene Resultat — es existieren Lösungen der unitären Feldgleichungen, bei denen der symmetrische Teil $g_{\mu\nu}$ des Fundamentaltensors $g_{\mu\nu}$ von der Minkowskischen Form und der antisymmetrische Teil $g_{\mu\nu}$ von der Form einer ebenen Welle ist — wird vom Verf. auf unabhängigem Wege neu gewonnen und diskutiert. Ist $g_{\mu\nu}$ der metrische Tensor und somit das Gravitationspotential und ist $g_{\mu\nu}$ der zur elektromagnetischen Feldstärke duale Tensor, so erfüllt das gefundene elektromagnetische Feld die speziell-relativistischen Maxwell'schen Gleichungen für das Vakuum. Im Gegensatz zur Einstein-Maxwell'schen Theorie erlaubt somit die unitäre Feldtheorie Einsteins die Existenz von elektromagnetischen Strahlungsfeldern, die kein Gravitationsfeld erzeugen.

H. Tredér.

Takeno, Hyôitirô: On some generalized plane wave solutions of non-symmetric unified field theories. Tensor, n. Ser. 7, 34—58 (1957).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit (s. vorstehendes Referat) untersucht der Verf., ob die Einsteinschen oder die Schrödingerschen unitären Feldgleichungen Lösungen zulassen, in denen der antisymmetrische Teil $g_{\mu\nu}$ des unsymmetrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ von der Form ebener Wellen ist, der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ hingegen entweder die zur Minkowskischen Form konforme Form $g_{\mu\nu} = A(r, t) \eta_{\mu\nu}$ hat oder es plansymmetrisch im Sinne von Taub (dies. Zbl. 44, 228) ist. Der Verf. zeigt, daß bei Gültigkeit der Schrödingerschen Feldgleichungen überhaupt keine strengen Lösungen dieser Art existieren, bei Gültigkeit der Einsteinschen Feldgleichungen aber genau dann, wenn die Metrik $g_{\mu\nu}$ auf die Minkowskische Form transformierbar ist, die Lösungen also mit der in der ersten Arbeit des Verf. diskutierten Lösung identisch sind.

H. Tredér.

Takeno, Hyôitirô: An addendum to "Some wave solutions of Einstein's generalized theory of gravitation" and "On some spherical wave solutions of non-symmetric unified field theories". Tensor, n. Ser. 7, 141—142 (1957).

Der Verf. vergleicht die Ergebnisse seiner Arbeiten über ebene und kugelsymmetrische Wellenlösungen in der unitären Feldtheorie Einsteins (s. die beiden vorstehenden Referate sowie dies. Zbl. 72, 441) mit den Resultaten früherer Arbeiten von Hlavatý (dies. Zbl. 55, 209; 66, 219; 48, 162 und 72, 441) und betont, daß alle von ihm behandelten Lösungen zur dritten Klasse Hlavatýs ($\det |k_{\mu\nu}| = 0$, $k_{\mu\nu} k^{\mu\nu} = 0$ mit $k_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$) gehören.

H. Tredér.

Ikeda, Mineo: On boundary conditions in the non-symmetric unified field theory. Progress theor. Phys. 15, 1—11 (1956).

Finzi, Bruno: Teorie relativistiche unitarie. Atti V. Congr. Un. Mat. Ital. 35—56 (1956).

Zusammenfassendes Referat über einige Beiträge zur einheitlichen Feldtheorie von Gravitation und Elektromagnetismus mit umfangreicher, naturgemäß aber nicht vollständiger Bibliographie (etwa 70 Titel). Es werden jeweils die einfachen Grundlagen der folgenden Theorien behandelt: Fünfdimensionale Theorie von Kaluza-Klein, Projektive Relativitätstheorie von Veblen (Hinweise auf die Bücher von G. Ludwig, Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie, dies. Zbl. 44, 424, und P. Jordan, Schwerkraft und Weltall, Kap. III, dies. Zbl. 48, 216, sucht man vergeblich), Weylsche Theorie (mit Erwähnung des gravierenden Einwands, daß Skalare hier nicht unabhängig vom Wege übertragen werden, aber ohne Hinweis auf die neueren Ansätze zur Überwindung dieser Schwierigkeit — z. B. G. Lyra, dies. Zbl. 42, 159) und schließlich die Einsteinsche Theorie mit unsymmetrischem Fundamentaltensor.

D. Laugwitz.

Gutzwiller, Martin: Quantum theory of wave fields in a curved space. *Helvet. phys. Acta* 29, 313—338 (1956).

Extension de la formule de propagation d'Hadamard à l'univers de De Sitter, pour les cas du spin 0 et $1/2$ et pour le champ électromagnétique. Définition des états à énergie positive ou négative. Superquantification et formules de non-commutation.

O. Costa de Beauregard.

Fantappiè, Luigi: Deduzione autonoma dell'equazione generalizzata di Schrödinger, nella teoria di relatività finale. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl., Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. 19, 367—373 (1956).

L'A. étudie dans le cadre de la théorie de la relativité finale qu'il a proposée dans des publications antérieures [ce Zbl. 57, 202; et *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. 19, 213—217 (1955)] une équation d'ondes généralisant l'équation de Klein-Gordon.

G. Petiau.

Quantentheorie:

Fujiwara, I.: On the basic formulation of classical and quantum theories. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 4, 1575—1579 (1956).

Une axiomatique commune aux deux théories. Remarques sur la technique des chemins de Feynman.

O. Costa de Beauregard.

Jeffreys, Bertha: The use of the Airy functions in a potential barrier problem. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 52, 273—279 (1956).

The author obtains the exact solution, in terms of Airy functions and trigonometric functions, for a symmetric trapezoidal potential barrier as it applies to the one-dimensional Schrödinger equation. She also presents numerical results on the triangular barrier which illustrate how good an estimate the first term of the asymptotic approximation by the WKB method gives, even for moderate values of a parameter assumed to be large.

H. A. Antosiewicz.

Kolsrud, Marius: Exact quantum dynamical solutions for oscillator-like systems. *Phys. Review*, II. Ser. 104, 1186—1188 (1956).

La technique conduisant à ce résultat intéressant utilise les transformations unitaires et l'opérateur de translation dans le temps ("oscillator like" = ayant un H quadratique en les variables conjuguées).

O. Costa de Beauregard.

Lippmann, B. A.: Modification of the Brillouin-Wigner perturbation method. *Phys. Review*, II. Ser. 103, 1149—1150 (1956).

A partir de la modification de la méthode de perturbation de Brillouin-Wigner proposée par P. Goldhammer et E. Feenberg (ce Zbl. 70, 221) on obtient une règle simple pour améliorer le développement de l'énergie selon Brillouin-Wigner: Diviser le terme de plus haut rang de ce développement par un moins le rapport du terme de plus haut rang au terme de rang inférieur immédiatement précédent.

G. Petiau.

McWeeny, R.: The density matrix in self-consistent field theory. II: Applications in the molecular orbital theory of conjugated systems. III: Generalizations of the theory. *Proc. roy. Soc. London*, Ser. A 237, 355—371 (1956); 241, 239—256 (1957).

II. The methods of paper I (this Zbl. 71, 423) are applied to the π -electrons of conjugated molecules. The perturbation of the density matrix is treated for the diagonal and non-diagonal elements. It is applied with little calculation in Hückel theory and polarizability is discussed. Then the treatment is made self-consistent. The results are compared with the simple Hückel theory. A few examples are given.
— III. The self-consistent field method, which in paper I (this Zbl. 71, 423) had been

developed for closed shells, is now generalized to systems in which some orbitals are singly occupied. Besides, various weakly coupled shells are considered separately. Difficulties of degeneracy owing to symmetry are discussed and met by imposing constraints. Whereas for closed shells the calculation of the density matrix is sufficient, the singly occupied orbital wave functions have to be constructed, in particular in the degenerate case.

H. J. Groenewold.

Corinaldesi, E.: Causality and dispersion relations in wave mechanics. Nuclear Phys. 2, 420—440 (1956).

Verf. erläutert zunächst die Dispersionsrelationen am Beispiel eines Kondensators mit dielektrischen Verlusten. Dann folgen Dispersionsrelationen für nicht-relativistische Potentialstreuung, der Zusammenhang mit der Kausalität und schließlich die Anwendung auf die relativistische Streuung von Teilchen mit dem Spin Null an einem kurzreichweitigen Potential. Die Arbeit hat den Charakter eines einführenden Berichts.

G. Höhler.

Zajcev (Zaitsev), G. A.: The problem of the interpretation of Dirac's equation for the electron. Soviet Phys., JETP 2, 140—143 (1955), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 29, 176—180 (1955).

Par une transformation convenable l'A. montre que l'équation de Dirac représentant l'électron peut se ramener à un système d'équations entre deux spineurs réels. L'A. suggère que les quantités physiques fondamentales seraient non pas les fonctions d'ondes mais les grandeurs tensorielles permettant de définir ces spineurs seels.

G. Petiau.

Koba, Z.: Velocity of the Dirac electron. Nuovo Cimento, X. Ser. 3, 1—5 (1956).

Eine Messung der Geschwindigkeit des Elektrons ergibt in der Diracschen Theorie immer einen der Werte $\pm c$ (c = Lichtgeschwindigkeit), und Dirac hat dies unter Anwendung der Unschärferelation in einfacher Weise erklärt. Diese Erklärung scheint dem Verf. in zwei Punkten unbefriedigend, nämlich: 1. stellt die von Dirac geschilderte Art der Geschwindigkeitsmessung wirklich eine solche im Sinne der Quantenmechanik dar, d. h. springt dabei das System in einen Eigenzustand des Geschwindigkeitsoperators? 2. Sollte nicht eine ähnliche Überlegung wie diejenige Diracs bei ihrer Anwendung auf das nicht relativistische Elektron die Geschwindigkeitsmeßwerte $\pm \infty$ ergeben? Verf. modifiziert daher Diracs Schlußweise, indem er die Rolle der Antiteilchenzustände in die Betrachtung einbezieht.

W. Kofink.

Koba, Z.: Supplementary remark on my previous note „Velocity of the Dirac electron“. Nuovo Cimento, X. Ser. 3, 214—215 (1956).

Als Nachtrag zu seiner früheren Notiz (s. vorstehendes Referat) erkennt der Verf. jetzt an, daß Diracs Meßprozeß der Geschwindigkeit des relativistischen Elektrons das System tatsächlich in einen Eigenzustand des Geschwindigkeitsoperators versetzt. Er gibt weitere Erläuterungen dazu.

W. Kofink.

Harmuth, Henning: Die Unschärferelation in den Dirac-Gleichungen und in der relativistischen Schrödinger-Gleichung. Z. Naturforsch. 11a, 101—118 (1956).

Die Heisenbergsche Unschärferelation kann formal als Konvergenzbedingung der als Differenzengleichung angeschriebenen potentiallosen Schrödingergleichung abgeleitet werden. Auf diese Weise folgen auch aus der relativistischen Schrödingergleichung und der Diracgleichung zwei verallgemeinerte Unschärferelationen. Da Unschärferelationen für die Schwankungen von Erwartungswerten irgend zweier nichtvertauschbarer Operatoren mit Hilfe der Schwartzschen Ungleichung ohne Auftreten von Konvergenzbedingungen irgendwelcher Herkunft abgeleitet werden können, so bleibt vorerst die physikalische Bedeutung des Übergangs zu Differenzengleichungen in diesem Zusammenhang ungeklärt.

W. Kofink.

Payne, W. B. and J. S. Levinger: Relativistic radiative transitions. Phys. Review, II. Ser. 101, 1020—1026 (1956).

Verff. berechnen die Oszillatorenstärken für elektrische Dipolübergänge mit Retardation zwischen dem $1s$ -Zustand und höheren diskreten Zuständen für ein Einzel-Dirac-Elektron im Coulombfeld. Für Blei mit der Kernladungszahl 82 ergibt sich, daß die retardierte Oszillatorenstärke für jede Elektronenschale ungefähr 0,8 des nichtrelativistischen Wertes ist. Ferner führen sie eine mittlere Oszillatoren-dichte für Übergänge nach diskreten Zuständen ein und extrapolieren zur Seriengrenze, um den photoelektrischen Wirkungsquerschnitt an der Schwelle zu berechnen; sie finden für Blei einen um 23% größeren Wert als Hulme. Schließlich bilden sie die Summe der Oszillatorenstärken, die nach Gell-Mann, Goldberger und Thirring gleich 1 sein sollte; sie finden 0,85 unter Abschneiden von Energien größer als 10 MeV. Dieser Unterschied zwischen den Ergebnissen wird von den Verff. so gedeutet, daß eine der beiden Annahmen von Gell-Mann usw. nicht voll erfüllt ist, nämlich diejenige, welche voraussetzt, daß bei sehr hohen Energien die Vorwärtsstreuamplitude eines Elektrons, das im Coulombfeld eines Bleiatoms gebunden ist, gleich derjenigen eines freien Elektrons sei.

W. Kofink.

Costa de Beauregard: Particule libre à spin: utilisation du projecteur d'Umezawa et Visconti dans notre formalisme covariant d'intégrales triples. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1692—1694 (1956).

L'A. complète les résultats d'une note précédente (ce Zbl. 71, 228). La théorie développée est étendue au cas des particules à spin et notamment au cas de la particule de spin 1 en utilisant un projecteur convenable permettant de représenter les fonctions d'ondes des particules à spin à partir des solutions de l'équation de Klein-Gordon. Compléments à la théorie de l'A. sur la particule plongée dans un champ (ce Zbl. 66, 233).

G. Petiau.

Aržanych (Arzhanykh), I. S.: On chain systems of the meson field. Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 351—354 (1956) [Russisch].

Verf. untersucht zwei Systeme von N gekoppelten klassischen Procafeldern (Spin-1 Mesonen). Im ersten Fall entsteht die Kopplung durch Einführung einer

„Massenmatrix“ μ_{ik} , wobei die Klein-Gordonsche Gleichung in $\square \psi_i - \sum_{k=1}^N \mu_{ik} \psi_k = F_i$

übergeht. Im zweiten Fall ist eine „Geschwindigkeitsmatrix“ γ_{ik} für die Kopplung

verantwortlich: $\Delta \psi_i - \sum_{k=1}^N \gamma_{ik} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t^2} - \mu^2 \psi_i = F_i$. (Diese Gleichung ist offenbar nicht

Lorentzinvariant!). Mit Hilfe einer früher angegebenen Methode (dies. Zbl. 72, 444) werden die Randwertaufgaben dieser Gleichungssysteme formal gelöst. G. Wanders.

Stapp, Henry P.: Relativistic theory of polarization phenomena. Phys. Review, II. Ser. 103, 425—434 (1956).

L'A. développe une forme covariante relativiste du formalisme descriptif des expériences de polarisation selon L. Wolfenstein et J. Ashkin (ce Zbl. 46, 439). Après avoir obtenu une forme covariante de la matrice S et de la matrice densité dans le cas du choc d'une particule de Dirac avec une particule de masse finie et de spin zéro le formalisme de Wolfenstein et Ashkin est généralisé d'une façon covariante et les corrections relativistes apportées par la nouvelle théorie mises en évidence. Le formalisme établi est ensuite étendu au cas de la polarisation dans le choc de deux particules de Dirac.

G. Petiau.

Finkelstein, R., C. Fronsdal and P. Kaus: Nonlinear spinor field. Phys. Review, II. Ser. 103, 1571—1579 (1956).

Les AA. étudient le champ spinoriel défini par le lagrangien général $-\frac{1}{2} [\bar{\Psi} \gamma_\lambda \partial_\lambda \Psi - \partial_\lambda \bar{\Psi} \gamma_\lambda \Psi] - \mu \bar{\Psi} \Psi + \sum_{\sigma=1}^5 c_\sigma (\bar{\Psi} \Gamma_\sigma^\sigma \Psi) (\bar{\Psi} \Gamma_\sigma^\sigma \Psi)$ correspondant au lagrangien

classique de Dirac complété par une combinaison générale de cinq invariants. On peut montrer que ce lagrangien conduit en particulier à des équations radiales non linéaires qui dans le cas de spin minimum s'écrivent $(df/dx) + (1 + \beta)g + (g^2 + \frac{1}{2}\lambda f^2)g = 0$; $(dg/dx) + (2/x)g + (1 - \beta)f - (f^2 + \frac{1}{2}\lambda g^2)f = 0$. Les solutions de ces équations sont recherchées par une analyse dans le plan des phases et on montre que l'existence de solutions acceptables est liée étroitement aux valeurs des paramètres du lagrangien. Une solution asymptotique exacte est obtenue.

G. Petiau.

Kortel, F.: On some solutions of Gürsey's conformal-invariant spinor wave equation. *Nuovo Cimento, X. Ser. 4*, 210—215 (1956).

Some classical solutions of the equation:

$$\gamma_\mu \partial \psi / \partial x_\mu + l^{3n-1} (\bar{\psi} \psi)^n \psi = 0,$$

($l > 0$, n : real number) and, in particular, Gürsey's conformal-invariant spinor wave equation, $n = 1/3$, in the form: $\psi = (x_\mu \gamma_\mu \chi(s) + \varphi(s))a$, with a an arbitrary constant spinor and $\chi(s)$ are given and $\varphi(s)$ real functions of $s = -x_\mu^2 = t^2 - n^2$.

Z. Koba.

Taylor, J. C.: The form of the divergencies in quantum electrodynamics. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 234*, 296—300 (1956).

It was Landau who firstly brought out an interesting question on the internal consistency of the renormalization theory. The question is the following one. Suppose that, when the bare charge runs over all possible real values, the renormalized charge, being a function of the bare charge, runs over a certain domain called normal zone. The renormalization theory could be internally consistent only if the observed value $1/137$ of the electric charge lies in the normal zone. Landau applied an approximation method to solve the integral equations for the propagators and found that the observed charge is out of the normal zone. Since there have remained some doubts about the reliability of the approximation method, it is important to find various ways of calculating the propagators. Applying Landau's approximation method to a set of functional equations for the propagators, the author of the article under review rederives Landau's result in a very simple and elegant way.

H. Umezawa.

Ovsjannikov (Ovsjannikov), L. V.: A general solution of renormalization group equations. *Doklady Akad. Nauk SSSR 109*, 1112—1114 (1956) [Russisch].

In der Theorie der sogenannten „Renomierungsgruppe“, die besonders von Bogoljubov und Mitarbeitern ausgearbeitet worden ist, sieht eine der Fundamentalgleichungen der Quantenelektrodynamik in folgender Weise aus: $d(x, y, e^2) = d(t, y, e^2) d(x/t, y/t, e^2 d(t, y, e^2))$; t beliebig. Hier ist e^2 die Kopplungskonstante der Theorie (die Ladung) und $d(x, y, z)$ ist eine Verallgemeinerung der „Fortpflanzungsfunktion“ des Photons, die von zwei Veränderlichen $x = p^2/\lambda^2$ und $y = m^2/\lambda^2$ abhängt. (λ ist eine invariante Abschneidegröße der Theorie. Für weitere Einzelheiten vgl. z. B. N. N. Bogoljubov und D. V. Širkov, dies. Zbl. **70**, 444.) Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist eine Diskussion der mathematischen Eigenschaften dieser und ähnlicher Gleichungen. Insbesondere zeigt der Verf., daß die allgemeinste Lösung der obigen Gleichung auch eine Lösung einer viel einfacheren Funktionalgleichung ist. Mit den Bezeichnungen $e^2 = z$ und $z d(x, y, z) = \xi(x, y, z)$ lautet die vereinfachte Gleichung $\varphi(y/x, \xi(x, y, z)) = \varphi(y, z)$, wobei φ eine willkürliche Funktion ist. Die Verallgemeinerung der obigen Gleichung für Spinorfelder etc. werden auch behandelt und in ähnlicher Weise gelöst. Der Verf. macht keine Anwendungen seiner Ergebnisse.

G. Källén.

Senitzky, I. R.: Quantum effects in the interaction between electrons and high-frequency fields. Vacuum fluctuation phenomena. Phys. Review, II. Ser. 104, 1486 bis 1491 (1956).

Es wird die Dispersion berechnet, die durch die Vakuumfluktuationen in der Geschwindigkeit eines Elektrons verursacht wird, das einen Hohlraum passiert. Der Verf. zeigt, daß die Verwendung der üblichen Methoden zu einem divergenten Resultat führt. Dabei rührt die Divergenz von der Kopplung erster Ordnung zwischen dem Elektron und dem Strahlungsfeld her. Eine unitäre Transformation führt zur Elimination dieser Kopplung. Es werden die Bewegungsgleichungen auf Grund der transformierten Hamiltonfunktion abgeleitet und der Erwartungswert der Geschwindigkeit gebildet.

P. Urban.

Fejnberg (Feinberg), E. L. and D. S. Černavskij (Chernavsky): Higher approximations in the self-consistent field method of the meson theory. Soviet Phys., Doklady 1, 354—357 (1957), Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 619—622 (1956).

Fortsetzung früherer Arbeiten (vergl. dies. Zbl. 65, 230, 231).

Solovev (Soloviev), V. G.: Nucleon propagation function in the quadratic approximation. Soviet Phys., Doklady 1, 693—697 (1957) Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 578—581 (1956).

Green's functions in the $ps-ps$ symmetric meson theory are calculated with the so-called "quadratic approximation". The nucleon Green function can be derived from the corresponding classical Green function; the latter is obtained by solving an iterated second order equation, neglecting the recoil and interference terms. The procedure of functional average eventually leads to a Fredholm integral equation of the second kind. Expressions for the vertex parts, Γ_5 and Γ_μ , are also given.

Z. Koba.

Nogami, Yukihisa and Hiroichi Hasegawa: Intermediate coupling meson theory of nuclear forces. II. Progress theor. Phys. 15, 137—150 (1956).

In einer Vorarbeit (dies. Zbl. 65, 224) hatte Hasegawa eine neue Methode entwickelt, das Kernkraftpotential mit Hilfe der Theorie der intermediären Kopplung abzuleiten. Während in der erwähnten Arbeit die neue Methode nur auf skalare geladene Mesonen angewendet wurde, wird sie nun auf das symmetrisch geladene pseudoskalare Meson angewendet. Es wird für pseudovektorielle Kopplung das statische Potential bis zur Ordnung e^{-2kr} abgeleitet. Um Divergenzschwierigkeiten zu vermeiden, muß ein Abschneideverfahren eingeführt werden; dieses wird so gewählt, daß die Kontaktwechselwirkung sich nur auf ein Gebiet $< 1/k$ erstreckt. Die Ergebnisse der Verf. unterscheiden sich nicht sehr von den Resultaten von Brueckner und Watson, dies. Zbl. 51, 215. Nach der Renormierung der Kopplungskonstanten stimmt das Potential im Außenbereich mit dem bekannten störungstheoretischen Potential 2. Ordnung überein; die höheren Glieder hängen jedoch wesentlich vom verwendeten Abschneideverfahren ab.

F. Cap.

Inoue, Kazuhiko, Shigeru Machida, Mitsuo Taketani and Toshiyuki Toyoda: Pion theory of nuclear forces. Progress theor. Phys. 15, 122—136 (1956).

Eine von Fukuda, Sawada und Taketani gefundene allgemeine Methode zur Auffindung von Kernkraftpotentialen (dies. Zbl. 57, 212) wird auf die pseudoskalare Mesonentheorie bei Annahme einer ruhenden ausgedehnten Quelle angewendet. Divergenzschwierigkeiten erzwingen die Verwendung eines Abschneideverfahrens (Gaußsche Fehlerfunktion). Ist der Wert der Kopplungskonstante $g^2/4\pi = 0,08$, so ist der Einfluß der räumlichen Ausdehnung der Quelle im Gebiet $< 0,7 \hbar/c$ sehr groß. Für dieses Innengebiet werden daher phänomenologische Potentiale verwendet. Die Anwendung des Gesamtpotentials auf das Zweinukleonenproblem ergibt befriedigende Ergebnisse.

F. Cap.

Ma, S. T.: Contact and core interactions according to Dirac's relativistic theory of the electron. Nuclear Phys. 2 (1956/57), 347—355 (1956).

La réduction de l'équation de Dirac en une équation déterminant les deux fonctions d'ondes principales par la méthode de C. G. Darwin introduit en plus du terme de couplage spin-orbite une interaction de contact répulsive qui peut être également obtenue par la méthode de Foldy-Wontheuysen. L'A. montre qu'une modification de la méthode d'approximation permet de transformer ce terme de contact en un terme correspondant à un cœur répulsif. Le rôle joué par ce cœur dans la détermination des états d'énergie stationnaire est analysé et comparé avec celui du cœur dur dans la théorie mésique des forces nucléaires. *G. Petiau.*

Bajer (Baier), V. N. and S. I. Pekar: Nucleomesodynamics in strong coupling. II: The ground and isobar states, nucleon charge and spin. Soviet Phys., JETP 3, 340—350 (1956), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 30, 317—329 (1956).

Les AA. utilisent la méthode d'approximation et l'appareil mathématique introduit dans la partie I (Pekar, ce Zbl. 72, 449) pour l'étude d'un nucléon en interaction forte avec un champ mésique pseudoscalaire, l'interaction étant du type pseudovectoriel symétrique. Les valeurs propres de l'énergie, de la charge et du spin du nucléon sont déterminés ainsi que la forme explicite de la fonction d'ondes.

G. Petiau.

Schwinger, Julian: Dynamical theory of K mesons. Phys. Review II. Ser. 104, 1164—1172 (1956).

Der Ausgangspunkt dieser Arbeit ist die Tatsache, daß zur Beschreibung eines Isospins $T = \frac{1}{2}$ vier Hermitesche Komponenten für den Feldoperator notwendig sind, was die Existenz eines zweiten dreidimensionalen Isospinraumes, bzw. die Vereinigung der zwei dreidimensionalen Räume zu einem vierdimensionalen, zur Folge hat. Die Kopplung der $T = \frac{1}{2}$ Nukleonen an π -Mesonen zeichnet eine Richtung im zweiten dreidimensionalen Isospinraum aus und die zusätzliche Symmetrieeigenschaft führt zur Erhaltung der Nukleonenladung ($N = 1$ für Nukleonen, $N = -1$ für Antinukleonen). Analog wird für K -Mesonen (durch Kopplung an π -Mesonen) eine Hyper(onen)ladung Y bestimmt, mit $Y = 1$ für $K^+ K^0$ und $Y = -1$ für $K^0 K^-$, welche aber nicht streng erhalten bleibt. Auch die schweren Fermionen tragen Hyperladung, u. zw. nur diejenigen mit $T = \frac{1}{2}$. So gelangt man zu folgenden Attributionen: $T = \frac{1}{2}$, $Y = 1$ Nukleon; $T = \frac{1}{2}$, $Y = -1$ Ξ -Teilchen, $T = 0$, $Y = 0$ Λ -Teilchen; $T = 1$, $Y = 0$ Σ -Teilchen. Die elektrische Ladung ist $Q = T_3 + \frac{1}{2} Y$ und die „Strangeness“ $S = Y - N$. Damit für K -Mesonen eine bilineare Kopplung mit den π -Mesonen existiert, ist es notwendig, daß erstere beide Paritäten $+1$ und -1 besitzen können, woraus einige qualitative Schlüsse für ihren Zerfall und Erzeugung abgeleitet werden können. Die Analogie zwischen π -Mesonen und Photonen wird weitergeführt, indem vorausgesetzt wird, daß in Abwesenheit der π -Kopplung die Massen der Nukleonen und Ξ -Teilchen gleich sind und daß die große Massendifferenz durch die starke π -Kopplung hervorgerufen wird (ebenso wie die Neutron-Proton Differenz durch die schwache elektromagnetische Kopplung). Ähnlich soll die Massendifferenz zwischen Λ - und Σ -Teilchen ein Effekt der π - K -Wechselwirkung sein, welche zu einer Kopplung zwischen K -Mesonen und schweren Fermionen führt. In Abwesenheit aller Wechselwirkungen sind alle Baryonen bezüglich der Masse entartet und der Isospinraum hat vollständige vierdimensionale Symmetrie, welche erst durch die π - und K -Wechselwirkungen aufgehoben wird und für die Mitglieder der verschiedenen Multipletts (zwei mit $T = \frac{1}{2}$ und je eines mit $T = 0$ und

$T = 1$) zu verschiedenen, niedrigeren, Massen führt. Im Rahmen dieser Arbeit sind die Leptonen noch nicht vollständig erfaßt. [Anm. d. Ref. In einer späteren Arbeit des Verf., *Ann. of Phys.*, **2**, 407—434 (1957)] ist diese Theorie vollständiger ausgearbeitet und enthält auch eine Behandlung der Leptonen und der schwachen Wechselwirkungen]. In einer zusätzlichen Note wird dann die Theorie des Zerfalls der K -Mesonen, besonders in Hinsicht auf die langlebige Komponente, und des Zerfalls der Λ - und Σ -Hyperonen quantitativ ausgearbeitet. *M. E. Mayer.*

Bernstein, Jeremy: Scattering of K^+ particles from protons and deuterons. *Phys. Review*, II. Ser. **105**, 1853—1858 (1957).

Die Streuung von K -Mesonen an Protonen und Deuteronen wird nach der Schwingerschen Theorie der direkten K - π -Kopplung (s. vorangehendes Ref.) behandelt, wobei in statischer Näherung ein K -Nukleonenpotential abgeleitet wird, aus dem die Wirkungsquerschnitte in Bornscher Näherung berechnet werden. Die Resultate widersprechen den Experimenten über K -Protonstreuung nicht.

M. E. Mayer.

Belenky, S. Z.: Connection between scattering and multiple production of particles. *Nuclear Phys.* **2** (1956/57), 259—266 (1956).

Fermi's statistical theory of multiple particle production is so generalized as to take into account the mutual interaction of pairs of particles. The effect of the interaction is characterized by the scattering phase shift and in the case of resonance scattering it is reduced to the appearance of an intermediate „isobaric“ state which should be included in the evaluation of statistical weights. [Such a calculation previously carried out by the author and Nikišov, *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **28**, 744 (1955), agrees well with experiments.] As an example, formation of a system of a nucleon and two mesons is discussed. *Z. Koba.*

Friedländer, E.: On multiple meson production in meson-nucleon collisions at very high energies. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* **6**, 237—250 (1956).

The effects of possible difference between the distributions of mass density within the nucleon and the meson in the meson showers resulting from very high energy nuclear collisions are investigated. Based on the assumption that individual elements of those mass distribution make independent collisions, kinematical relations for the produced mesons are derived. In the case of meson-nucleon collision the central parts, where the nucleon mass is more concentrated, will fly in the direction of incident nucleon, while the outer parts, where the nucleon mass is less, proceed in the meson direction, if referred to the total center of mass system. The former yield a larger number of isotropic slower mesons and the latter a smaller number of forward energetic mesons. The nucleon-nucleon collision is regarded as consisting of two meson-nucleon collisions, and depending on the ratio of the momentum shared by the meson, virtually emitted from the nucleon, it shows two-cone structure of various types. The S-star and the HBD-star are compared with the calculation. The author concludes that it is premature to discuss which of the existing theories fits the experiments. *Z. Koba.*

Henley, E. M. and T. D. Lee: Model for multiple meson production. *Phys. Review*, II. Ser. **101**, 1536—1547 (1956).

A theory of multiple meson production is presented, in which the nucleons shake off their proper fields through a sudden change of spin and isospin, the latter being treated quantum-mechanically. The calculation is carried out for the one- and two-meson production by symmetrical scalar meson theory. The physical nucleon state as well as nucleon-meson scattering states are worked out by the intermediate coupling variation method. For large coupling constants (a) each nucleon tends to emit mesons in an isotopic spin $I = 3/2$ state and (b) in two meson

production each nucleon prefers to emit only a single meson. Though the model is not realistic the results resemble general features of the accelerator experiments.

Z. Koba.

Hamaguchi, M.: On the hydrodynamical model in multiple production of mesons. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 4, 1242—1261 (1956).

The viscous stress tensors in the relativistic covariant form are introduced in the description of multiple production of the particles in high energy collisions. As the results, the effects of viscosity are calculated in 1-st order approximation and also the qualitative differences from Landau's theory are discussed on the basis of the conception of irreversibility in relativistic thermodynamics. (Zusammenfassung des Autors.)

K. Symanzik.

Kernphysik:

Chadan, Khosrow: Potentiel neutron-proton et capture des neutrons thermiques par les protons. *C. r. Acad. Sci., Paris* 242, 1964—1966 (1956).

Unter Verwendung einer Vorarbeit (vgl. dies. Zbl. 67, 223) leitet Verf. das niederenergetische Zentralpotential des Neutron-Proton-Tripletts aus der *S*-Phase und dem totalen Wirkungsquerschnitt der Deuteronbildung ab. Das mit der Jost-Kohn'schen Methode gefundene Potential erweist sich am Nullpunkt als regulär.

F. Cap.

Kuni, F. M.: On dispersion relation for scattering of nucleons on nucleons. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 111, 571—574 (1956) [Russisch].

A dispersion relation for the nucleon-nucleon forward scattering amplitude is discussed. (Charge-independent *ps*-coupling; spins of the two nucleons being antiparallel.) Instead of the amplitude $F(\omega)$ itself, which cannot be continued into the upper half-plane, another function $M(\omega)$ is introduced, in which the poles for $|\operatorname{Re} \omega| < m$ are moved to the lower half-plane. It is further shown that for $p \rightarrow p$ and $n \rightarrow n$ scattering with antiparallel spins. Im $M(\omega) = 0$ in the unphysical region is $-m < \omega < m$.

Z. Koba.

Szépfaľusy, P.: On a new type of interaction between nucleons. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* 6, 87—102, russ. Zusammenfassg. 103 (1956).

In vorliegender Arbeit wird versucht, die Eigenschaften des Proton-Neutron-Systems mit Hilfe einer nicht linearen Schrödingergleichung abzuleiten. Die Nichtlinearität kommt dadurch zustande, daß die Nukleonenwechselwirkung von der Wellenfunktion des Systems abhängen soll. Sie kann in das Mesonfeld eingeführt werden, in die Kopplungsterme zwischen Mesonen- und Nukleonenfeld oder in das Nukleonenfeld. Innerhalb der Quantenmechanik kann man allerdings die Wechselwirkung nur in die Wellenfunktion einschließen. Nach Behandlung der Wechselwirkung zwischen einem Proton und einem Neutron unter Vernachlässigung der Spins wird das abgeleitete Potential nach Korrektur durch einen Austauschoperator für die Untersuchung des Deuterons verwendet. Man erhält unter Benützung des experimentellen Wertes für die Bindungsenergie für den Deuteronradius $1/\alpha = 4,31 \times 10^{-13}$ cm. Ferner wird unter Berücksichtigung der Spins das Gesamtdrehmoment berechnet. Das Potential hängt in diesem Fall nicht nur von der Distanz der beiden Partikel sondern auch von den Spins ab. Mit Hilfe dieses Potentials kann man unter den Wellenfunktionen, die der Schrödingergleichung im spinabhängigen Fall genügen, diejenige auswählen, die das Quadrupolmoment und das magnetische Moment erklärt. In diesem Fall kann man zunächst auch kugelsymmetrische Lösungen genau wie im spinunabhängigen Fall erhalten, was den gleichen Wert für $1/\alpha$ liefert. Im nicht kugelsymmetrischen Fall erhält das Deuteron ein Quadrupolmoment. Ebenso ist natürlich das magnetische Moment des Deuterons nicht genau gleich der

Summe der magnetischen Momente beider Partikel. Nach Diskussion mathematischer Schwierigkeiten wird der Grundzustand des Deuterons berechnet. Die direkte Verallgemeinerung des Potentials für mehr als zwei Partikel führt zu Mehrkörperkräften, deren Wirkung im Zusammenhang mit der Untersuchung schwerer Kerne in einer folgenden Arbeit untersucht werden soll.

F. Cap.

Duerr, Hans-Peter: Relativistic effects in nuclear forces. Phys. Review, II. Ser. 103, 469—480 (1956).

Die 1955 von Johnson und Teller vorgeschlagene phänomenologische Theorie der Kernbindung wird versuchsweise in relativistisch invarianter Weise formuliert. Bei dieser Verallgemeinerung der Theorie bleiben die früher gewonnenen Ergebnisse über die Absättigung der Kernbindung und die Proton/Neutron-Verhältnisse erhalten. Der bei der nichtrelativistischen Theorie aufgetretene Kern-Kollaps bei hohen kinetischen Energien wird jedoch vermieden. Die Theorie ergibt eine starke Spin-Bahn-Kopplung, wie sie im Schalenmodell phänomenologisch eingeführt wird. Außerdem folgen aus der Theorie starke Anziehungskräfte zwischen Nukleonen und Antinukleonen; diese könnten zu einem 1S -Grundzustand des Nukleon-Antinukleon Systems mit den Eigenschaften eines pseudoskalaren Mesons führen und lassen große Stoßquerschnitte für Antiprotonen an Kernen erwarten. Der letztere Effekt wurde kürzlich experimentell beobachtet.

W. Oldekop.

Iusim, Ch.: La radiation electromagnetique multipolaire des noyaux-gouttes. An. Univ. C. J. Parhon București, Ser. Ști. Natur. Nr. 9, 59—80, russ. und französ. Zusammenfassung 80—81 (1956) [Rumänisch].

Dans ce mémoire on applique la théorie émise par le noyau, envisagé comme une goutte effectuant de petites oscillations. L'A. décompose la radiation en multipôles suivant le méthode du Professeur S. Țițeica et, en effectuant les calculs sans négliger les dimensions du noyau par rapport à longueur d'onde des radiations, il met en évidence une différence de phase — à l'endroit de l'observateur — entre les ondes issues des différents points de la source. Il en résulte „l'interférence“ des ondes émise par le multipôle magnétique du (2^n) ème et le multipôle électrique du (2^{n+1}) -ème ordre, de même que l'interférence des multipôles d'ordres différents. On obtient l'expression suivante pour la vie moyenne de l'état vibratoire s, m :

$$\tau_{s,m}^{(s)} = \tau = \frac{M e^3}{3 \omega_s^2 Z^2 e^2 (s+1)} \frac{1}{K_s}$$

avec

$$K_s = \frac{1}{2} \pi (c/\omega_s R^0)^3 J_{s+\frac{1}{2}}^2 + \frac{1}{2} (\omega_s R^0/c)$$

et ω = fréquence mécanique de la vibration d'ordre s ; c = vitesse de la lumière dans le vide. $J_{s+\frac{1}{2}}$ = la fonction de Bessel d'ordre $s + \frac{1}{2}$; R_0 = rayon; M = masse; Ze = charge du noyau.

Zusammenfassg. des Autors.

Czyż, W. and J. Sawicki: Polarisation of nucleons from photo-disintegration of deuteron. I: Medium energies. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 4, 515—519 (1956).

In Erweiterung einer vorausgegangenen Arbeit wird neben elektrischen Dipol- und Quadrupolübergängen (erstere werden unter Vernachlässigung der Retardierung berechnet) der Einfluß von magnetischen Dipolübergängen auf die Polarisation diskutiert. Es werden maximale Polarisationswerte unter verschiedenen, stark vereinfachenden Annahmen berechnet.

H.-A. Weidenmüller.

Tait, J. H.: Some topics in neutron diffusion theory. Phys. Soc., Rep. Progr. Phys. 19, 268—297 (1956).

Die vorliegende Arbeit ist ein ausführlicher Bericht über Neutronentransporttheorie und gliedert sich in die folgenden Abschnitte: 1. Ableitung und Diskussion der allgemeinsten Form der Transportgleichung (elastische Stöße durch ruhende oder bewegte Bremsmittelkerne), 2. Ableitung des Neutronenspektrums in einem unendlichen Streumedium der Temperatur $T \neq 0$, insbes. mit Berücksichtigung der

Absorption (thermisches Gleichgewicht zwischen Neutronen und Bremsmittelkernen stellt sich nicht ein), 3. Ableitung der räumlichen Neutronendichteverteilung für große Entfernungen von der Neutronenquelle, 4. Berechnung des kritischen Volumens von Reaktoren nach der Transporttheorie, Abschätzung der Genauigkeit der üblichen diffusionstheoretischen Methoden.

F. Cap.

Łopuszański, Jan: Some remarks on the theory of the electron-photon cascade. *Acta phys. Polon.* 15, 177—180 (1956).

The theory of the one-dimensional cascade shower of electrons and photons is discussed by paying special attention to its asymptotic behaviour at great depths. The theory is started from an integral equation, analogous to the Smoluchowski equation in the theory of stochastic processes. It is shown that the equation is reduced to a set of usual integro-differential equations in the approximation *A*. It is demonstrated that, at great depths, the average number of electrons or photons with energies above a certain threshold is practically equal to the probability of finding at least one particle of either type. This asymptotic behaviour seems rather obvious to the reviewer, because the average number is far smaller than unity at such great depths.

S. Hayakawa.

Stachowiak, Henryk: Some properties of distribution functions of electron-photon cascades at large absorber depth. *Acta phys. Polon.* 15, 181—190 (1956).

The preceding work is extended to more detailed problems which concern the asymptotic behaviour of the electron-photon cascade under the approximation *A*. A number of mathematical devices are employed for proving those results which may be obtained by simple, intuitive arguments. The reviewer thinks that all those results are rather trivial, unless something is obtained for properties of the cascade at a finite depth.

S. Hayakawa.

Konwent, Henryk: Some remarks on the asymptotic behaviour of the electron-photon cascade for large depth of the absorber. *Acta phys. Polon.* 15, 191—203 (1956).

Along the line developed in the preceding papers, special attention is paid to the differential energy spectrum and the probability of finding at least one particle. Considerable part is devoted to involved mathematics, but the essential results obtained are not much different from those given in the above papers.

S. Hayakawa.

Bau der Materie:

Shibata, Takashi and Toshiei Kimura: Spin-orbit interaction energy of an electron based on the new fundamental group of transformations. *J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A* 20, 37—45 (1956).

Les AA. reprennent les calculs conduisant à l'introduction du terme de couplage spin-orbite selon L. H. Thomas et J. Frenkel en introduisant le groupe des transformations de Lorentz sans rotation proposé précédemment par T. Shibata (ce Zbl. 65, 213; 67, 203). Application au couplage spin-orbite dans l'atome d'hydrogène.

G. Petiau.

Ishiguro, Eiichi, Kunifusa Kayama, Yukio Mizuno, Tadashi Arai and Michiko Sakamoto: Tables useful for the calculation of the molecular integrals. *X. Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.* 7, 63—94 (1956).

Die jetzt vorliegenden Tabellen von Molekülintegralen, die schon die Nummer 10 tragen, enthalten die Werte der Integrale, die zur Berechnung der Grundzustände von Li_2 und O_2 erforderlich waren. Darüber hinaus sind auch gleichzeitig die nötigen Matrixelemente aufgenommen worden, wie sie sich numerisch für einige Kernabstände ergeben haben. Die einzelnen Integrale sind schon mit den orthonormierten Molekül-Einelektronenfunktionen gebildet, die in der hier angewendeten Valenzstrukturmethode Verwendung fanden.

H. Preuß.

Santhamma, V.: Contribution of the electronic repulsion to the energy of the molecular states for Furan, Pyrrole and Thiophene. *Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A* 22, 204—213 (1956).

Für die Moleküle Furan, Pyrrol und Thiophen werden die Energieausdrücke für den Grundzustand und einige angeregte Zustände aufgeschrieben, in denen auch die Elektronenwechselwirkung enthalten ist und die π -Eingleitronenfunktionen als Linear-Kombinationen von Atomfunktionen angesetzt werden (LCAO). Die Wirkungen der σ -Elektronen werden durch ein Potential berücksichtigt, wobei als erste Näherung die Energieterne der π -Elektronen nach dem einfachen LCAO-Mo-Verfahren Verwendung finden. Im Rahmen der antisymmetrischen Funktionsansätze werden die einzelnen Integrale mit Atomfunktionen diskutiert. *H. Preuß.*

Espe, I.: Electronic motion in the rotating H_2 molecule. *Phys. Review, II. Ser.* 103, 1254—1257 (1956).

Mit Hilfe der Störungsrechnung werden die Trägheitsmomente der Moleküle H_2 , HD und D_2 berechnet, welche sich aus Präzisionsmessungen der Radiofrequenzen ergeben. Es handelt sich im einzelnen um den sogenannten hochfrequenten Term der molekularen magnetischen Suszeptibilität, der dem Trägheitsmoment proportional ist. Das hier entwickelte Modell liefert rund 90% der gemessenen Werte.

H. Preuß.

●**Patterson, G. N.:** Molecular flow of gases. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1956. X, 217 p. \$ 7.50.

Lange, G. N. and E. C. Deland: The shape of the nappe of a thin waterfall. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 9, 394—399 (1956).

Die Form eines dünnen Wasserfalls (konstante Teilchengeschwindigkeit über die Dicke) ist unter alleiniger Berücksichtigung der Schwere schon mehrfach bearbeitet worden. In der vorliegenden Arbeit wird das gleiche Problem unter zusätzlicher Berücksichtigung der Oberflächenspannung und eines Luftdruckunterschiedes auf beiden Seiten mit Hilfe eines Analogrechners behandelt. Es zeigt sich, daß die Form sehr empfindlich gegenüber Druckunterschieden ist. Schließlich wird noch ein Vergleich mit der Erscheinung der „Wasserglocke“ gemacht, die das dreidimensionale Analogon zu dem als eben angenommenen Problem des Wasserfalls darstellt.

W. Wuest.

Janne d'Othée, Henry: Les lois de conservation de la physique, leurs combinaisons et leur éventuelle interdépendance. *Bull. Soc. roy. Sci. Liège* 25, 483—513, Errata 647—648 (1956).

For continuous motion of a viscous heat-conducting fluid conservation of mass, energy and momentum and non-conservation of entropy are worked out in detail. Similar calculations are made for shock waves, under the assumption that it is legitimate to deal with viscosity and heat conduction according to the macrophysical transport equations. In the latter case it is found that even in a limit of zero viscosity and heat conductivity the entropy is increased.

H. J. Groenewold.

Lewis, M. B. and A. J. F. Siegert: Extension of the condensation theory of Yang and Lee to the pressure ensemble. *Phys. Review, II. Ser.* 101, 1227—1233 (1956).

Fester Körper:

Henry, J.: Sur les effets isotopiques dans les réseaux. *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* 42, 51—62 (1956).

Die Nullpunktsenergie von AB -Gittern wird untersucht. Enthalten die A -Atome mehrere Isotope, so müssen sich diese Isotope bei tiefen Temperaturen entmischen, da die Nullpunktsenergie für den entmischten Zustand kleiner ist. *G. Leibfried.*

Montroll, Elliott W. and Renfrey B. Potts: Effect of defects on lattice vibrations. Interaction of defects and an analogy with meson pair theory. Phys. Review, II. Ser. 102, 72—84 (1956).

Es wird eine Methode angegeben, wie man Summen von Funktionen der Gitterfrequenzen ω_j der Form $S = \sum_j g(\omega_j)$ berechnen kann. Mit dieser Methode werden dann Selbstenergien und Wechselwirkungsenergien von Gitterfehlern berechnet, speziell von Isotopen und Löchern in einfach-kubischen ein- und zweiatomigen Gittern. Z. B. sollen sich zwei Löcher mit einer Wechselwirkungsenergie umgekehrt proportional zur dritten Potenz ihres Abstandes anziehen. Es wird ferner gezeigt, daß man nach Grenzübergang vom Gitter zum Kontinuum eine Wechselwirkungsenergie für zwei Löcher erhält, die der Wechselwirkung zwischen zwei festen Nukleonen nach der skalaren Meson-Paar-Theorie von Wentzel entspricht.

G. Leibfried.

Baldock, G. R.: Lattice vibrations and specific heat of graphite. Philos. Mag., VIII, Ser. 1, 789—802 (1956).

Die Eigenfrequenzen eines Graphitgitters werden berechnet, und daraus unter Zugrundelegung des Debye-Modells die spezifische Wärme bei relativ tiefen Temperaturen. Das Graphitgitter ist ein hexagonales Schichtgitter (Abstand der Ebenen: 3,3 Å, Abstand der Atome in einer Ebene, 1,4 Å). Deshalb wird in erster Näherung nur die Wechselwirkung zwischen benachbarten Atomen in einer Ebene berücksichtigt, in zweiter Näherung wird die Wechselwirkung zwischen nächsten und übernächsten Atomen in einer Ebene sowie die Wechselwirkung zwischen den Ebenen berücksichtigt. Die erste Näherung liefert für die spezifische Wärme bei tiefen Temperaturen Proportionalität zu T^2 (Flächengitter), die zweite Näherung liefert Proportionalität zu T^3 , für etwas höhere Temperaturen Proportionalität zu T^2 , der Übergang sollte zwischen 20° und 80° K liegen. Das stimmt mit den Experimenten qualitativ überein. Auf die Grenzen der Gültigkeit der Debyeschen Theorie wird nicht eingegangen.

G. Leibfried.

Engelmann, Folker: Untersuchungen zur Theorie der Energiezustände von Elektronen in idealen und gestörten Kristallgittern. Z. Phys. 145, 430—450 (1956).

Die Energiebänder eines Elektrons in einem speziellen dreidimensionalen Gitterpotential werden streng berechnet. Die einzelnen Gitterpunkte werden dabei als kugelförmige Potentialtöpfe angesetzt, deren Radius vernachlässigbar klein gegen die Gitterkonstante ist. Mit Hilfe der Greenschen Funktion der potentialfreien Schrödingergleichung wird das Problem zunächst als Integralgleichung formuliert, welche dann zusammen mit den Randbedingungen des Potentialtopfs den Zusammenhang zwischen Wellenzahl und Energie festlegt. Auch ein „Fremdatom“ als Störstelle wird streng behandelt. Das „Fremdatom“ unterscheidet sich von den übrigen Atomen des Gitters dadurch, daß sein Potentialtopf an Tiefe und Radius abweicht. In jedem verbotenen Band des Idealgitters ergibt sich ein oder kein Störniveau; interessant ist, daß bei festem Radius des Störpotentialtopfs oberhalb jedes erlaubten Bandes ein endliches Energiegebiet von Störniveaus völlig frei bleibt, unabhängig von der Tiefe des Potentialtopfs.

Walter Franz.

Nutkins, M. A. E.: The density of electronic states in body-centred cubic crystals. Proc. Phys. Soc., Sect. B 69, 619—624 (1956).

Für die ersten sechs Bänder wird die Elektronentermdichte $N(E)$ berechnet, ausgehend von freien Elektronen: Die Termdichte der freien Elektronen wird zunächst zerlegt in die Anteile der 6 Brillouin-Zonen. Für jede Zone benutzt man dann das periodische Potential als Störung zur Berechnung der Aufspaltung der Bänder. Diese Aufspaltung selbst wird übernommen aus einer Arbeit von Howarth und Jones (1952), die für Punkte hoher Symmetrie im k -Raum die Energielücken

mit der Zellenmethode berechnet haben. Proportional zur Verschiebung dieser speziellen Terme wird nun das ganze Band vom Verfasser gedehnt oder gestaucht unter Bewahrung der Normierung der einzelnen Bänder. Das Ergebnis wird für Natrium und Lithium aufgetragen und bei Lithium mit der Bandstruktur verglichen, die sich aus dem Emissions- und Absorptionsspektrum weicher Röntgenstrahlen ergibt.

G. Leibfried.

Pines, David: Electron interaction in solids. Canadian J. Phys. **34**, 1379—1393; Discussion 1393—1394 (1956).

Der Verf. gibt einen Überblick über die Methoden und Resultate der Theorie, die von ihm, sowie Bohm und Nozières entwickelt wurde, um die Auswirkung der starken Wechselwirkung der Elektronen miteinander auf die Festkörpereigenschaften zu bestimmen. In den ersten Untersuchungen über die Bewegung der Elektronen in Metallen wurde die Coulombwechselwirkung weggelassen; die Elektronen bewegten sich unabhängig voneinander in einem (eventuell) gestörten periodischen Potential. Die Ergebnisse zeigten gute Übereinstimmung mit dem Experiment. Bohm und Verf. konnten zeigen, daß die Coulombwechselwirkung der Elektronen zwei Folgen für das Verhalten des Elektronenkollektivs hat. Einmal ergeben sich weitreichende Korrelationen in der Bewegung der Elektronen; dies gibt Anlaß zu Schwingungen des Gesamtsystems. Wegen der sehr hohen Frequenzen dieser Plasmaschwingungen werden sie aber unter normalen Bedingungen nicht angeregt. Weiter ergibt sich, daß die Elektron-Elektron-Wechselwirkung in solch einem Kollektiv mit einem Radius abgeschirmt wird, der von der Größenordnung des mittleren Elektronenabstandes ist. Diese abgeschirmte Wechselwirkung bleibt als Wesentliches übrig und hat nur geringe Korrekturen der Ergebnisse zur Folge, die unter der Voraussetzung nicht-wechselwirkender Elektronen gefunden worden sind. Dies gilt auch für die meisten Metalle, wenn die Periodizität des Potentials berücksichtigt wird. Nozières und Verf. geben eine allgemeine Formulierung der Elektron-Elektron-Wechselwirkung in Festkörpern, wobei insbesondere der Einfluß der Rumpfelektronen auf die Valenzelektronenbewegung berücksichtigt wird.

G. Helms.

Stammlinger, A.: Ein Nomogramm zur Bestimmung des spezifischen Leitungswiderstandes von Metallen als Funktion von Temperatur und Temperaturkoeffizienten. Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau **2**, 81 (1956).

Verf. weist darauf hin, daß sich die Gleichung des spezifischen elektrischen Leitungswiderstandes von Metallen in Abhängigkeit von der Temperatur durch ein Fluchtliniennomogramm mit zwei parallelen geradlinigen Trägern und einem aus zwei Geradenbüscheln bestehenden Netz darstellen läßt, und gibt zwei Nomogramme für die am stärksten interessierenden Bereiche an.

H. Tolle.

Sondheimer, E. H.: Electron-phonon equilibrium and the transport phenomena in metals at low temperatures. Canadian J. Phys. **34**, 1246—1254; Discussion 1254—1255 (1956).

In der Theorie der Transporterscheinungen im Metall muß man berücksichtigen, daß neben der Elektronenverteilung auch die Schallquantenverteilung gestört ist. Der Einfluß dieses Effektes speziell auf die Leitfähigkeit und die Thermokraft wird berechnet. Die Ergebnisse decken sich mit denen der Arbeit von Hanna und Sondheimer (dies. Zbl. **77**, 237).

B. Mühlischlegel.

Ziman, J. M.: The general variational principle of transport theory. Canadian J. Phys. **34**, 1256—1273; Discussion 1273 (1956).

Das von Kohler aufgestellte Variationsprinzip zur Lösung der Boltzmann-Gleichung der Elektronentheorie wird in Verbindung gebracht mit der thermodynamischen Formulierung irreversibler Prozesse (Prigogine, de Groot). In dieser Formulierung lautet das Prinzip: Von allen Stromverteilungen, für die bei

gegebenen Kräften die innere (d. h. von den Stößen herrührende) Entropieproduktion gleich der äußeren Entropieproduktion ist, macht die stationäre Verteilung die innere Entropieproduktion zu einem Maximum. — Der Gebrauch des Variationsprinzips ist auch im allgemeinen Falle vorteilhaft, wo neben der Elektronenverteilung die Schallquantenverteilung gestört ist. Der Verf. diskutiert zum Schluß den Einfluß eines äußeren Magnetfeldes. Auch dann kann das Prinzip in obiger Form beibehalten werden; allerdings ist neben der Lösung Φ_k stets auch ihre konjugierte Φ_k^* zu betrachten, die aus Φ_k durch Umkehrung des Magnetfeldes entsteht.

B. Mühlischlegel.

Fan, H. Y.: Infra-red absorption in semiconductors. Phys. Soc., Rep. Progr. Phys. 19, 107—155 (1956).

Verf. gibt einen zusammenfassenden Bericht über die vier in Halbleitern wesentlichen Mechanismen der Ultrarotabsorption: 1) Absorption unter Übergang von Elektronen aus dem Valenzband in das Leitungsband, 2) Absorption durch freie Ladungsträger, 3) Absorption durch die Störstellenelektronen und 4) Absorption unter Anregung von Gitterschwingungen. Einer eingehenden Diskussion der Theorie folgt ein Vergleich mit an Si, Ge, InSb und Te gewonnenen experimentellen Ergebnissen.

O. Madelung.

Appel, J.: Einfluß der Bahnquantisierung im Magnetfeld auf die longitudinale Widerstandsänderung von kovalenten Halbleitern. II. Z. Naturforsch. 11a, 892—901 (1956).

Argyres, P. N. and E. N. Adams: Longitudinal magnetoresistance in the quantum limit. Phys. Review, II. Ser. 104, 900—908 (1956).

[Teil I. der Arbeit von J. Appell s. dies. Zbl. 71, 239.] — Theorie der longitudinalen Widerstandsänderung in isotropen Halbleitern unter Berücksichtigung der Bahnquantisierung der Elektronen im Magnetfeld.

O. Madelung.

Price, P. J.: Theory of transport effects in semiconductors: thermoelectricity. Phys. Review, II. Ser. 104, 1223—1239 (1956).

In Fortsetzung einer Reihe von Publikationen über Transportphänomene in Halbleitern [P. J. Price, dies. Zbl. 65, 239; Phys. Review, II. Ser. 102, 1245—1252 (1956)] wird die Theorie der Thermospannung eingehend behandelt.

O. Madelung.

Yamashita, Jiro: Theory of electron multiplication in silicon. Progress theor. Phys. 15, 95—110 (1956).

In die frühere Theorie des Verf. (dies. Zbl. 58, 454) wird der Einfluß des Stoßionisationsprozesses einbezogen. Die Anwendung auf eine Silizium $p-n$ -Schicht führt zu ziemlich guter Übereinstimmung mit Experimenten von McKay und McAfee.

Walter Franz.

Overhauser, Albert W.: Multiplet structure of excitons in ionic crystals. Phys. Review, II. Ser. 101, 1702—1712 (1956).

Über die Art der Exzitonzustände in den Alkali-Halogeniden gibt es zwei verschiedene Auffassungen. Nach der einen bleibt das Elektron, das optisch am Halogen-Ion angeregt wird, bei diesem, während es nach der anderen Auffassung, der sich Overhauser anschließt, zu den benachbarten Alkali-Ionen übergeht. Da die Lokalisationsorte des Elektrons an den Alkali-Ionen für das Elektron energetisch gleichberechtigt sind, sind in bekannter Weise noch Linearkombinationen aus den am Alkali lokalisierten Wellenfunktionen aufzubauen, wobei die Koeffizienten weitgehend gruppentheoretisch bestimmt werden können, was von Overhauser durchgeführt wird. Gleichzeitig ergibt sich eine Klassifizierung der Termmannigfaltigkeit und der optisch zugänglichen Endzustände. Ein Verfahren, um die Lage der Energiewerte selbst zu bestimmen, wird formuliert.

H. Haken.

Höhler, Gerhard: Wechselwirkung eines nichtrelativistischen Teilchens mit einem skalaren Feld für mittelstarke Kopplung. II. Z. Phys. 146, 372—388 (1956).

Ausgangspunkt der Untersuchung bildet der in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 65, 239) angegebene, sehr allgemeine Variationsansatz für die Wellenfunktion: Teilchen — skalares Feld. Dieser Ansatz wird mit Hilfe „Pekarscher Produktzustände“ spezialisiert und der Erwartungswert des Hamiltonoperators berechnet. Die Energie und die effektive Masse des Teilchens werden für starke Kopplung Teilchen-Feld durch Entwicklung nach fallenden Potenzen der Kopplungskonstanten, sowie bei schwacher Kopplung durch Entwicklung nach steigenden Potenzen bestimmt, wobei die ersten 8 Glieder gefunden werden, die zum größten Teil jedoch verschwinden. Die Arbeiten I und II stellen, abgesehen von einer Arbeit von Feynman (dies. Zbl. 65, 239), in der allerdings nur die Energie und scheinbare Masse, nicht jedoch die Wellenfunktion berechnet wird, die bisher weitestgehende Behandlung dieses Problems dar.

H. Haken.

Pafomov, V. E.: Čerenkov radiation in anisotropic ferrites. Soviet Phys., JETP 3, 597—600 (1956), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 30, 761—765 (1956).

Verf. untersucht die Strahlung einer Ladung, welche sich in einem anisotropen Ferriten mit einer Geschwindigkeit bewegt, die größer ist als die Phasengeschwindigkeit des Lichts. Unterschiede zu einem anisotropen Dielektrikum werden diskutiert.

H. Falkenhagen, G. Kelbg.

Irie, Fujio: The existence domain of complex dielectric constant of binary mixture. Ann. der Physik, VI. F. 19, 31—40 (1956).

Verf. erweitert die Theorie von O. Wiener [Abh. Königl. Sächs. Ges. Wiss., Leipzig, Math.-phys. Kl. 32, 507—604 (1912)] über die Dielektrizitätskonstante binärer Mischungen von denen eine Komponente die Form von Teilchen hat, auf den nichtstationären Fall. Der Existenz-Bereich der komplexen Dielektrizitätskonstante ergibt sich in der komplexen Ebene als Durchschnitt zweier Kreisflächen. Verf. weist darauf hin, daß unter Anwendung der Theorie, Dielektrizitätskonstanten von kornförmigen oder pulverförmigen Substanzen ermittelt werden können.

G. Kelbg.

Kozlovskij (Kozlovskii), V. Ch. (V. Kh.): The dynamics of ionic lattices of ferroelectric crystals in limiting cases. Soviet Phys., JETP 3, 601—612 (1956), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 30, 766—779 (1956).

Mit Hilfe dynamischer Prinzipien wird ohne Heranziehung des Apparates der statistischen Mechanik eine Theorie der ferroelektrischen Kristalle gegeben. Kriterien über Anzahl und Natur von Phasenumwandlungen werden aufgestellt.

H. Falkenhagen, G. Kelbg.

Sitenko, A. G. and A. A. Kolomenskij (Kolomenskii): Motion of a charged particle in an optically active anisotropic medium. I. Soviet Phys., JETP 3, 410—416 (1956), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 30, 511—517 (1956).

Mit Hilfe Fourierscher Transformation werden Gleichungen für die Komponenten des elektromagnetischen Feldes und für den Energie-Verlust eines geladenen Teilchens aufgestellt, welches sich in einem optisch aktiven anisotropen Medium bewegt.

H. Falkenhagen, G. Kelbg.

Dexter, D. L.: Absorption of light by atoms in solids. Phys. Review, II. Ser. 101, 48—55 (1956).

Verf. berücksichtigt die Wechselwirkung des Störstellenelektrons mit den Nachbaratomen für einige vereinfachte Modelle und berechnet den Absorptionskoeffizienten. Wegen der expliziten Berücksichtigung der genannten Wechselwirkung geht die Behandlung über die sonst bei Störstellen gebräuchliche, die sich auf die Näherung der „effektiven Masse“ sowie des „effektiven Feldes“ stützt, hinaus. Das Gitter wird dabei stets als starr angenommen.

H. Haken.

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

●**Diek, Julius:** *Grundtatsachen der sphärischen Astronomie.* Leipzig: Johann Ambrosius Barth Verlag 1956. 103 S. mit 48 Abb. Brosch. DM 5,—, geb. DM 6.—.

Ein einführendes Büchlein mit begrenzter Zielsetzung, das mathematisch nur die Kenntnis trigonometrischer Funktionen und der sphärischen Geometrie voraussetzt. Die entsprechenden Begriffsbestimmungen und Lehrsätze sind in der Einleitung behandelt. Der erste Teil des Werkes befaßt sich sodann mit den Koordinatensystemen der sphärischen Astronomie und den scheinbaren Örtern und Bewegungen der Gestirne, während der zweite Teil der Reduktion der Beobachtungen und den hierfür wichtigen Änderungen des Koordinatensystems gewidmet ist. Das von einem erfahrenen Beobachter geschriebene Büchlein behandelt das Dargebotene in scharfer und klarer Form und ist zweifellos geeignet, angehende Studierende dieser Probleme zum Studium umfangreicherer und tiefergehender Werke anzuregen.

E. Rabe.

Martin, E. L.: *Funzioni prive di estremanti in moti di sistemi binari di massa variabile.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 20, 56—59 (1956).

L'A. determina la massa $m(t)$, di un sistema binario, in funzione del tempo t , tale che nel moto di un corpo rispetto all'altro rimanga costante la differenza v fra l'anomalia del corpo $\Theta(t)$ e l'anomalia $\omega(t)$ del periastro dell'orbita osculatrice; nel caso $\cos v = 0$ o $\cos v + e = 0$ (e eccentricità) la $m(t)$ ha l'espressione di Mesterschersky. Dimostra poi che, sempre nel caso di v costante, Θ , ω , m , e , $e m$ e la distanza, r , fra i due corpi, sono funzioni del tempo prive di estremanti.

D. Graffi.

Popović, Božidar: *Angenäherte Berechnung der Bahnelemente eines kleinen Planeten aus drei heliozentrischen Stellungen.* Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 11, 45—52, serbokroatische Zusammenfassung 52 (1956) [Russisch].

Verf. gibt ein Näherungsverfahren für die Berechnung der von M. Milanković eingeführten sogenannten vektoriellen Bahnelementen eines kleinen Planeten aus drei heliozentrischen Positionen an (diese Bahnelemente bestehen aus fünf unabhängigen Komponenten des doppelten Flächengeschwindigkeitsvektors $\mathbf{c} = \left[\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]$ und des Vektors $\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{c} \right] - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$, zusammen mit dem Zeitpunkte des Periheldurchganges). Das Prinzip der vereinfachten Rechnung entspricht der Annahme, daß der Planet die durch seine den drei Beobachtungszeitpunkten entsprechenden räumlichen Positionen bestimmte Kreisbahn mit gleichmäßig veränderlicher Geschwindigkeit durchläuft.

J. Földes.

Message, P. J.: *The second-order theory of the figure of Jupiter.* Monthly Not. roy. astron. Soc. 115, 550—557 (1956).

Die von Jeffreys entwickelte Theorie zweiter Ordnung über die Gestalt rotierender Himmelskörper wird auf den Planeten Jupiter angewendet. Die höheren Terme der auftretenden Reihen werden unter verschiedenen Hypothesen über die innere Konstitution bestimmt. Der Wert für die Säkularbewegung des Knotens des fünften Satelliten von Jupiter ergibt sich in guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen.

F. Schmeidler.

Sakurai, Akira: *Propagation of spherical shock waves in stars.* J. Fluid Mechanics 1, 436—453 (1956).

Die Fortpflanzung kugelliger Stoßwellen durch polytrope selbstgravitierende Gaskugeln wird für den Fall theoretisch untersucht, daß sie durch eine plötzliche zentrale Explosion mit einer endlichen Energie hervorgerufen werden. Gegenüber

früheren Bearbeitungen dieses Problems, die eine konstante Stoßstärke bei einer speziell vorgegebenen Dichteverteilung im vor der Explosion liegenden Ausgangszustand annehmen, läßt der Verf. eine veränderliche Stoßstärke zu und der Zustand vor der Explosion soll einem Gleichgewichtszustand ohne weitere Annahmen entsprechen. Das Problem wird durch zwei Längen R_0 und L charakterisiert, die mit dem wirksamen Bereich der Explosion und den Abmessungen der Gaskugel verknüpft sind. Die Untersuchung bezieht sich vor allem auf den Fall, daß R_0 und L von der gleichen Größenordnung sind. Die Lösung wird in Form einer Potenzreihe nach dem Radius der Stoßfront entwickelt. Es wird eine Annäherung bis zu Gliedern der dritten Potenz abgeleitet und Formeln für die Geschwindigkeit der Stoßfront, die Temperatur und Dichte an der Stoßfront angegeben. *W. Wuest.*

Goody, R. M.: The influence of radiative transfer on cellular convection. *J. Fluid Mechanics* **1**, 424—435 (1956).

Im Hinblick auf Probleme der Wärmebewegung in der Gashölle von Sternen wird die zelluläre Strömung zwischen zwei parallelen Platten untersucht, von denen die untere geheizt ist. Im Gegensatz zu früheren Bearbeitungen dieses Problems wird aber auch berücksichtigt, daß das Medium Wärmestrahlung absorbiert und emittiert. Die begrenzenden Wände werden als schwarze Körper angenommen. Wegen der Schwierigkeiten einer allgemeinen Lösung werden Näherungen für ein opakes und ein durchsichtiges Medium entwickelt. Die Bedingungen für die Stabilitätsgrenze werden sowohl für den Fall untersucht, daß die Bewegung auf die Temperaturgrenzschichten beschränkt bleibt als auch für den Fall, daß sie im Innern der Zwischenflüssigkeit stattfinden. Es zeigt sich, daß die Strahlung im Sinne einer Stabilisierung wirkt. *W. Wuest.*

● **Sobolev, V. V.:** Die Übertragung von Strahlungsenergie in den Atmosphären von Sternen und Planeten. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 392 S. R. 11.20 [Russisch].

In didaktisch vorbildlicher Weise werden die Grundprobleme der Theorie des Strahlungstransports in homogenen und geschichteten Medien untersucht und die Lösungsverfahren angegeben. Auf die Transporttheorie für Neutronen wurde hierbei nicht eingegangen. Jedoch sind die entsprechenden Gleichungen in den analogen Fällen leicht zu übertragen. Man findet auch einige neue Lösungsmethoden, die erst nach dem Erscheinen der Bücher von Chandrasekhar (dies. Zbl. **37**, 432) und Kourganoff (dies. Zbl. **48**, 201) ausgearbeitet wurden. Ein Sachwortverzeichnis würde den Wirkungsgrad beim praktischen Gebrauch erhöhen. *G. Wallis.*

Busbridge, I. W.: A mathematical verification of the principle of invariance as applied to completely non-coherent scattering and to interlocked multiplet lines. *Monthly Not. roy. astron. Soc.* **115**, 661—670 (1956).

Das Problem des Strahlungstransportes in einer planparallelen Atmosphäre für inkohärente Streuung und für „interlocked“ Multipllettlinien ist in zwei früheren Arbeiten des Verf. unter Anwendung des Invarianzprinzips von Chandrasekhar behandelt worden. Hier wird eine neue Ableitung dieser Lösungen gegeben und damit die Anwendbarkeit des Invarianzprinzips auch im Falle inkohärenter Streuung bestätigt. *G. Burkhardt.*

Busbridge, I. W.: Finite atmospheres with isotropic scattering. *Monthly Not. roy. astron. Soc.* **115**, 521—541 (1956).

V. A. Ambarzumians Methode (dies. Zbl. **60**, 465) zur Lösung von Strahlungsgleichgewichtsproblemen für eine unendlich ausgedehnte, planparallel geschichtete Atmosphäre wird so verallgemeinert, daß sie auch auf endliche Atmosphären angewendet werden kann. Ambarzumians Verfahren besteht im wesentlichen in einer Transformation der Milneschen (linearen) Integralgleichung für die Ergiebigkeit

in eine (nichtlineare) Integralgleichung für die Richtungsverteilung der Intensität an der Sternoberfläche. Diese Gleichung kann relativ einfach durch Iteration gelöst werden. — Ist die Atmosphäre endlich, so führt die analoge Transformation auf zwei gekoppelte Integralgleichungen, deren Lösungen die Reflektion an der Atmosphäre bzw. die Transmission durch die Atmosphäre bestimmen. — Verfasserin zeigt, daß dieser Sachverhalt (ursprünglich von Chandrasekhar nach einem anderen Verfahren abgeleitet) in relativ einfacher Weise aus der verallgemeinerten Ambarzumian-Methode folgt. Sie diskutiert speziell den Fall der isotropen Streuung.

K. H. Böhm.

Kaminisi, Keisuke: On the adiabatic change of completely ionized gases in the stars. *Kumamoto J. Sci., Ser. A* **2**, 358—362 (1956).

Für die Konvektionszone von Sternmodellen wird oft mit dem bei einatomigem idealen Gas geltenden Polytropenindex $n = 1.5$ gerechnet. Unter Berücksichtigung des Einflusses der Ionisation und der Gegenwart der Strahlung wird der effektive Polytropenindex in Abhängigkeit von Dichte und Temperatur berechnet und tabelliert. Die Abweichungen betragen meist einige Prozent und maximal einen Faktor zwei.

S. v. Hoerner.

Jain, B. S. and Pyare Lal: Anharmonic pulsations of two-phase homogeneous model. *Bull. Calcutta math. Soc.* **48**, 197—202 (1956).

Es werden die anharmonischen Schwingungen eines Zweiphasen-Modells untersucht, das aus einem homogenen Kern und einer den Kern umgebenden Hülle gleichförmiger Dichte besteht. Der Kernradius wird gleich dem halben Radius des gesamten Modells angenommen und die Kerndichte gleich der 10-fachen Hüllendichte.

H. Vogt.

Zeuli, Tino: Equilibrio radiativo di una massa gassosa stellare in lenta rotazione uniforme. *Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat.* **15**, 351—366 (1956).

Das Problem eines in langsamer (starrer) Rotation befindlichen Sternes wird, unter Berücksichtigung des Strahlungsdruckes nach dem Eddingtonschen Modell, genau nach dem Muster der vorausgegangenen Arbeit (dies. Zbl. **71**, 448) behandelt.

Theodor Schmidt.

Banerjee, K. N.: Transients in the records of seismic body waves. *J. Technol.* **1**, 49—56 (1956).

Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben

- Abe, Hitoshi (Subordination) 66.
- Abhyankar, Shreeram (Formal power series) 26; (Algebraic surfaces) 379.
- Abrikosov, A. A. (Infrared catastrophe) 230; (Scattering of high-energy electrons) 230; (Compton effect at high energies) 230.
- Acrivos, Andreas (Transient response of stagewise processes. II.) 436.
- Aczél, J. and M. Hosszú (Transformations with several parameters) 106.
- Adachi, Ryuzo (Integro-differential equations) 109.
- Adams, E. N. s. P. N. Argyres 458.
- Adhikari, B. P. et D. D. Joshi (Distance-discrimination) 357.
- Adkins, J. E. (Problems in two-dimensional elasticity) 191.
- Agrusti, Giovanni (Derivate parziali prime dei raggi associati di convergenza) 70.
- Aiken, Howard H. (Future of automatic computing machinery) 344.
- Ajdukiewicz, Kazimierz (Conditional sentence and material implication) 248.
- Akutowicz, Edwin J. (Phase of a Fourier integral. I.) 84.
- Al-Dhahir, M. W. (Class of configurations) 365.
- Albenga, Guiseppe (Flessione della trave elastica) 3.
- Albert, A. A. (Higher algebra) 8.
- Albuquerque, José Ribeiro de s. Ribeiro de Albuquerque, José 395.
- Alder, Kurt and Aage Winther (Tables of orbital integrals in Coulomb excitation) 122.
- Alekseev, N. I. (Stratifizierte orthogonale Paare) 385.
- (Alexeiev), V. M. (Three body problem) 404.
- Aleskerov, S. A. (Äußere Randwertaufgabe für Laplace'sche Gleichung) 109.
- Amici, Andrea ($x^{y/x} = y^{x/y}$) 46.
- Anderson, R. D. (Atomic decompositions of continua) 397; (One-dimensional continuous curves) 397; (Open mappings of compact continua) 397; (Totally disconnected sections of monotone open mappings) 397.
- Andreoli, Giulio (Polidromia di funzioni assegnate con espressioni aritmetiche) 63.
- Appel, J. (Bahnquantisierung im Magnetfeld. II.) 458.
- Arai, Tadashi s. Eiichi Ishiguro 454.
- Arbeiten der dritten mathematischen Unions-Tagung Moskau, 1956 I. II. 2.
- Arens, Richard (Cauchy integral) 70; (Banach algebra generalization of conformal mappings of the disc) 331.
- — and Kenneth Hoffman (Algebraic extension of normed algebras) 330.
- — F. and James Eells jr. (Embedding uniform and topological spaces) 396.
- Argyres, P. N. and E. N. Adams (Longitudinal magnetoresistance) 458.
- Aronson, D. G. (Parabolic differential equations) 318.
- Arregui Fernández, Joaquín (Geometrie auf einer algebraischen Kurve) 161.
- Artin, Emil (Idèle class group) 264.
- Artobolevskij I. I. (Leading mechanisms) 405.
- Artzy, Rafael (Self-dual configurations) 366.
- Arus, Lorenzo (Oscillazioni forzate nei sistemi non lineari) 439.
- Aržanyč (Arzhanykh), I. S. (Chain systems of the meson field) 447.
- Asral, Bediz (Cauchy problem for parabolic equations) 317.
- Atkinson, F. V. (Polynomials with least weighted maximum) 287.
- Atti del convegno internazionale sulla propagazione delle radioonde nella ionosfera. 218.
- Austin, Donald G. (Markoff transition probability functions) 128.
- Aymerich, Giuseppe (Guida contenente un dielettrico giromagnetico) 441.
- Azepeitia, A. G. (Berechnung der inversen Matrix) 108.
- Azumaya, Goro (Existence theorem of algebras) 24.
- Backes, F. (Surfaces réglées) 164; (Congruences W) 166.
- Badaljan, G. V. (Legendre'sche Polynome) 287.
- Badaruddin, Sharif s. Gerald Pickett 407.
- Bader, W. (Geschwindigkeit bei kompressibler Strömung) 418; (Kompressibilitätseinfluß auf den Stromlinienverlauf) 418.
- Bagemihl, F. (Power series and area) 293.
- Bahadur, R. R. and Leonard J. Savage (Nonexistence of statistical procedures in nonparametric problems) 143.
- Bajer (Baier), V. N. and S. I. Pekar (Nukleomesodynamics in strong coupling. II.) 450.
- Bakel'man, I. Ja. (Deformations of regular convex surfaces) 164.
- Balachandran, V. K. (Isomorphic BS-representations) 19.
- Baldock, G. R. (Specific heat of graphite) 456.
- Balescu, R. s. I. Prigogine 434.
- Banaschewski, Bernhard (Hüllensysteme) 269.
- Banerjee, K. N. (Transients in the records of seismic body waves) 462.
- Baratta, Maria Antonietta (Problema cilindrico di propagazione del calore) 436; (Calore in un mezzo dotato di simmetria sferica) 436.
- Barbašin (Barbashin), E. A. (Proving the stability theorems in first approximation) 334.
- Bardeen, J. (Electrons and lattice vibrations) 239.

- Barker, C. C. H. (Contact along a curve on an algebraic fourfold) 381.
- J. A. (Cell theory of liquids. II.) 237.
- Barker, R. H. (Pulse transfer function) 119.
- Barna, Béla (Divergenzpunkte des Newtonschen Verfahrens. II.) 106.
- Barsotti, Iacopo (Algebraic group-varieties) 378.
- Bartholomew, D. J. (Tests for randomness) 153.
- Bartlett, M. S. (Comment on Sir Ronald Fisher's paper) 357.
- Basu, D. (Asymptotic efficiency) 149.
- Bateman, P. T. and P. Erdős (Partitions into primes) 31.
- Bauer Heinz (Abstrakte Theorie des Riemann-Integrals) 40; (Alexandroffsche Erweiterung eines topologischen Raumes) 177.
- Bazarov, I. P. (Equations with variationel derivatives and distribution functions) 236.
- Beauregard, Olivier Costa de s. Costa de Beauregard, Olivier 443, 447.
- Beattie, I. R. and D. R. Davies (Diffusion equation for isotopic exchange) 436.
- Beatty, S. (Difference methods in theory of local order bases) 63.
- Behlendorf, Erika (Randwertprobleme bei Häuten) 407.
- Behnke, Heinrich (Funktionentheorie auf komplexen Mannigfaltigkeiten) 302.
- Behrend, F. A. (Compactification of separated uniform spaces) 177.
- Bejar, Juan (Regression auf der Basis des Medianwertes) 154.
- Belenky, S. Z. (Scattering and multiple production of particles) 451.
- Belgodère, Paul (Documentation Mathématique) 1.
- Bellemans, A., V. Mathot et P. Zuckerbrodt (Vaporisation dans les mélanges binaires. I.) 236.
- — et P. Zuckerbrodt (Vaporisation dans les mélanges binaires. II.) 236.
- Bellman, R. (Integral identities) 278; (Functional equations) 304.
- —, I. Glicksberg and O. Gross („Bang-bang“ control problem) 115.
- Belluzzi, Odone (Comportamento elastico delle travi ad anello) 406.
- Benado, Mihail (Produits réguliers) 12; (Zu einer Arbeit von Ore) 272.
- Bennett, B. M. (Logarithmic transformations) 140; (Confidence limits for the ratio of regression coefficients) 151; (Preliminary tests) 151; (Rank-order test) 359.
- Joseph F. (Number of independent parameters of a score matrix) 360.
- Berg, Lothar (Maßbestimmung linearer Punktmen-gen) 39; (Asymptotisches Verhalten der Laplace-Transformation) 85; (Funktionalgleichung) 105.
- Bergman, Stefan (Partial differential equations) 83.
- Berkley, Richard J. s. Alex E. S. Green 234.
- Berman, D. L. (Weierstrass' interpolation formulae) 51.
- Bernard, Daniel (G-structures complexes) 401.
- Bernstein, Jeremy (Scattering of K^+ particles) 451.
- Berstein, I. (Pseudoconjugate of a pseudoharmonic function) 302.
- (Berštejn), I. and A. Halanay (Chalanaj) (Index of a singular point) 77.
- Bertram, G. (Zweite Randwertaufgabe der ebenen Potentialtheorie) 342.
- Beth, E. W. (Intuitionistic logic) 249.
- Bethe, Hans A. and Philip Morrison (Elementary nuclear theory) 233.
- Bhonsle, B. R. (Results involving Laplaces transforms) 85; (Laplace integral) 86.
- Billeter, E. P. (Optimum design in mixed sampling plans) 141.
- Billing, Heinz (Schaltkreis-und Speichertechnik) 343.
- Billingsley, Patrick (Goodness of fit criteria) 356.
- Bilo, J. (Affinité orthologique) 367.
- Bishop, J. F. W. (Temperatures in steady motion problems) 413.
- — —, A. P. Green and R. Hill (Deformable region in a rigid-plastic body) 198.
- Biswas, S. N. and H. S. Green (Bethe-Salpeter equation) 228.
- Blackwell, David (Probability spaces) 123; (Controlled random walks) 132.
- Blanc, Ch. (Intégration approchée d'équations du type parabolique) 341.
- — et W. Liniger (Systèmes algébriques linéaires) 337.
- Blanc-Lapierre, André, Pierre Dumontet et Michel Savelli (Fonctions aléatoires dans des problèmes de changement de fréquence) 353; (Détection quadratique du bruit de fond) 443.
- Blanchard, André (Variétés analytiques complexes) 375.
- Bland, D. R. (Vector fields associated with plane plasticity) 412.
- Blanuša, Danilo (Imbeddings of cylinders with hyperbolic metric) 169; („On the symmetry“) 173.
- Blij, F. van der (Quadratic forms and Euler products) 31.
- Blohincev, D. I. (Nonlinear field theory) 225.
- Blum, Richard (Bianchi identities) 169.
- Blyth, Conrad Alexander (Theory of capital) 363.
- Boas jr., R. P. and R. C. Buck (Polynomials defined by generating relations) 58.
- Boers, A. H. (Anneau 5-alternatif) 19; (Associateur) 19.
- Bögel, Karl (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen) 301; (Für Stabilitätsuntersuchungen geeignetes Normdiagramm) 343.
- Boltjanskij (Boltjanski), V. (W.) G. (Differentialrechnung) 36.
- Bononcini, Vittorio E. (Problemi di massimo per le serie multiple di Fourier) 285.
- Booth, Andrew D. (Input-output for digital computing machines) 343.
- Borkowski, Ludwik (Analytische und synthetische Definitionen) 5.
- Borok, V. M. (Characteristic property of parabolic systems) 80.
- Borovikov, V. A. (Mit Fragen der Quantenelektrodynamik zusammenhängende topologische Aufgabe) 187.
- Bose, P. K. (Normalisation of frequency functions) 136.
- R. C. and Shanti S. Gupta (Moments of order statistics) 139.

- Bott, Raoul (Application of the Morse theory) 400.
- Bourgin, D. G. (Indice dei punti uniti. I—III.) 397
- Bowker, Albert H. (Continuous sampling plans) 360.
- Boyer, Carl B. (Analytic geometry) 2.
- Bradt, R. N., S. M. Johnson and S. Karlin (Sequential designs for maximizing the sum of n observations) 142.
- Braginskij, S. I. (Geladene Teilchen in starkem Magnetfeld) 223.
- Brauer, Richard (Groups of finite order) 14.
- Breakwell, John V. (Economically optimum acceptance tests) 141.
- Bredichin, B. M. (Endlicher Homomorphismus) 268.
- Bredon, Glen E. (Isoperimetric problem) 394.
- Briggs, William E. (Constants associated with Riemann zeta-function) 293.
- Brillouin, Léon et Maurice Parodi (Ondes dans les milieux périodiques) 222.
- Brinkman, H. C. (Brownian motion) 435.
- Broer, L. J. F. (Hydrodynamics of visco-elastic fluids) 416.
- Bronskij, A. P. (Deformationsgeschwindigkeit eines Hohlzylinders) 193.
- Brout, R. and I. Prigogine (Statistical mechanics of irreversible processes. VIII.) 214.
- Bruck, R. H. (Combinatorial problems) 29.
- Brueckner, K. A. and W. Wada (Nuclear saturation and two-body forces) 234.
- Bruijn, N. G. de (Number systems) 27.
- Brusotti, Luigi e Vittorio Emanuele Galafassi (Topologia degli enti algebrici reali) 381.
- Bruwier, L. (Applications d'un opérateur différentiel) 72.
- Buck, R. C. s. R. P. Boas jr. 58.
- Budiansky, Bernard and J. Mayers (Effective torsional stiffness of thin wings) 194.
- and Carl E. Pearson (Decomposition of stress and strain tensors) 405; (Galerkin's procedure for non-linear elasticity) 411.
- Budini, P. (Cut-off and non local theories) 229.
- Burau, Werner (Lineare Komplexe) 369; (Zur Darstellungstheorie der klassischen Gruppen) 370; (Grundmannigfaltigkeiten) 370.
- Burniat, Pol (Superficie algebriche di genere lineare grande) 161.
- Burštejn (Burshtein), Ě. L. and L. S. Solov'ev (Alternating-gradient focusing) 75.
- Busbridge, I. W. (Principle of invariance) 461; (Finite atmospheres with isotropic scattering) 461.
- Buttafuoco, Ettore s. Romolo Musti 259.
- Butzer, Paul L. (Singular integral of de la Vallée-Pousin) 281.
- Bycroft, G. N. (Forced vibrations of a plate) 194.
- Cabannes, Henri (Mouvements rectilignes non stationnaires d'un fluide) 202.
- Campbell, L. Lorne (Dead time correction in counters) 132.
- Cane, Violet R. (Statistical problems in experimental psychology) 361.
- Cansado, Enrique (Lineare Programmierung) 155.
- Capps, R. H. and Gyo Takeda (Momentum-transfer pion-nucleon scattering) 231.
- Carafoli, Elie (High-speed aerodynamics) 203.
- et Béatrice Horovitz (Écoulement supersonique autour d'une aile) 430.
- et M. Ionescu (Ailes en régime supersonique) 430.
- Carathéodory, Constantin (Mathematische Schriften 4. 5.) 1.
- Cardoso, J. M. s. Newton C. A. da Costa 1.
- Carlitz, L. (Expansion of certain products) 10; (Solvents of linear groups in finite field) 10; (Sum connected with quadratic residues) 28; (Jacobi polynomials) 288.
- Carlson, Phillip G. (Bivariate line of organic correlation) 153.
- Carman, P. C. (Flow of gases through porous media) 433.
- Carneiro Affonso da Costa, Newton s. Costa, Newton Carneiro Affonso da 28.
- Carrier, G. F. (Diffusive convection in tubes) 202.
- Cartwright, M. L. (Theory of non-linear vibrations) 114.
- Casesnoves, Dario Maravall s. Maravall Casesnoves, Dario 223, 326.
- Cassels, J. W. S. (Sums of powers of complex numbers) 33; (Result of Marshall Hall) 34.
- Castañeda, José (Lineare Programmierung) 155.
- Castellano, Vittorio (Applicazione del „Metodo delle serie rettilinee periodiche“) 360.
- Castoldi, Luigi (Processi markoviani) 129.
- Castro, E. de (Definizioni e equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo) 437.
- Cattabianchi, Luigi Tanzi s. Tanzi Cattabianchi, Luigi 46.
- Čavčanidze, V. V. (Gleichungen der Quantenelektrodynamik) 230.
- Čebotarëv, G. N. (Riemannsche Randwertaufgabe) 296.
- Čerkin, K. E. s. L. V. Kantorovič 121.
- Černavskij, D. S. s. E. L. Fejnberg 449.
- Černyšenko, V. M. (Paare von Flächenkongruenzen) 170.
- Cesari, L. (Surface area) 41; (Retraction homotopy, integral) 44.
- Ceschino, Francis (Intégration approchée des équations différentielles) 339.
- Četveruchin, N. F., V. S. Levickij, Z. I. Prjanskiškova, A. M. Tevlin and G. I. Fedotov (Darstellende Geometrie) 403.
- Chacón, E. (Statistik. 2) 354.
- Chadan, Khosrow (Potential neutron-proton) 452.
- Chaki, M. C. (Type of tensor in Riemannian space) 168.
- Chakravorty, J. G. (Vibrations of a circular cylinder) 200; (Distribution of stress in an infinite circular cylinder) 410; (Distribution of stress in a hollow aeolotropic cylinder) 410.
- Chalfin (Halfin), L. A. (Causality condition and physical realizability) 228.
- Chambers, L. G. (Reflection by cylindrical mirror) 221.
- R. G. (Fermi surface) 238.
- Champernowne, D. G. (Queueing problem with a single server) 130.

- Chaplanov, M. G. (Unendliche Matrizen) 334.
- Chatterjee B. B. (Stresses in thin blades) 190.
- Cheema, M. S. (Tables of partitions of Gaussian integers) 266.
- Chester, W. (Supersonic flow past a bluff body. II.) 211.
- Chincin, A. Ja. (Khintchine, A.) (Nachwirkungsfreie Folgen zufälliger Ereignisse) 127; (Poissonsche Folgen) 128.
- Chopra K. P. (Induction drag of a sphere moving in a conducting fluid) 223.
- Choquet, Gustave (Noyaux réguliers en théorie du potentiel) 321.
- Choudhury, Pritindu (Stress distribution in a thin aeolotropic strip) 410.
- Chovanskij, A. N. (Anwendung der Kettenbrüche auf approximative Analysis) 50.
- Chow, Wei-Liang (Equivalence classes of cycles) 373.
- Chu, J. T. (Errors in normal approximations) 136.
- Church, Alonzo (Mathematical logic. I.) 243.
- Cimbliser, Borisas (Diffusion in oszillierendem Absorber) 235.
- Cimpan, Fl. (Trigonométrie de Gh. Asachi) 241; (Cours de mathématiques) 241.
- Cinquini-Cibrario, Maria (Equazioni alle derivate parziali a caratteristiche reali) 313.
- Civin, Paul and Bertram Yood (Invariant functionals) 92.
- Clarke, A. B. (Waiting line process of Markov type) 130; (Simple cardinal algebras) 252.
- Cohen, Eckford (Congruences in algebraic number fields) 28; (Ramanujan's sum. III.) 29; (Totient functions) 29; (Binary congruences) 266.
- Cohn, Harvey (Applied number theory) 34.
- Collatz, L. (Fehlermaßprinzipien) 336.
- Collingwood, Edward F. et Arthur J. Lohwater (Défauts d'une fonction méromorphe dans le cercle-unité) 67.
- Conner, P. E. (Action of a finite group) 398.
- Conroy M. F. (Elastic stresses at the boundary of a hole) 191.
- Constantinescu, Paul (Decroissement du nombre des contacts) 344; (Employant les congruences des entiers dans la théorie des mécanismes automatiques) 344.
- Copping, J. (Transformations of multiple sequences) 47.
- Cordes, Heinz Otto (Nicht-halbbeschränkte Differentialoperatoren) 98.
- Corduneanu, C. (Solutions des équations hyperboliques) 316.
- Corinaldesi, E. (Photoproduction of mesons) 232; (Causality and dispersion relations) 446.
- Corrsin, S. and J. Lumley (Particle in turbulent fluid) 210.
- Costa, Newton C. A. da und J. M. Cardoso (Strukturen der Mathematik) 1.
- — Carneiro Affonsa da (Théorème de Bouniakowsky) 28.
- Costa de Beauregard, Olivier (Irréversibilité en physique) 443; (Particule libre à spin) 447.
- Coxeter, H. S. M. (Regular honeycombs in hyperbolic space) 366.
- Craggs, J. W. (Reflexion of sound pulses) 431.
- Cramér, Harald (Geordnete Mengen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen) 124.
- Cristescu, N. (Déformations du problème dynamique de la plasticité) 198.
- Croisot, R. (Applications résiduelles) 11.
- Crum, M. M. (Positive-definite functions) 40.
- Császár, Á. (Ensembles de niveaux des fonctions réelles) 45.
- Čudov (Chudov), L. A. (Inverse Sturm-Liouville problem) 75.
- — L. A. s. V. S. Rjabeňkij 339
- Curl, N. (Unsteady two-dimensional flows. I. II.) 201.
- Curtis, H. J. (Metrixization problem concerning lattices) 259.
- Curzio, Mario (Piani grafici $h-l$ -transitivi) 365.
- Cuzzar, Anna (Concetto di tempo) 4.
- Czyż, W. and J. Sawicki (Polarisation of nucleons. I.) 453.
- Dal Soglio, Letizia s. Soglio, Letizia Dal 182.
- Daleckij, Ju. L. und S. G. Krejn (Funktionen Hermiteischer Operatoren) 97.
- Dall'Aglio, Giorgio (Estremi dei momenti delle funzioni di ripartizione doppia) 140.
- Davenport, H. (Irregularities of distribution) 34; (Simultaneous diophantine approximation) 269.
- David, Herbert T. and William H. Kruskal (WAGR sequential t -test) 357.
- Davidson, P. M. (Theorems in group velocity) 440.
- Davies, D. R. s. I. R. Beattie 436.
- R. O. (Macroscopic theory of irreversibility) 216.
- Davis, Harold T. (Non-linear differential equation of second order) 71.
- De, S. C. (Kinematic wave theory of bottlenecks) 433.
- Debever, R. s. J. Géhéniau 169.
- Dekker, Th. J. (Zerlegung von Räumen) 39.
- Deland, E. C. s. G. N. Lange 455.
- Demidovič, B. P. (Aufgaben zur Analysis) 37.
- Denis, F. (Congruences de droites) 386.
- Dennis, S. C. R. (Sturm-Liouville equation) 308.
- — — — — and G. Poots (Heat transfer equation for laminar flow) 318.
- Depman, I. Ja. (Gauß und die Universität Dorpat-Jürev) 242.
- Deprit, André (Sous-espaces vectoriels) 328.
- Deresiewicz, H. s. R. D. Mindlin 200.
- Derry, Douglas (Convex hulls of simple space curves) 394.
- Devi Singh, Kamla s. Singh, Kamla Devi 168, 170, 171.
- Dexter, D. L. (Absorption of light by atoms in solids) 459.
- Diamantopoulos, Th. (Rayon de contraction) 383.
- Dick, Julius (Sphärische Astronomie) 460.
- Dieudonné, Jean (Theorem of Lazard) 16.
- Dijksterhuis, E. J. (edited by) (Arenarius of Archimedes) 2.
- Dimaggio, F. L. (Effect of an acoustic medium on buckling of plates) 197.
- Dittmann, Gerd (Verallgemeinerung Pythagoreischer Zahlen) 27.

- Djubjuk, A. F. s. E. M. Dobryšman 80.
- Dobrušin, R. L. (Poissonsches Verteilungsgesetz) 352.
- Dobryšman (Dobryshman), E. M. and A. F. Djubjuk (Dubuk) (Solution of $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \Delta - \Delta\right)u = f$) 80.
- Dolginov, A. Z. (Relativistic spherical functions) 228.
- Donnell, L. H. (Buckling of thin cylinders) 196.
- Dowker, Yael Naim (Applications mesurables) 40.
- Downton, F. (Limiting distributions) 131.
- Dragos, L. (Oscillateur de masse qui varie avec la vitesse) 312.
- Driest, E. R. van (Turbulent flow near a wall) 208.
- Drozdeckij, V. V. (Mathematik für topographische Technika) 35.
- Duerr, Hans-Peter (Relativistic effects in nuclear forces) 453.
- Duff, G. F. D. (Neumann and dual-adjoint problems) 83.
- Duhem, Pierre (Système du monde) 241.
- Duleau, Jacques (Ossatures d'immeubles) 338; (Calcul des poutres composées) 338.
- Dumontet Pierre s. André Blanc-Lapierre 353, 443.
- Dundučenko, L. E. (Extremaligenschaften analytischer Funktionen) 298.
- Dungen, F. H. van den (Ondes de gravité de les fluides incompressibles) 212.
- Durand, Émile (Champs électriques et magnétiques permanents) 216; (Fonctions discontinues de l'électrostatique) 216; (Densités singulières de l'électrostatique) 216.
- Dvoretzky, A. and P. Erdős (Power series) 62.
- , J. Kiefer and J. Wolfowitz (Asymptotic minimax character of the sample distribution function) 146.
- Dynkin, E. B. (Markov processes and semi-groups of operators) 348; (Infinitesimal operators of Markov processes) 349.
- — — and A. A. Juškevič (Jushkevich) (Strong Markov processes) 348.
- Džems-Levi (James-Levy), G. E. (Integral law of Student's distribution) 138.
- Džrbašjan, M. M. (Fourierreihen nach rationalen Funktionen) 285.
- — — und A. P. Tamadjan (Beste Annäherung durch ganze Funktionen) 290.
- Eberlein, W. F. (Point spectrum of almost periodic functions) 307.
- Eckert, W. J. und Rebecca Jones (Schneller, schneller) 112.
- Eckmann, Beno (Cohomologietheorie von Räumen und Gruppen) 254.
- Edge, W. L. (Characters of the cubic surface group) 15.
- Edrei, Albert (Conjecture of Pólya) 295.
- Eells jr., James s. Richard F. Arens 396.
- Egloff, Werner (Cauchy's Satz) 367.
- Egorov, I. P. (Riemannian spaces of second lacunarity) 171; (Equi-affine spaces) 389.
- Ehlers, Jürgen (Elektrostatische Felder) 225.
- Ehrenfeucht, A. and A. Mostowski (Models of axiomatic theories admitting automorphisms) 7.
- Ehrhart, Eugène (Polygones croisés) 32; (Polygones plans dans un réseau de l'espace) 32; (Polyèdres et ovales) 32; (Polygones et polyèdres particuliers) 32; (Polygones et ovales) 32; (Polyèdres homothétiques) 32.
- Eichler, Martin (Modular correspondences) 265.
- Eilenberg, Samuel (Homological dimension and syzygies) 260.
- Eisenhart, Luther P. (Gravitation and electromagnetism. II. III.) 224.
- El-Hashimy, Mohamed M. (Plattenprobleme) 189.
- Elliott, Joanne and William Feller (Stochastic processes) 349.
- Emmons, H. W. (Film combustion of liquid fuel) 422.
- Engel, Wolfgang (Nullklassen in algebraischen Funktionenkörpern) 264.
- Engelmann, Folker (Energiezustände von Elektronen in Kristallgittern) 456.
- Enriques, Federigo (Memorie scelte di geometria. I.) 156.
- Epstein, Benjamin (Simple estimators) 152.
- Paul S. (Wave propagation in gyromagnetic medium) 440.
- Équations aux dérivées partielles 78.
- Erdélyi, A. (Asymptotic solutions of differential equations) 309.
- Erdős, P. (Problems in additive number theory) 31; (Additive arithmetical functions) 267.
- — s. P. T. Bateman 31; — — s. A. Dvoretzky 62.
- Espe, I. (Electronic motion in H_2 molecule) 455.
- Estabrook, Frank B. (Non-classical transformation) 443.
- Estève, Madeleine (Répertoire des congrès et ouvrages collectifs) 1.
- Estrugo, José Antonio (Konvergenzverbesserung gewisser Reihen) 49.
- Evangelisti, Giuseppe (Piccoli rigurgiti nei canali scoperti) 433.
- Eve, J. and H. I. Scoins (Equations of Poisson) 342.
- Fabricius-Bjerre, Fr. (J. Hjelm-slevs projektive Infinitesimalgeometrie) 391.
- Fage, M. K. (Cauchy problem) 80.
- Fajn, V. M. s. S. A. Ževakin 440.
- Faleschini, Bruno (Funzioni a variazione limitata di due variabili. II.) 45.
- Falgas, Maurice (Fonctions associées aux bases de polynomes. I. II.) 291.
- Falk, S. (Knickformeln für Stab mit Teilstücken) 189; (Gestützter Durchlaufträger) 189.
- Sigurd (Mehrfeldriger gerader Balken) 188.
- Fan, H. Y. (Infra-red absorption in semiconductors) 458.
- Fantappiè, Luigi (Equazione generalizzata di Schrödinger) 445.
- Farahat, H. (Blocks of characters of symmetric groups) 257.
- Farley, F. J. M. (Pulse circuits) 217.
- Fary, István (Valeurs critiques et algèbres spectrales) 398.

- Faulhaber, Gerhard (Kreisverfahren der Limitierungstheorie) 47.
- Fava, Franco (Varietà integrali) 314.
- Federhofer, K. (Ebene Biegungsschwingungen eines Kreisrings) 199.
- Fedotov, G. I. s. N. F. Četveruchin 403.
- Feit, Walter (Conjecture of Frobenius) 14.
- Fejes Tóth, L. (Triangles inscribed) 175; (Nine regular polyhedra) 393.
- Fajnberg, E. L. and D. S. Černavskij (Higher approximations in meson theory) 449.
- Feldman, Jacob (Rings of operators) 332.
- Feller, Edmund H. (Lattice of submodules) 23.
- William s. Joanne Elliott 349.
- Fel'zenbaum, A. I. (Wirbelbewegungen einer Flüssigkeit) 415.
- Fenchel, W. (Variétés localement convexes des espaces projectifs) 173.
- Férier, J. Kampé de s. Kampé de Férier, J. 133.
- Fernández, Joaquín Arregui s. Arregui Fernandez, Joaquín 161.
- Ferrer Figueras Lorenzo (Rekursionsformeln) 288.
- Fet, A. I. (Involutische Abbildungen) 182.
- Fettis, Henry E. s. Yudell L. Luke 111.
- Fichera, Gaetano (Equazioni del secondo ordine ellittico-paraboliche) 319.
- Fichtengol'c, G. M. (Grundzüge der Analysis. Bd. I, II.) 36.
- Figueras, Lorenzo Ferrer s. Ferrer Figueras, Lorenzo 288.
- Filippov, A. F. s. V. S. Rjabenskij 339.
- Fine, N. J. (Modular functions connected with the Ramanujan identities) 29.
- Finkelstein, R., C. Fronsdal and P. Kaus (Nonlinear spinor field) 447.
- Finn, Robert (Discontinuous plane fluid motions) 415.
- Finney, D. J. (Variate subject to errors of measurement) 356.
- Finzi, Bruno (Teorie relativistiche unitarie) 444.
- Fleischer, I. (Functional representation of partially ordered groups) 17.
- Fletcher, T. J. (Campanological groups) 258.
- Flett, T. M. (Approximation to a function by the Cesàro means of its Fourier series) 53.
- Floras, Milt. (Lignes géodésiques) 388.
- Florian, A. (Ungleichungen über konvexe Polyeder) 174.
- Fogagnolo-Massaglia, Bruna (Vibrazioni quasi-armoniche di un sistema) 309.
- Fonda, L. and I. Reina (Nucleon recoil in pion-nucleon scattering) 232.
- Ford, G. W., R. Z. Norman and G. E. Uhlenbeck (Combinatorial problems in the theory of graphs. II.) 186.
- — — and G. E. Uhlenbeck (Combinatorial problems in the theory of graphs. III. IV.) 186.
- Gloria C. s. Luna I. Mishoe 286.
- jr., L. R. and D. R. Fulkerson (Maximal flow through a network) 402.
- Fortet, Robert M. (Fonctions aléatoires) 346; (Lois des grands nombres) 347.
- Foster, D. M. E. (Indefinite quadratic polynomials) 32.
- Fox, G. E. s. L. LeBlanc 272.
- L. (Mathematical tables. I.) 344.
- Ralph H. (Free differential calculus. III.) 254.
- William C. (Critical points of Peano-interior functions) 181.
- Francia, Giuliana Toraldo di s. Toraldo di Francia, Giuliana 441.
- Frankx, Ed. (Loi faible des grands nombres) 126.
- Franklin, Joel and Herbert B. Keller (A priori bounds for temperature in fuel reactors) 81.
- Franz, W. s. M. Lagally 162.
- Fraser, D. A. S. (Sufficient statistics with nuisance parameters) 149.
- Fréchet, Maurice (Moyenne d'un élément aléatoire) 347.
- Frederick, Daniel (Physical components of stress and strain) 405.
- Freud, G. and D. Králik (Dirichletsches Prinzip für den Kreis) 83.
- Freund, John E. (Parameters of discrete heterogeneous populations) 149.
- Rudolf J. (Introduction of risk into a programming model) 155.
- Friedländer, E. (Multiple meson production) 451.
- Frisch, David H. and Lawrence Wilets (Maxwell-Lorentz equations) 223.
- Fronsdal, C. s. R. Finkelstein 447.
- Fujiwara, I. (Basic formulation of classical and quantum theories) 445.
- Tsuyoshi (Free algebraic systems) 18.
- Fulkerson, D. R. (Dilworth's decomposition theorem) 38.
- — — s. L. R. Ford jr. 402.
- Fulton, T. and R. G. Newton (Non-central potentials and wave functions for given S-matrices) 228.
- Fürst, Dario (Rovina dei giocatori) 155.
- Gabor, D. (Electron interference experiments) 223.
- Gagliardo, Emilio (Criterio di eguale continuità) 45.
- Gaier, Dieter (Konforme Abbildung veränderlicher Gebiete) 68; (Iterationsverfahren von Komatu) 68.
- Galafassi, Vittorio Emanuele s. Luigi Brusotti 381.
- Galanin, A. D., B. L. Ioffe and I. Ja. (Ia.) Pomeranchuk (Pomeranchuk) (Asymptotic Green's function of nucleon and meson) 232.
- Galickij, V. s. V. Kogan 226.
- Gallo, Elisa (Teorema di Moutard) 386; (Proprietà dei sistemi (G)) 386.
- Gambill, Robert A. (Real solutions for linear differential systems) 309.
- Gandy, R. O. (Axiom of extensionality. I.) 8.
- Ganguli, S. C. s. Gerald Pickett 407.
- Garabedian, P. R. (Relaxation factor) 108.
- Gasapina, Umberto (Calotte a centri allineati) 385.
- Gauß, Carl Friedrich (Sammlung von Arbeiten) 3.
- Gauthier, Luc (Commutation des matrices) 368.
- Gaydon, F. A. and H. Nuttall (Elastic-plastic bending of a plate) 199.

- Gayen, A. K. and S. S. Jogdeo (Sampling distribution of mean square successive difference) 138.
- Géhéniau, J. (Invariants de courbure des espaces riemanniens) 169.
- et R. Debever (Invariants de courbure de l'espace de Riemann) 169.
- Geis, Theo („Ähnliche“ stationäre laminare Grenzschichtströmungen) 421.
- Geisser, Seymour (Normal distribution) 135; (Mean square successive difference) 137.
- Gelfand, I. M. (Probleme der Funktionalanalysis) 94.
- Gellman, H. S. s. J. L. Wolfson 403.
- Geronimus, Ja. L. (Ableitungen einiger Funktionen) 52.
- Gersten, Klaus (Abwind hinter Deltaflügeln) 207.
- Gerstenhaber, Murray (Canonical constructions. II. III. IV.) 244.
- Gheorghiu, Șerban (Division d'un segment par des points pris au hasard) 133.
- Ghizzetti, Aldo (Procedimenti di calcolo, degli integrali definiti) 280.
- Ghosh, P. K. ((φ) -convergent integrals) 86.
- Gibellato, Silvio (Strato limite attorno ad una lastra piana) 210.
- Gichman (Gihman), I. I. (Statistics similar to χ^2) 138.
- Giger, Hans (Theorie von Stützfunktion und Radius) 393.
- Gilbert, Gordon R. (Yang-Fermi ambiguity) 231.
- Gillis, J. (Biased random walk) 133.
- Gillman, Leonard and Melvin Henriksen (Elementary divisor rings) 22; (Rings of continuous functions) 92.
- Giulianini, Arturo (Propagazione del calore in un fluido in moto. I. II.) 216.
- Glansdorff, P. (Loi de modération des transformations chimiques irréversibles) 435.
- Glansdorff, P. et J. Passelcq (Transformations irréversibles) 435.
- Glicksberg, I. s. R. Bellman 115.
- Godeaux, Lucien (Couples de congruences W) 165.
- Gold, Louis and Laura M. Roth (Galvanomagnetic theory for electrons in germanium and silicon) 240.
- Goldberg, S. I. (Pseudo-harmonic and pseudo-Killing vectors) 389.
- Goldfarb, L. C. (Nonlinear phenomena in regulatory systems) 118.
- Gonçalves, J. Vicente (Transformée J d'une matrice) 8.
- Good, I. J. (Surprise index for multivariate normal distribution) 135.
- Goodman, Theodore R. (Yaw and sideslip of thin wings at supersonic speeds) 207.
- Goody, R. M. (Cellular convection) 461.
- Götz, H. (Konforme Kurventheorie) 165.
- Graff, H. M. de (Viscous heating) 421.
- Graffi, Dario (Equazione funzionale della fisica-matematica) 312.
- Grauert, Hans (Charakterisierung der Holomorphiegebiete) 302.
- und Reinhold Remmert (Konvexität in der komplexen Analysis) 303.
- Gravett, K. A. H. (Result of Krull) 27.
- Greco, Donato (Equazioni a derivate parziali di tipo ellittico) 320; (Problema di Lauricella) 320.
- Green, A. P. s. J. F. W. Bishop 198.
- Alex E. S. (Model of the nucleus) 234; (Wave functions for the nuclear independent-particle model) 234.
- — —, Kiuck Lee and Richard J. Berkley (Nucleon densities in a independent-particle model) 234.
- H. S. s. S. N. Biswas 228.
- Grenander, Ulf (Mortality measurement) 154.
- Greniewski, Henryk and Olgierd Wojtasiewicz (History of chinese logic) 4.
- Griffith, J. E. and Joseph Marin (Creep relaxation for combined stresses) 198.
- Grigofev, V. I. (Damping in relativistic quantum field theory) 229.
- Grincevičius (Grintsevichus), K. I. (Hypercomplex of straight lines) 166.
- Griseri, Bruna (Costanti della teoria dei polinomi ortogonali classici) 58.
- Gröbner, W. (Idealtheoretische Grundlegung der algebraischen Geometrie) 157.
- Groot, J. de (Representations of free groups) 15; (Problems of Borsuk) 177; (Isomorphism criterion) 255.
- Gross, O. s. R. Bellman 115.
- Grossman, D. P. (Numerische Differentiation ohne Differenzen) 111.
- Grothendieck, A. (Théorie de Fredholm) 101.
- Grünbaum, B. (Borsuk's conjecture) 392.
- Grundy, P. M. (Fiducial distributions and prior distributions) 149.
- Guggenheimer, Heinrich (Genres d'une variété complexe non kählérienne) 172; (Modifications of a manifold) 185; (Modifications in curves) 186; (Topologia delle varietà complesse. I—III.) 401; (Opérateurs différentiels) 402; (Teoria globale delle trasformazioni puntuali) 402.
- Guild, J. (Interference systems of crossed diffraction gratings) 221.
- Guillaume, Marcel (Topologies définies à partir d'une relation d'ordre) 270.
- Guion, A. (Théorème de Dobriner) 383.
- Guiraud, Jean-Pierre (Singularité d'un écoulement de fluide compressible en régime subsonique) 418.
- Gunning, R. C. (Factors of automorphy) 304.
- Gupta, Shanti S. (Decision rule for a problem in ranking means) 359.
- — —, R. C. Bose 139.
- Gurevič (Gurevich), B. L. (New types of function spaces) 315.
- G. B. (Liesche Standard-Nilalgebren) 20.
- Gurevič, L. A. (Äquivalente Systeme) 329.
- Gurland, John (Wallis' formula) 146.
- Gutzwiller, Martin (Quantum theory of wave fields in a curved space) 445.
- Haas, Violet B. (Non-linear differential equation) 77.
- Haber-Schaim, Uri (Pion-nucleon coupling constant) 231.
- Hadwiger, H. (Konkave Eikörperfunktionale) 173; (Extremaler konvexer Rotationskörper) 173.

- Hahn, Wolfgang (Stabilität linearer Differential-Differenzengleichungen) 313.
- Haimovici, Mendel (Éléments intégraux d'un système de Pfaff) 79.
- Halanay, A. s. I. Berstein 77.
- Haldane, J. B. S. (Unbiased estimates of functions of frequencies) 152.
- Hall, M. G. (Method of characteristics for plane supersonic flow) 109.
- P. and Graham Higman (p -length of p -soluble groups) 255.
- jr., Marshall, J. Dean Swift and Robert J. Walker (Projective plane of order eight) 365.
- Halmos, P. R. (Ergodic theory) 93.
- Halperin, Israel and W. A. J. Luxemburg (Riesz-Fischer completeness theorem) 87.
- Hamaguchi, M. (Multiple production of mesons) 452.
- Hamburger, L. (Équation de la chaleur) 435.
- Hamilton, John Raymond s. Walter T. Hamilton 35.
- Walter T. and John Raymond Hamilton (Mathematical analysis) 35.
- Hanai, Sitiro (Closed mappings. I. II.) 178.
- s. Kiiti Morita 178.
- Hanin, Meir and Markus Reiner (Isotropic tensor-functions) 188.
- Hansen, Robert C. (Electromagnetic field solutions) 437.
- Harant, M. and A. Huta (Jur Hronec) 242.
- Harmuth, Henning (Unschärfeleration) 446.
- Hasegawa, Hiroichi s. Yukihisa Nogami 449.
- Hashitsume, Natsuki (Linear dissipative systems. II.) 215.
- Haug, Albert (Nichtpolare Festkörper) 238.
- Hawley, N. S. (Complex bundles with abelian group) 375.
- Hayman, W. K. (Phragmén-Lindelöf principle) 293; (Coefficients of schlicht functions) 298.
- Haythornthwaite, R. M. s. E. T. Onat 409.
- Heber, Gerhard und Gerhard Weber (Moderne Quantenphysik. I. 2.) 226.
- Heinrich, G. (Schwingungen durchströmter Rohre) 204.
- Helgason, Sigurdur (Intersection of L^1 -spaces) 91.
- Henkin, Leon s. Richard Montague 7.
- Henley, E. M. and T. D. Lee (Multiple meson production) 451.
- Henriksen, Melvin (Divisor rings. II.) 23.
- s. Leonard Gillman 22, 92.
- Henry, J. (Effets isotopiques dans les réseaux) 455.
- Heppes, A. (Vermutung von A. Vázsonyi) 391.
- — und P. Révész (Borsuksches Zerteilungsproblem) 391.
- Hermann, Robert (Compact homogeneous almost complex spaces) 184.
- Herrmann, George and I. Mirsky (Axially symmetric motions of cylinders) 192.
- Oskar (Spitzenformen zu Hilbertschen Modulgruppen) 305.
- Hersch, Joseph, Albert Pfluger und Andreas Schopf (Differenzenverfahren zur Abschätzung der Torsionssteifigkeit) 193.
- Herstein, I. N. (Jordan homomorphisms) 22.
- Hestenes, Magnus R. (Hilbert space methods) 322.
- Higgins, P. J. (Groups with multiple operators) 17.
- Higman, Graham s. P. Hall 255.
- Hill, R. (Mechanics of solids) 237.
- s. J. F. W. Bishop 198.
- Hille, Einar (Kolmogoroff's equations) 97; (Cauchy's problem) 334.
- Hilton, P. J. (Higher Hopf invariants) 184.
- Hiong, King-Lai (Fonctions algébroides) 296; (Croissance des fonctions algébroides) 296.
- Hlawka, Edmund (Inhomogenes Problem in der Geometrie der Zahlen) 269.
- Hoang, Pham Tan (Potentiel électromagnétique créé par des particules chargées) 443.
- Hodge jr., P. G. (Displacements in elastic-plastic shell) 408; (Minimum principles of piecewise linear isotropic plasticity) 412.
- Hoeffding, Wassily (Successes in independent trials) 139.
- Hoehnke, Hans-Jürgen (Konstanten der Wellenleitung) 441.
- Hoffman, Kenneth s. Richard Arens 330.
- Höhler, Gerhard (Wechselwirkung eines nichtrelativistischen Teilchens mit skalarem Feld) 459.
- Holmquist, Carl O. and W. Duncan Rannie (Three-dimensional compressible flow in axial turbomachines) 205.
- Holt, M. (Spherical explosion. I. II.) 431.
- Maurice (Method of characteristics for steady supersonic rotational flow) 210.
- Holtmark, J., J. Lothe, S. Tjøtta and W. Romberg (Sound transmission through horns of small flare) 431.
- Hopf, Eberhard (Repeated branching) 416.
- Hopkins, H. G. (Deformation of plates under transverse load) 414.
- Horne, M. R. (Elastic-plastic theory of compression members) 199.
- Hornich, Hans (Schwingungen mit periodischer Störung) 316.
- Horovitz, Béatrice s. Elie Carafoli 430.
- Hosszu, M. s. J. Aczél 106.
- Hsiang, Fu Cheng (Absolute convergence of Fourier series) 282.
- Huard de la Marre, Pierre s. Marre, Pierre Huard de la 213.
- Hübner, Gerhard und Ernst Lübcke (Mechanische Schwingungsgebilde) 404.
- Huckemann, Friedrich (Darstellung Riemannscher Flächen) 299; (Einfluß von Randstellen Riemannscher Flächen auf die Wertverteilung) 300.
- Hudimoto, Hiroshi (Fitting a straight line) 153.
- Hufford, George (Banach spaces) 311.
- Hugues, Louis (Profil d'un déversoir en parvè mince) 212; (Profil d'un déversoir à large seuil) 213.
- Huleux, A. s. F. H. van den Dungen 212.
- Hunt, G. A. (Theorem of Élie Cartan) 16; (Semi-groups of measures on Lie groups) 124.
- Huron, R. (Interprétation mathématique des groupages sanguins) 154.
- Huta, A. s. M. Harant 242.

- Ibragimov, I. A. (Composition of unimodal distributions) 125.
- I. (Quadratische Annäherung im Mittel mittels ganzer Funktionen) 61.
- Ichijō, Yoshihiro (Space with dominant affine connection) 172.
- Ikeda, Mineo (Boundary conditions in unified field theory) 444.
- Il'in (Ilyin), V. A. (Function having a finite number of smooth segments) 81; (Convergence of expansions in eigenfunctions) 81.
- V. P. (Integralungleichung) 323.
- Iliouchine, A.-A. (Plasticité) 412.
- Inoue, Kazuhiko, Shigeru Machida, Mitsuo Taketani and Toshiyuki Toyoda (Pion theory) 449.
- Yoshiro (Extendability of a cross section) 184.
- Interpolation and allied tables. 120.
- Ioffe, B. L. s. A. D. Galanin 232.
- Ionescu, M. s. E. Carafoli 430.
- Ionov, V. N. (Gleichgewicht eines elastischen dickwandigen Rohres) 192.
- Irie, Fujio (Complex dielectric constant of binary mixture) 459.
- Isbell, J. R. (Majority games) 134.
- — — and Herman Rubin (Limit-preserving embeddings of sets) 38.
- Iséki, Kiyoshi (Cut operation in Gentzen calculi) 7; (Theorem by S. Schwarz on semigroup) 11; (Ideal theory of semiring) 19; (Topological spaces. I.) 395.
- — — and Yasue Miyanaga (Radical in a semiring) 19.
- Isiguro, Eiichi, Kunifusa Kayama, Yukio Mizuno, Tadashi Arai and Michiko Sakamoto (Tables for molecular integrals. X.) 454.
- Kazuo (Fourier series. XI.) 55.
- Isiwata, Takeshi (Completely regular space X and $T(X)$) 331; (Structures of a uniform space X and $C(X)$) 331.
- Ismajlov, A. Ja. (Ableitungen von Polynomen) 285.
- Itô, Daisuke and Shigeo Minami (Meson-nucleon scattering) 232.
- Kiyosi (Shift transformation of differential processes) 353.
- Ito, Koichi (Asymptotic formulae for Hotelling's generalized T_0^2) 136.
- Itô, Noboru (Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen) 12.
- — — et Akiko Ôhara (Groupes factorisables. I. II.) 256.
- Iusim, Ch. (Radiation électromagnétique multipolaire des noyaux-gouttes) 453.
- Ivanov, V. N. (Multiplication integral) 73.
- Iwata, Kôichi (Postnikov invariants) 183.
- Iyengar, K. T. Sundara Raja (Problem in end-block design of beams) 406.
- Izawa, Keisuke (Frequency-response computational aids) 116.
- Izuka, Kenzo (Blocks of group characters) 257.
- Izumi, Shin-ichi (Fourier series. III. IV.) 54.
- — — and Masako Satô (Fourier series. X.) 54; (Trigonometrical series. XVIII.) 55.
- Jackson, R. R. P. (Random queueing processes) 131.
- — — and D. G. Nickols (Queueing process $E_k/M/1$) 131.
- Jacobs, Willi (Interferenz zwischen Rumpf und Flügel) 420.
- Jacobson, N. (Structure of rings) 20; (Representations of Jordan algebras) 260.
- Jaffard, Paul (Réalisation des groupes réticulés) 255.
- Jaglom (Yaglom), A. M. (Application of function space integrals) 434.
- Jain, B. S. and Pyare Lal (Anharmonic pulsations of two-phase homogeneous model) 462.
- M. K. (Spherical bubble or gravity in non-Newtonian liquid) 203.
- Jaiswal, J. P. (Meijer transform. III.) 86.
- James, G. S. (Accuracy of weighted means and ratios) 137.
- Janne d'Othée, Henry (Lois de conservation de la physique) 455.
- Jeffreys, Bertha (Airy functions in a potential barrier problem) 445.
- Jeger, M. (Inflexionen in projektiven Zusammenhängen) 390.
- Jenkins, J. A. (Landau's theorem) 295.
- James A. (Result of Keogh) 298.
- Joga Rao, C. V. s. Rao, C. V. Joga 190.
- Jogdeo, S. S. s. A. K. Gayen 138.
- Johnson, Clarence L. (Analog computer techniques) 113.
- S. M. s. R. N. Bradt 142.
- Jones, D. S. (Calculating scattering) 432.
- Rebecca s. W. J. Eckert 112.
- Joshi, D. D. s. B. P. Adhikari 357.
- Juan, Ricardo San s. San Juan, Ricardo 48.
- Jurkat, Wolfgang (Gliederweise Integration bei trigonometrischen Reihen) 283.
- — — und Alexander Peyerimhoff (Lokalisation bei Cesàro-Summierbarkeit. II.) 283.
- Juščenko, A. A. (Längsschwingungen eines Fadens) 200.
- Juškevič, A. A. s. E. B. Dynkin 348.
- Justinijanović, Juraj (Sphärische Trigonometrie) 367.
- Kahane, Jean-Pierre et Raphaël Salem (Ensembles de Carleson) 284; (Ensembles linéaires ne portant pas de pseudomesures) 284; (Pseudomesures sur ensembles) 285.
- Kaiser, Henry F. (Caroll's analytic simple structure) 153.
- Kaizuka, Tetsu (Theorem of Landau) 303.
- Kakehashi, Tetsujiro (Interpolations of analytic functions. I. II.) 61.
- Kalicki, Jan (Equationally complete classes of equations) 246.
- — — and Dana Scott (Equational completeness of algebras) 245.
- Kalužnin (Kaloujnine), L. A. (T -Unterweiterungen) 13.

- Kaminisi, Kaisuke (Adiabatic change of completely ionized gases in stars) 462.
- Kamke, E. (Differentialgleichungen. II.) 78.
- Kampé de Fériet, J. (Mécanique statistique de la turbulence) 133.
- Kamynin, L. I. (Cauchy's problem for an infinite system of ordinary differential equations) 104; (Cauchysches Problem für unendliches System von Differentialgleichungen) 105.
- Kanno, Kôsi (Riesz summability of Fourier series) 57.
- Kantorovič, L. V. (Angenäherte Lösung von Funktionalgleichungen) 106.
- — —, V. I. Krylov und K. E. Černin (Tafeln zu Randwertaufgaben harmonischer Funktionen) 121.
- Kaplan, Thomas A. (Reciprocity theorems of Onsager and of Callen-Greene) 215.
- Karcivadze (Kartzivadze), I. N. (Singular integral operator) 84.
- Karlin, Samuel (Decision theory for Pólya type distributions. I.) 142.
- — —, S. R. N. Bradt 142.
- Kasahara, Shouro (Théorème de Gelfand) 329.
- Kasch, Friedrich (Dichte von Summenmengen. III.) 31.
- Kästner, Siegfried (Reflexionsvermögen eines Schichtsystems visko-elastischer Medien) 432.
- Kato, T. and O. Taussky (Commutators of A and A^*) 9.
- Katsura, Shigetoshi (Bose-Einstein condensation) 237.
- Kauderer, H. (Nichtlineares Elastizitätsgesetz) 195.
- Kaus, P. s. R. Finkelstein 447.
- Kawaguchi, Akitsugu (Non-linear connections. II.) 390.
- Kawakami, Yoshiro (Subharmonic functions in the unit circle) 294.
- Kawashiro, Teruaki s. Isamu Wajiki 135.
- Kawata, Tatsuo (Renewal theorem) 129.
- Kay, J. and H. E. Moses (Reflectionless transmission through dielectrics) 222.
- Kayama, Kunifusa s. Eiichi Ishiguro 454.
- Kazarinoff, Nicholas D. (Generating functions for Legendre functions) 58.
- Keller, Herbert B. s. Joel Franklin 81.
- J. B., R. M. Lewis and B. D. Seckler (Diffraction problems) 441.
- Kemeny, John G. (New approach to semantics. I. II.) 246.
- Kemp, A. W. s. C. D. Kemp 137.
- C. D. and A. W. Kemp (Hypergeometric distributions) 137.
- N. H. and W. R. Sears (Wake energy of moving cascades) 206.
- Kendall, D. G. and G. E. H. Reuter (Pathological Markov processes) 129.
- Kennedy, P. B. (Conformal mapping of bounded domains) 298.
- Keune, Friedrich (Auftriebslose Strömung um schlanke Körper) 210; (Tragflügel ohne Dicke in Schallnähe) 423.
- — — and K. Oswatitsch (Geometry of slender bodies of wings) 424.
- — —, s. K. Oswatitsch 423.
- Khamrui, S. R. (Steady rotation of a sphere in viscous liquid) 202; (Slow steady flow of viscous liquid) 416.
- Kiefer, J. and J. Wolfowitz (Maximum likelihood estimator) 147.
- — —, s. A. Dvoretzky 146.
- Kikuta, Takashi, Masato Morita and Masami Yamada (Effect of hard core on the binding energies. I.) 233.
- Kimball, Bradford F. (Bias in estimates of parameters of extreme-value distribution) 151.
- Kimura, Motoo (Testing stability of a selective polymorphism) 361.
- Toshiei s. Takashi Shibata 454.
- Kinukawa, Masakiti (Summability of Fourier series. II.) 55; (Strong summability of a Fourier power series) 56.
- Kirby, David (Insieme di elementi differenziali curvilinei. I. II.) 157.
- Kishi, Masanori (Theorem of Ugaheri) 322.
- Kitagawa, Tosio (Stochastically approximative analysis) 354.
- — — and Tsunetami Seguchi (Runs in statistical quality controls) 358.
- Kjellberg, Bo (Inequality) 278.
- Klarsfeld, S. (Lignes de force magnétiques) 216.
- Klein, Bertram (Buckling of supported plates) 197.
- Martin J. (Ehrenfest urn model) 435.
- Klingenberg, Wilhelm (Projektive Geometrien) 364.
- Klinger, M. I. (Hall effect in ionic semiconductors) 240.
- Kneser, Martin (Summenmengen in lokalkompakten Gruppen) 17.
- Koba, Z. (Velocity of Dirac electron) 446; (Remark on „Velocity of the Dirac electron“) 446.
- Kodama, Tetsuo (Commutator group of normal simple algebra) 24.
- Yukihiro (Absolute neighborhood extensor for metric spaces) 178.
- Koecher, Max (Operatoretheorie der Modulformen) 305.
- Kogan, V. und V. Galickij (Aufgabensammlung zur Quantenmechanik) 226.
- Kol'cov, A. V. (A. A. Markov) 242.
- Kolomenskij, A. A. s. A. G. Sitenko 459.
- Kolsrud, Marius (Oscillatorlike systems) 445.
- Konijn, H. S. (Estimates which minimize the least upper bound of a probability) 150.
- Konwent, Henryk (Electron-photon cascade) 454.
- Korányi, A. s. B. Sz.-Nagy 95.
- Korenblit, L. L. s. A. G. Samojlovič 240.
- Korst, H. H. (Base pressures in transonic flow) 422.
- Kortel, F. (Gürsey's conformal-invariant spinor wave equation) 448.
- Kostant, Bertram (Invariant skew-tensors) 170.
- Kostačuk, V. N. und B. P. Pučačev (Verkleinerung des Fehlers bei der Methode des schnellsten Abstiegs) 338.
- Kouyoumjan, Robert G. (Back-scattering from a loop) 220.

- Kovanicov, N. I. (Tetraeder eines Geradenkomplexes) 386.
- Kozlovskij, V. Ch. (Ionic lattices of ferroelectric crystals) 459.
- Kraft, C. and L. LeCam (Roots of the maximum likelihood equation) 148.
- Králik, D. s. G. Freud 83.
- Kramer, Vernon A. (Asymptotic inverse series) 333.
- Krarup, T. and Bj. Svegaard (Matrix multiplication by punched card equipment) 113.
- Krasnosel'skij, M. A. und S. G. Krejn (Gewöhnliche Differentialgleichungen in Banachschen Räumen) 103.
- and P. E. Sobolevskij (Sobolevsky) (Differential equations with unlimited operators) 104.
- Krasovskij, N. N. (Zweite Methode A. M. Ljapunovs) 77.
- Krejn, S. G. s. Ju. L. Daleckij 97.
- s. M. A. Krasnosel'skij 103, 104.
- Kruskal, William H. s. Herbert T. David 357.
- Krylov, V. I. s. L. V. Kantorovič 121.
- Krzyżanski, M. (Équation du type parabolique) 318.
- Kudô, A. (Testing of outlying observations) 145.
- Akio (Invariant multiple decision procedures) 142; (Confidence interval of extreme value of a sample) 151.
- Kufarev, P. P. (Extremum problems of schlicht functions) 67.
- und N. V. Semuchina (Semukhina) (Golusin's variation method) 67.
- Kuhn, Paul (Stresses in aircraft and shell structures) 408.
- Kuiper, N. H. (Groups of motions in Riemannian n -spaces) 171.
- and K. Yano (Algebraic theorems) 171.
- Kulczycki, Stefan (Nichteuclidische Geometrie) 366.
- Kumari, Sulaxana (Order of Cesàro means) 282.
- Kummer, H. (Zerlegungsgleichheit von Parallelotopen) 38.
- Kuniyoshi, Hideo (Subfields of rational function fields) 261.
- Kuo, Y. H. (Effects of Prandtl number on high-speed viscous flows) 211.
- Kuper, C. G. (Bohm-Pines theory) 239.
- Kuramochi, Zenjiro (Measure of linear sets) 300.
- Kušcer, I. (Milne's problem) 436.
- Kusunoki, Yukio (Riemann surfaces characterized by the extremal length) 300; (Riemann's period relations) 300.
- Kyner, Walter T. (Fixed point theorem) 335.
- Ladyženskaja, O. A. s. M. I. Višik 99.
- Ladyženskij, L. A. (Nichtlineare Gleichungen) 104.
- Lafleur, Charles (Impédance d'un circuit) 217.
- Lagally, Max (Vektorrechnung) 162.
- Lah, Ivo (Ausgleichung empirischer Summenfunktionen) 362.
- Laha, R. G. (Stochastic independence of two polynomial statistics) 356.
- Lal, Pyare, s. B. S. Jain 462.
- Lambek, J. (Initial segments of positive semigroups) 12.
- Landsberg, Max (Filter mit endlichem Index) 271.
- Landweber, L. and C. S. Yih (Forces, moments, and added masses for Rankine bodies) 419.
- Lane, N. D. (Differentiable point in conformal n -space) 173.
- Lang, H. A. (Plane-stress and plane-strain problems) 191.
- Serge (Algebraic groups over finite fields) 379.
- Lange, G. N. and E. C. Deland (Shape of nappe of a waterfall) 455.
- Langer, Rudolph E. (Ordinary linear differential equations of third order) 309.
- Lattanzi, Filippo (Momenti del peso di un asta) 404.
- Laugwitz, Detlef and Edgar R. Lorch (Riemann metrics) 169.
- Laurenti, Fernando (Superficie di sesto ordine) 372.
- Laurmann, J. A. s. A. Robinson 419.
- Laville, Gaston (Produit de composition) 111.
- Lawley, D. N. (Approximating to distribution of likelihood ratio criteria) 136.
- Lax, Anneli, (Cauchy's problem for partial differential equations) 317.
- Leavitt, W. G. (Modules without invariant basis number) 24.
- William G. (Modules over rings of words) 24.
- LeBlanc, L. and G. E. Fox (Extension of measure) 272.
- LeCam, L. s. C. Kraft 148.
- Lederle, Trudpert (Sternephemeriden) 344.
- Lee, E. H. (Wave propagation in anelastic materials) 414.
- — and A. J. Wang (Wave propagation in an elastic rod) 200.
- Kiuck s. Alex E. S. Green 234.
- T. D. s. E. M. Henley 451.
- Lehman, F. G. s. F. B. Stulen 108.
- Lehmer, D. H. (Riemann zeta-function) 64.
- Emma (Location of Gauss sums) 30.
- Lekkerkerker, C. G. (Minkowski-Hlawka theorem) 33; (Satz von Minkowski-Hlawka) 33.
- Cornelis Gerrit (Questione di approssimazione diofantea. I. II.) 33.
- Lennes, G. et O. Rozet (Congruences W) 385.
- Lenz, Hanfried (Bedeckung ebener Punktmenge) 175; (Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen) 175.
- Leonhard, A. (Transient response from frequency response) 117.
- Leont'ev, A. F. (Sequence of Dirichlet polynomials) 293.
- Levi, Beppo (Singular Punkte und Mannigfaltigkeiten auf Mannigfaltigkeiten. I. II.) 158.
- Howard (Algebra) 34.
- Levickij, V. S. s. N. F. Četveruchin 403.
- Levin, V. I. (Methoden der mathematischen Physik) 36.
- Levinger, J. S. s. W. B. Payne 447.
- Levinov, A. M. s. B. A. Rozenfel'd 371.
- Levit, R. J. (Minimum solution of diophantine equation) 27.

- Levitan, B. M. (Spektraltheorie selbstadjungierter Differentialoperatoren) 320; (Entwicklung nach den Eigenfunktionen) 321; (Entwicklung nach Eigenfunktionen einer selbstadjungierten Differentialgleichung) 321.
- Levy, Paul (Processus semi-markoviens) 347.
- Lévy, Paul (Manuscript de W. Doeblin) 354.
- Lewis, B., R. N. Pease and H. S. Taylor (edited by) (Combustion processes) 417.
- D. J. (Ideals and polynomial functions) 26.
- M. B. and A. J. F. Siegert (Condensation theory of Yang and Lee) 455.
- R. M. s. J. B. Keller 441.
- Li, Ta (Eigenvalue problem) 339.
- Lichnerowicz, André (Espaces homogènes riemanniens et réductibilité) 387; (Réductibilité des espaces homogènes riemanniens) 387; (Automorphismes de variétés kähleriennes) 388.
- Lidskij, V. B. (Eigen- and associated functions of self-adjoint differential operator) 308.
- Lighthill, M. J. (Image system of a vortex element) 415.
- Lindley, D. V. (Information provided by an experiment) 141.
- Liniger, W. s. Ch. Blanc 337.
- Linnik, Ju. V. (Asymptotic geometry of Gaussian genera) 32; (Analogues of ergodic theorems) 32.
- Linsman, M. (Code dans la construction des machines mathématiques décimales) 113; (Centres instantanés de rotation) 405.
- Lippmann, B. A. (Brillouin-Wigner perturbation method) 445.
- Lipschutz, Miriam (Bounds for sums of random variables) 125.
- Lisserre, Guido O. G. (Statistiken g und d) 139.
- Livingston, A. E. and Lee Lorch (Zeros of sinlike integrals) 46.
- Ljapin, E. S. (Umkehrbarkeit von Elementen) 253.
- Ljaščenko (Liashchenko), N. Ja. (Analogue of Floquet theorem) 73.
- Ljusternik, L. A. (Aufgaben der linearen Algebra) 9; (Differenzenanalogon der Greenschen Funktion) 81; (Nicht-lineare Funktionalanalysis) 103.
- — — s. M. I. Višik 81.
- Llosá, Ricardo San Juan s. San Juan Llosá, Ricardo 155.
- Locher-Ernst, L. (Kongruente Kugeln) 39.
- Lohwater, Arthur J. s. Edward F. Collingwood 67.
- Łopuszański, Jan (Electron-photon cascade) 454.
- Lorch, Edgar R. (Integrazione e funzionali lineari) 88.
- — — s. Detlef Laugwitz 169.
- Lee s. A. E. Livingston 46.
- Lorent, H. (Tangentes et normales à coniques conjuguées) 372; (Courbes associées à courbes données) 372.
- Łoś, J., A. Mostowski and H. Rasiowa (Herbrand's theorem) 7.
- Jerzy s. Stefan Mazurkiewicz 346.
- Lothe, J. s. J. Holtsmark 431.
- Lotkin, Mark (Characteristic values of arbitrary matrices) 338.
- Lovera, Piera (Diseguaglianze che si presentano nella matematica attuariale) 154.
- Löwdin, Per-Olov (Cohesive properties of solids) 238.
- Lübcke, Ernst s. Gerhard Hübner 404.
- Luke, Yudell L. and Henry E. Fettes (Schwarz function) 111.
- Lumley, J. s. S. Corrsin 210.
- Lutz, Otto (Vorgänge in Brennkammern und Strahltriebwerken) 417.
- Luxemburg, W. A. J. (σ -finite measures) 272.
- — — — s. Israel Halperin 87.
- Ma, Min-Yuan (Symboles de Hankel) 59.
- S. T. (Contact and core interactions) 450.
- Mabboux, Claude s. Geneviève Mabboux-Tariel 353.
- Mabboux-Tariel, Geneviève et Claude Mabboux (Spectre énergétique de certaines fonctions aléatoires) 353.
- Macbeath, A. M. (Criterion for differentiability) 46.
- Machida, Shigeru s. Kazuhiko Inoue 449.
- Mack, C. (Clumps formed when convex laminae are placed at random) 133.
- MacKenzie, R. E. and G. Whaples (Artin-Schreier equations) 264.
- Mackie, A. G. (Generalized radially symmetric wave equation) 417.
- Macmillan, R. H. (Frequency-response method) 116.
- Madelung, Otfried (Wärmeleitfähigkeit isotroper Halbleiter) 240.
- Maeda, Shûichirô (Projections in rings of operators) 332.
- Majumdar, Tapas (Choice and revealed preference) 155.
- Mal'cev, A. I. (Subdirect unions of models); 251; (Quasiprimitive classes of abstract algebras) 258.
- Malkus, W. V. R. (Turbulent shear flow) 208.
- Malliavin, Paul (Théorèmes de Duffin-Schaeffer) 295.
- Mambriani, Antonio („Specie“ di un'equazione differenziale) 313.
- Mandelstam, S. (Bethe-Salpeter equation for scattering) 228.
- Manfredi, Bianca (Genesi dei pluriderivatori) 79; (Problemi di conduzione del calore) 109.
- Maravall Casesnoves, Dario (Dynamik der Systeme mit veränderlicher Masse) 223; (Differential- und Integrodifferentialgleichungen) 326.
- Marchasev (Markhacev), G. (Boundary problem for $\frac{\partial}{\partial x} \Delta u = 0$) 319.
- Marchionna Tibiletti, Cesarina (Rappresentazione topologica delle curve) 161.
- Markchuk, G. I. (Atomic power station reactor) 235.
- Marcus, M. and J. L. McGregor (Extremal properties of Hermitian matrices) 253.
- Margulies, G. (Kinematically preferred co-ordinate systems) 403.
- Marin, Joseph s. J. E. Griffith 198.
- Markosjan, S. A. (Existenz gewisser Grenzzyklen) 77.
- Markušević, A. I. s. I. I. Privvalov 65.
- Marre, Pierre Huard de la (Débits d'infiltration dans les barrages) 213.

- Martin, A. I. (Spectrum of a partial differential equation) 82.
- André (Inégalités causales de Wigner) 227.
- E. L. (Sistemi binari di massa variabile) 460.
- Martinelli, Enzo (Curvatura delle superficie caratteristiche) 388.
- Massaro, Gilianna (Valutazione asintotica dei polinomi di Legendre) 59.
- Massera, J. L. (Grundbegriffe der projektiven Geometrie) 368.
- Massey, H. S. W. (Scattering of slow electrons) 236.
- Masuda, Katsuhiko (Arithmetic on a Galois structure) 261.
- Masur, E. F. (Upper bound theorem on loads of buckled trusses) 411.
- Mathot, V. s. A. Bellemans 236.
- Matsumoto, Kishi (Lebesgue's constant of (R, λ, k) summation) 280.
- Matshushita, Shin-ichi (Théorème de Krein-Milman. II. III.) 322.
- Matthies, Karl (Gleichmäßige Stetigkeit gewisser Differentialgleichungssysteme) 72.
- Matusita, Kameo (Decision rule) 149.
- Mauersberger, Peter („Neumannsche Methode“) 52.
- Mawardi, O. K. (Aerothermoacoustics) 211.
- Mayer-Kalkschmidt, Jörg (Singularitäten gewisser Potenzreihen) 292.
- Mayers, J. s. Bernard Budiansky 194.
- Mazurkiewicz, Stefan (Wahrscheinlichkeitsrechnung) 346.
- McAuley, Louis F. (Decomposition of continua into aposyndetic continua) 396.
- McGregor, J. L. s. M. Marcus 253.
- McManus, M. (Hatanaka's note on consolidation) 363.
- McMillin, Kenneth M. (Abel summability) 286.
- McWeeny, R. (Density matrix in self-consistent field theory. II. III.) 445.
- Meetz, K. (Abklingen der Energiespektren in Turbulenz) 209; (Abklingen der Geschwindigkeits- und Druckkorrelationen in Turbulenz) 209.
- Mehra, A. N. (Meijer transform of two variables) 327.
- Meijer, C. S. (G -function. X. XI.) 289.
- Paul H. E. (Minimum entropy production theorem) 215.
- Meksyn, D. (Boundary-layer equations) 312.
- Melvin, H. M. (Concavity of resistance functions) 217.
- Menger, Karl (What are x and y ?) 1; (Random variables) 122.
- Menn, Christian (Kreisringträger) 190.
- Message, P. J. (Figure of Jupiter) 460.
- Mergeljan, S. N. (Bernstein's approximation problem) 281.
- Meyer, H. J. G. (Lattice vibrations in polar crystals. I.) 240.
- Michael, Ernest (Continuous selections. II.) 177.
- Michlin (Mikhlin), S. G. (Multipliers of Fourier integrals) 84.
- Mickevič (Mitskevich), N. V. (Scalar field of a stationary nucleon) 229.
- Migdal, A. B. (Bremsstrahlung and pair production) 231.
- Mihăilescu, Tiberiu (Repère normal projectif d'une surface) 385.
- Mihoc, George (Ausdehnungen des Poissonschen Gesetzes) 128.
- Gh. (Théorie des réserves mathématiques) 362.
- Mikhail, M. N. (q -values of random meromorphic function) 66.
- Mikolás, Miklós (Mellinsche Transformation und Orthogonalität bei $\zeta(s, u)$) 64.
- Miles jr., E. P. and Ernest Williams (Cauchy problem for linear partial differential equations) 315.
- Miller, Donald G. (Thermodynamic theory of irreversible processes. III.) 215.
- G. F. (Slowly convergent Fourier series in fluid motion problem) 111.
- Kenneth S. (Engineering mathematics) 35.
- M. (Analytische Geometrie des Raumes) 367.
- Minami, Shigeo s. Daisuke Itô 232.
- Mindlin, R. D., A. Schacknow and H. Deresiewicz (Flexural vibrations of rectangular plates) 200.
- Mineo, Corradino (Rappresentazioni cartografiche) 383; (Ancora sulla geodesia intrinseca) 383.
- Massimo (Curvatura geodetica d'una curva) 383.
- Mirsky, I. s. George Herrmann 192.
- L. (Normal matrices) 9; (Spread of a matrix) 9; (Norms of adjugate and inverse matrices) 253.
- Mishoe, Luna I. and Gloria C. Ford (Limit of coefficients of the eigenfunction series) 286.
- Mishra, R. S. (Darboux curves) 164.
- — s. Kamla Devi Singh 170, 171.
- Mişicu, M. (Équilibre des milieux continus dans l'espace. I. II.) 416; (Dreidimensionale Probleme der Mechanik deformierbarer Körper) 416.
- Mitra, D. N. (Elastic-plastic rotation of a circular cylinder) 411.
- Mitrinović, Dragoslav S. (Polynomes de Legendre) 287.
- Mitrinovitch, Dragoslav S. (Formules relatives aux polynomes de Legendre) 59; (Compléments au traité de Kamke) 70; (Procédé fournissant des équations fonctionnelles) 335.
- Miyadera, Isao (Laplace transformation of vector-valued functions) 86.
- Miyanağa, Yasue s. Kiyoshi İseki 19.
- Mizuno, Yukio s. Eiichi Ishiguro 454.
- Mocanu, P. (Espaces partiellement projectifs) 389.
- Monna, A. F. (Espaces normés non-archimédiens. I. II.) 87.
- Montague, Richard and Leon Henkin („Formal deduction“) 7.
- Montel, Paul (Géométrie finie) 390.
- Montgomerie, G. A. (Digital calculating machines) 343.
- Montgomery, D., H. Samelson and C. T. Yang (Groups on E^n with $(n-2)$ -dimensional orbits) 17.
- Deane (Topological transformation groups) 258.

- Montroll, Elliott W. and Renfrey B. Potts (Effect of defects on lattice vibrations) 456.
- Moore, P. G. (Truncated Poisson distribution) 153; (Forms of series) 356.
- Moran, S. (Associative operations on groups. I.) 12.
- Mori, Tutosi (Group structure of Boolean lattices) 332.
- Morimoto, Hiroshi (Singular perturbation of linear system) 311.
- Morimura, Hidenori (Renewal theorem) 130.
- Morita Kiiti (Images of an open interval) 178.
- — and Sitiro Hanai (Closed mappings and metric spaces) 178.
- Masato s. Takashi Kikuta 233.
- Morrison, D. R. (Computing inverse functions) 107.
- Philip s. Hans A. Bethe 233.
- Morse, Marston and William Transue (C-bimeasures) 273; (Representation of C-bimeasure) 273.
- Moses, H. E. s. J. Kay 222.
- Mostow, G. D. (Fully reducible subgroups) 16.
- Mostowski, A. s. A. Ehrenfeucht 7.
- — s. J. Łoś 7.
- Mulholland, H. P. (Extremum problems for polynomials on the unit circle) 52.
- Muller, Wilhelm Hendricus (Electronic computer enters an airplane-factory) 344.
- Münster, A. (Statistische Thermodynamik) 434.
- Murakami, Shingo (Classes of sphere bundles) 399.
- Murty, G. S. (Relativistic Thomas-Fermi atom) 236.
- V. N. (Bhattacharyya bounds) 138.
- Mushiaki, Yasuto (Backscattering for arbitrary angles of incidence of a wave on a spheroid) 220.
- Musti, Romolo e Ettore Buttafuoco (Subreticoli distributivi dei reticoli modulari) 259.
- Mycielski, Jan (Identités de la théorie analytique des nombres) 30.
- Myrberg, P. J. (Automorphe Funktionen) 304.
- Mysovskich, I. P. (Eigenwert bei symmetrischem Kern) 323.
- Nagai, Hiroshi (Philosophy of science in Japan) 242.
- Nagami, Keiō (Types of polyhedra) 181.
- Nagata, Jun-iti (Dimension theory) 180.
- Nagumo, Mitio (Linear hyperbolic system of partial differential equations) 315.
- Najmark, M. A. (Normierte Ringe) 89; (Spektralanalyse nicht-selbstadjungierter Operatoren) 98.
- Nakamori, Kanzi (Anfangswertproblem für nicht-lineares hyperbolisches System) 314.
- Nakamura, Masahiro and Hisaharu Umegaki (Proposition of von Neumann) 333.
- Nakayama, Tadasi (Fundamental exact sequences) 14.
- Naor, P. (Machine interference) 364.
- Nardini, Renato (Fronti d'onda nella magneto-idrodinamica) 442.
- Naumann, Herbert (Konvexe Polytope) 392.
- Naumovič, N. V. (Geometrische Örter) 366.
- Neeteson, P. A. (Bistable multivibrator operation) 439.
- Nef, Walter (Monotone Linearformen) 88; (Lineare Formen) 88.
- Neiswanger, William Addison (Statistical methods) 134.
- Neugebauer, Christoph J. (Cyclic additivity theorem of a functional. I.) 179; (Cyclic additivity theorem of Lebesgue area. II.) 275; (Cyclic additivity theorem of surface integral. III.) 275.
- Neumann, B. H. (Conjecture of Hanna Neumann) 13.
- Nevanlinna, R. (Déformation dans la représentation conforme) 67.
- Rolf (Gauß and non-euclidean geometry) 241.
- Newman, Morris (Coefficients of modular forms) 267, 268; (Coefficients of powers of $\eta(\tau)$) 268.
- Newton, R. G. s. T. Fulton 228.
- Neyman, Jerzy (Article by Sir Ronald Fisher) 141.
- Nickel, K. (Dreidimensionale, laminare und kompressible Grenzsichten) 421; (Laminare Grenzsicht) 421.
- Nickols, D. G. s. R. R. P. Jackson 131.
- Nikolenko (Nicolenco), L. D. (For nonoscillatory solutions of $y'' + f(x)y = 0$) 75.
- Nikol'skij, S. M. (Fortsetzung von Funktionen mehrerer Veränderlicher) 276; (Kompaktheit der Klassen $H_p(r_1, \dots, r_n)$) 277; (Rand-eigenschaften von Funktionen. I.) 277.
- (Nikolsky), S. M. (Functions in regions with corners) 277.
- Nocilla, Silvio (Profili alari transonici) 425; (Equazione di Tomotika e Tamada) 425; (Campi di moto transonici attorno a profili alari) 427; (Transsonische Strömung um Flügelprofile) 428.
- Nogami, Yukihiisa and Hiroichi Hasegawa (Intermediate coupling meson theory. II.) 449.
- Nolfi, Padrot (Idee und Wahrscheinlichkeit) 242.
- Nollet, Louis (Genres pseudocanoniques des surfaces algébriques régulières) 380.
- Nordbotten, Svein (Allocation in stratified sampling) 154.
- Norman, R. Z. s. G. W. Ford 186.
- Nowacki, Witold (Assemblage stresses in plates) 408.
- Nutkins, M. A. E. (Density of electronic states in cubic crystals) 456.
- Nuttall, H. s. F. A. Gaydon 199.
- Obata, Morio (Affine transformations in an almost complex manifold) 389.
- Odqvist, Folke K. G. s. Walldi Weibull 197.
- Ôhara, Akiko s. Noboru Itô 256.
- Ohkuma, Tadashi (Ensembles ordonnés linéairement) 271.
- Ohtsuka, Makoto (Espace complet de mesures positives) 321.
- Oikawa, Kôtarô („Conformal mappings of a Riemann surface“) 68.
- Okada, Shôzô (Energy eigenvalues of an electron) 239.
- Oldenbourg, R. C. and Hans Sartorius (Optimum adjustment of control loops) 117.
- Oldenburger, Rufus (edited by) (Frequency response) 115.
- Oldroyd, J. G. (Small viscous inclusions) 406.
- — — and R. H. Thomas (Motion of a cylinder in rotating liquid) 202.

- Olds, Edwin G. s. Norman C. Severo 144.
- Olszak, Wacław (Plasticity of non-homogeneous bodies) 412.
- Onat, E. T. and R. M. Haythornthwaite (Loadcarrying capacity of plates) 409.
- Onicescu, O. (Système de Cauchy pour l'intérieur d'une courbe de Jordan) 316; (Sommes de variables aléatoires d'un processus Markov fini) 350.
- Orey, Steven (Relative consistency of set theory) 252.
- Orgeval, B. d' (Cône de Véro-nèse) 160.
- Orlov, S. A. (Resolvent of a boundary problem) 308; (Resolvents and spectral functions of differential operators) 309.
- Osborn, Howard (Continuous programs) 156.
- Ostrowski, Alexander (Verbindbarkeit von Linien- und Krümmungselementen) 164.
- Oswatitsch, K. (Potentialwirbel-Gitter) 210; (Wirbel-freie Überschallfelder) 429.
- — and F. Keune (Flow around bodies of revolution at Mach number 1) 423.
- — s. F. Keune 424.
- Othée, Henry Janne d' s. Janne d'Othée, Henry 455.
- Overhauser, Albert W. (Multiplet structure of excitons in ionic crystals) 458.
- Ovsjannikov (Ovsiannikov), L. V. (Hydrodynamic equations) 417; (Renormalization group equations) 448.
- Owen, Donald B. (Tables for bivariate normal probabilities) 134.
- Ozawa, Mitsuru (Grötzsch's extremal affine mapping) 69; (Szegő kernel function) 297; (Riemann surfaces) 301.
- Özkan, Asim (Surfaces W à lignes de courbure planes) 164.
- Pacelli, Mauro (Due corpi elastici a contatto) 414.
- Padmavally, K. s. T. Vijayara-ghavan 63.
- Paechter, G. F. (Groups $\pi_r(V_{n,m})$. I.) 184.
- Pafomov, V. E. (Čerenkov radiation) 459.
- Pai, S. I. (Laminar jet) 421.
- Palamà, Giuseppe (Equazione $x_1^2 + \dots + x_n^2 + y^2 = (n+1)x_1 \dots x_n$) 28; (Polinomi interi in x di grado n dispari) 266; (Polinomi che generalizzano quelli di Laguerre) 287.
- Palmer, D. S. (Random functions) 347.
- Pando, M. Velasco de s. Velasco de Pando, M. 413.
- Papademetrios, I. G. (Séries sommables) 280.
- Papić, Pavle (Ensembles ordonnés et les espaces pseudo-distanciés) 176.
- Paria, Gunadhar (Stress distribution in a plate) 189.
- Parodi, Maurice s. Léon Bril-louin 222.
- Parreau, Michel (Fonction caractéristique d'une application conforme) 67.
- Parsons, D. H. (Singular systems of two differential equations) 79.
- Pârvu, A. (Courbure des poutres) 407; (Déformations des barrages) 410.
- Parvulescu, N. S. (Instability of drill pipe strings) 411.
- Passelecq, J. s. P. Glansdorff 435.
- Paszkowski, S. (Approximation with nodes) 281.
- Patraulea, N. N. (Mouvement supersonique autour d'une aile) 431.
- Patterson, G. N. (Molecular flow of gases) 455.
- Pauc, Chr. (Dérivation de fonctions d'ensemble) 275.
- Pavel, Monica (Rétractions linéaires) 329.
- Payne, L. E. (Symmetric problems in elasticity) 191.
- — —, G. Pólya and H. F. Weinberger (Consecutive eigenvalues) 82.
- W. B. and J. S. Levinger (Relativistic radiative transitions) 447.
- Pchakadze, Š. S. (Fortsetzbarkeit eines Maßes) 40.
- Pearcey, T. (compiled by) (Table of Fresnel integral) 122.
- Pearson, Carl E. s. Bernard Budiansky 405, 411.
- Pease, Jane and Robert L. Pease (Intrinsic moments of elementary particles) 232.
- R. N. s. B. Lewis 417.
- Robert L. s. Jane Pease 232.
- Pedersen, Olaf (Nicole Oresme) 3.
- Pekar, S. I. s. V. N. Bajer 450.
- Pélegrin, M. J. (Servo-mechanisms and regulators) 119.
- Peretti, Jean (Vibrations des atomes d'un cristal) 237.
- Persidskij, K. P. (Unendliche Differentialgleichungssysteme) 105.
- Petersson, Hans (Zerlegung des Kreisteilungspolynoms) 262.
- Petre, A. (Flambage des barres droites par choc axial) 415.
- Petrov, A. A. (Statistical hypotheses) 144.
- V. V. (Densities of sums of random variables) 126.
- Peyerimhoff, Alexander s. Wolfgang Jurkat 283.
- Pezzoli, Giannantonio (Propagazione delle onde nei canali) 432.
- Pfirsch, Dieter (Theorem von Bloch) 238.
- Pfluger, A. (Riemannsche Periodenrelation) 68.
- Albert (Alternierendes Verfahren auf Riemannschen Flächen) 68.
- — s. Joseph Hersch 193.
- Phillips, A. (Plasticity) 197.
- Picasso, E. (Particolari corre-lazioni) 165.
- Piccard, Sophie (Groupes d'ordre fini) 13.
- Picht, Johannes (Reflexionen am Paraboloidspiegel. II.) 222.
- Pickett, Gerald, Sharif Bada-ruddin and S. C. Ganguli (Semi infinite pavement slab) 407.
- Pillai, K. C. S. (Some results useful in multivariate analysis) 137.
- Piloty, Robert (Problem der Datenverarbeitung) 343.
- Pines, David (Electron inter-action in solids) 457.
- Samuel (Iteration in semi-definite eigenvalue problems) 253.
- Pipes, Louis A. (Periodic time-varying systems) 403.
- Pisot, Ch. (Famille d'entiers algébriques) 263.
- Pjateckij-Šapiro (Piatetsky-Shapiro), I. I. (Modular groups) 305.
- Plainevaux, J. E. (Valeur moyenne d'une fonction) 342.
- Plans, Antonio (Hyperquadriken im projektiven Raum) 96.
- Pleijel, Arne (Isoperimetrische Ungleichung) 175.

- Plotkin, B. I. (Gruppen ohne Torsion) 254.
- Pokrovskij, V. L. (Optimal line antennas) 219.
- Pólya, G. s. L. E. Payne 82.
- Pomerančuk, I. Ja. s. A. D. Galanin 232.
- Pompilj, Giuseppe (Piano degli esperimenti) 141.
- Poots, G. s. S. C. R. Dennis 318.
- Popoff, A. s. A.-A. Iliouchine 412.
- Popović, Božidar (Bahnelemente eines kleinen Planeten) 460.
- Poßner, Lothar (Spitzenkreise) 163; (Analoge Rechenmethoden) 407; (Einspannmomente bei Wellen) 407.
- Post, E. J. (Finite deformations. II.) 196.
- Potts, Renfrey B. s. Elliott W. Montroll 456.
- Price, P. J. (Transport effects in semiconductors) 458.
- Prigogine, I. et R. Balescu (Phénomènes cycliques) 434. — s. R. Brout 214.
- Privalov, I. I. (Randeigenschaften analytischer Funktionen) 65.
- Prjanišnikova, Z. I. s. N. F. Četveruchin 403.
- Proceedings of the second annual computer applications symposium 113.
- Protasov, V. I. (Linear differential equation) 73.
- Pugačev, B. P. s. V. N. Koštarčuk 338.
- Pylarinos, O. (Codification de la géométrie) 364.
- Quine, W. V. (Unification of universes) 251.
- R.-Salinas, Baltasar (Asymptotische Reihen) 291.
- Rahman, Q. I. (Means of entire functions) 66.
- Raj, Des (Estimators in sampling with varying probabilities) 150.
- Rajagopal, C. T. (Oscillation of Riesz, Euler, and Ingham means) 279.
- Ralston, Anthony (Buckling of a hyperbolic paraboloidal shell) 409.
- Ram, Siya (Moments of hypergeometric distribution) 137.
- Ramachandran, K. V. (Tukey test for the equality of means) 143.
- Ramakanth, J. (Deformation of aelotropic and composite bodies. II.) 196.
- Ramanathan, K. G. (Units of fixed points) 25; (Quadratic forms over division algebras) 264.
- Ramanujan, M. S. (Product of quasi-Hausdorff and Abel transforms) 279.
- Rannie, W. Duncan s. Carl O. Holmquist 205.
- Rao, C. V. Joga (Plates subjected to loads) 190.
- Raševskij, P. K. (Lineare halbeinfache Gruppe als Invarianzgruppe eines Tensors) 162.
- Rasiowa, H. s. J. Łoś 7.
- Ray, W. D. (Sequential analysis) 358.
- Reade, Maxwell O. (Theorem of F. and M. Riesz) 383.
- Reina, I. s. L. Fonda 232.
- Reiner, Irving and J. D. Swift (Congruence subgroups of matrix groups) 16.
- M. (Second order effects in infinitesimal elasticity) 195.
- Markus s. Meir Hanin 188.
- Reißig, Rolf (Differentialgleichungen 2. Ordnung mit einem Störungsglied) 76; (Schwinger mit Selbststeuerung) 76; (Selbsterregung eines Schwingers) 76; (Beschränktheit der Lösungen einer nichtlinearen Differentialgleichung) 76; (Nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung. III. IV.) 76.
- Rembs, E. (Bieungsproblem mit negativer Charakteristik) 384.
- Remmert, Reinhold s. Hans Grauert 303.
- Remorov, P. N. ($a^p + Db^p = c^p$) 28.
- Rényi, A. (Conditional probability spaces) 123.
- Reuter, G. E. H. s. D. G. Kendall 129.
- Révész, P. s. A. Heppes 391.
- Rheinboldt, W. (Äußere Randbedingungen bei den Grenzschiehtgleichungen) 207.
- Ribeiro, Hugo (Universal completeness) 251.
- Ribeiro de Albuquerque, José (Zusammenhangseigenschaften) 395.
- Ribenboim, P. (Anneaux premiers) 27; (Théorème des zéros de Hilbert) 261.
- Ricci, Giovanni (Allure de la suite $\frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n}$) 30.
- Richard, Ubaldo (Problemi asintotici per le equazioni differenziali lineari) 74; ($[py']' - qy = 0$) 74.
- Richardson, Moses (Finite projective games) 354.
- Richert, Hans-Egon (Summierbarkeit Dirichletscher Reihen) 269.
- Ridder, J. (Beschränkt- und total-additives Maß. I. II.) 272.
- Rimer, D. (Modèles mathématiques) 241.
- Risberg, Vidar (Scattering phase shifts) 227.
- Rjaben'kij, V. S. und A. F. Filippov (Stabilität von Differenzengleichungen) 339.
- Robbins, Herbert (Sequential decision problem) 134.
- Robertson, Alex P. and Wendy Robertson (Closed graph theorem) 87.
- Wendy s. Alex P. Robertson 87.
- Robinson, A. and J. A. Laurmann (Wing theory) 419.
- Raphael M. (Recursively enumerable sets) 252.
- Rocha, Ernâni (Versicherungsmathematische Größen bei mehrfachen Ketten) 362, 363.
- Rodriguez Sanjuán, A. (Reduktion elliptischer Integrale) 289.
- Romberg, W. s. J. Holtsmark 431.
- Rooney, P. G. (Fractional integrals) 328.
- Rooy, D. J. van (Analytische Geometrie I) 367.
- Rosati, Luigi Antonio (Gruppi ogni sottogruppo ciclico dei quali è caratteristico) 13; (Punti di una superficie cubica) 381.
- Rose, Alan (Formalisation du calcul propositionnel implicatif) 249.
- Rosenblatt, Murray (Nonparametric estimates of a density function) 146.
- Rosenbloom, P. C. (Method of steepest descent) 337.
- Rosenblum, Marvin (Operator equation $BX - XA = Q$) 330.
- Rosenlicht, Maxwell (Basic theorems on algebraic groups) 376; (Group varie-

- ties and differential forms) 377.
- Rosser, J. Barkley (Zermelo's set theory) 251.
- Roth, L. (Irregular threefolds) 160.
- Laura M. s. Louis Gold 240.
- Leonard (Sistemi canonici ed anticanonici) 375.
- Rott, Nicholas and William E. Smith (Laminar boundary-layer) 420.
- Roy, S. K. (Biharmonic analysis of thermal stresses) 195.
- N. (Simultaneous confidence interval estimation) 150.
- Rozenfel'd, B. A. und A. M. Levinov (Nichteuklidische Geometrie) 371.
- Rozet, O. s. G. Lennes 385.
- T. A. (Zylinderfunktionen) 59.
- Rubin, Herman s. J. B. Isbell 38.
- Rudin, Walter (Subalgebras of spaces of continuous functions) 91; (Continuous analytic functions) 297; (Homogeneity problems of Čech compactifications) 396.
- Rudra, A. (Method of discrimination in time series analysis. II.) 153.
- Ryžkov, V. V. (Deformation of surfaces) 165.
- Šabat, B. V. (Analogon des Riemannschen Satzes) 70.
- Sagawa, Takasi (Electronic states in crystal lattice) 238.
- Šaginjan, A. L. (Schlichte Funktionen) 298.
- Šaichin, A. (Asymptotes d'une courbe plane) 372.
- Saitô, Kin-ichirô (Maximum-likelihood estimate) 148.
- Sakaguchi, Kôichi (Bloch's theorem) 303.
- Sakamoto, Michiko s. Eiichi Ishiguro 454.
- Sakurai, Akira (Spherical shock waves in stars) 460.
- Salem, Raphaël s. Jean-Pierre Kahane 284, 285.
- Salinas, Baltasar R.- s. R. Salinas, Baltasar 291.
- Salmon, J. (Plasmas en régime transitoire) 214.
- Samelson, H. s. D. Montgomery 17.
- Samojlovič (Samoilowitsch), A. G. und L. L. Korenblit (Elektronengas in Halbleitern) 240.
- San Juan, Ricardo (Problème de Kogbetliantz) 48.
- Llosá, Ricardo (Simplex-Methode der linearen Programmierung. I.) 155.
- Sanjuán, Antonio Rodriguez s. Rodriguez Sanjuán, Antonio 289.
- Santaló, L. A. (Mesure des espaces linéaires) 394.
- Santhamma, V. (Electronic repulsion to the energy of molecular states) 455.
- Sargan, John D. (Mr. Blyth's article) 363.
- Sartorius, Hans s. R. C. Oldenbourg 117.
- Satô, Masako (Fourier series. II.) 54.
- s. Shin-ichi Izumi 54, 55.
- Sauer, Robert (Theoretische Gasdynamik) 429.
- Savage, I. Richard (Rank order statistics) 139.
- Leonard J. s. R. R. Bahadur 143.
- Savelli, Michel s. André Blanc-Lapierre 353, 443.
- Sawashima, Ikuko (Integrals of vector-valued functions) 89.
- Sawicki, J. s. W. Czyż 453.
- Sawyer, D. B. (Translated sets) 33.
- Schacknow, A. s. R. D. Mindlin 200.
- Schaefer, Helmut (Singuläre Integralgleichungen) 325.
- Schäffer, Juan Jorge (Parameterabhängigkeit der Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen) 310.
- Schiek, Helmut (Darstellungen der Gruppen mit quadratfreier Ordnungszahl) 15.
- Schinkel, André (Nombres $3/n$ et $4/n$) 267.
- Schmidt, Adam (Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten) 73.
- Jürgen (Dedekind-MacNeillesche Hülle) 38.
- Scholz, N. (Kennlinie eines Verdichters) 206.
- Schoonmaker, N. James (Inclusion relations among methods of summability) 47.
- Schopf, Andreas s. Joseph Hersch 193.
- Schröder, Hans Joachim (Dreidimensionale Gitterströmungen) 204.
- Johann (Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstands begriff) 335; (Funktionalanalytische Methoden zur numerischen Behandlung von Gleichungen) 336; (Fehlerabschätzungen für Iterationsverfahren) 336.
- Schuler, M. (Selbsttätige Regler) 114.
- Schützer, Walter (Bohm-Pines theory of plasma) 239.
- Schwartz, Marie-Hélène (Classes de Chern des quadriques complexes) 185.
- Schwarz, Hans-Rudolf (Stabilitätsfrage bei Matrizen-Eigenwertproblemen) 339.
- Schwinger, Julian (Dynamical theory of K mesons) 450.
- Scoins, H. I. s. J. Eve 342.
- Scott, Dana (Equationally complete extensions) 246.
- s. Jan Kalicki 245.
- Sears, W. R. s. N. H. Kemp 206.
- Seckler, B. D. s. J. B. Keller 441.
- Sedney, R. (Geometrical optics of angular stratified media) 221.
- Seeger, A. (Kristallplastizität) 237.
- Alfred (Variational principles for conduction phenomena) 240.
- Segal, I. E. (Tensor algebras over Hilbert spaces. II.) 94.
- Segre, Beniamino (Forme differenziali. II.) 78; (Applicazioni di una proprietà aritmetica delle quadriche) 161; (Algebraicité des courbes) 172; (Geometria sopra un campo di caratteristica due) 368; (Geometry upon an algebraic variety) 372.
- Seguchi, Tsunetami s. Tosio Kitagawa 358.
- Seiden, Joseph (Réversibilité et irréversibilité en résonance nucléaire) 214.
- Seifert, George (Pendulum-type equations) 311.
- Semenov, M. P. (Spektrum nicht-linearer Operatoren) 104.
- Semin, Ferruh (Surfaces W) 383.
- Semjanistyj, V. I. (Parabolische Geradenkongruenzen) 369.
- Semuchina, N. V. s. P. P. Kufarev 67.
- Senitzky, I. R. (Electrons and high-frequency fields) 449.

- Serre, Jean-Pierre (Dimension homologique des anneaux) 260.
- Serrin, James (Harmonic functions) 82.
- Seth, B. R. (Bending of T -plate) 190.
- Severi, Francesco (Fonctions et variétés quasi-abéliennes) 160; (Problèmes dans la théorie des systèmes d'équivalence) 373.
- Severo, Norman C. and Edwin G. Olds (Comparison of tests) 144.
- Shah, S. M. and S. K. Singh (Derivative of a meromorphic function) 66.
- Shapiro, Victor L. (Generalized Laplacians) 57; (Uniqueness of double trigonometric series) 286.
- Sharma, Brahmdev (Thermal stresses in disks) 411.
- Brahma Dev (Stresses in an infinite slab) 411.
- Shibata, Kêichi (Sequence of quasi-conformal mappings) 69.
- Takashi and Toshiei Kimura (Spin-orbit interaction energy) 454.
- Shiga, Kôji (Bounded representations on a topological vector space) 307.
- Shimoda, Isae (General analysis. VI.) 102.
- — s. Takeshi Watanabe 103.
- Shirafuji, Michie (Replication numbers for slippage problem) 145.
- Shuleshko, P. (Buckling of rectangular plates) 196.
- Sibuya, Yasutaka (Centres aux dimensions supérieures) 310; (Solutions bornées d'un système des équations différentielles) 310.
- — s. Minoru Urabe 310.
- Sideriades, L. (Systèmes couplés non linéaires) 404.
- Siebert, A. J. F. s. M. B. Lewis 455.
- Signorini, A. (Trasformazioni termoelettriche) 414.
- Šilov, G. E. (Satz vom Typus des Phragmén-Lindelöfschen Satzes) 314.
- Silverman, E. (Intrinsic inequality for Lebesgue area) 44.
- Louis (Ideas from theory of summability) 279.
- Simon, Herbert A. (Dynamic programming) 155.
- Simonart, Fernand (Adjointe de l'équation de Bessel) 59.
- Singer, Ivan (Fonctionnelles linéaires) 329.
- Singh, K. P. (Stresses in rotating discs) 410.
- K. Devi (Riemann spaces) 168.
- — and R. S. Mishra (Subspaces of semisimple group spaces) 170; (Infinitesimal deformations of a Riemannian space) 171.
- S. K. s. M. Shah 66.
- Vikramaditya (Appell polynomials) 58.
- Sion, Maurice (Variational measure) 274.
- Siotani, Minoru (Order statistics for discrete case) 139.
- Siraždinov, S. Ch. (S. H.) (Estimations with minimum bias) 152.
- Sitenko, A. G. and A. A. Kolomenskij (Charged particle in an anisotropic medium. I.) 459.
- Sivuchin (Sivukhin), D. V. (Elliptic polarization of light) 442.
- Slater, L. J. (Confluent hypergeometric function) 60.
- Slibar, A. (Graphisch-numerische Integration von gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen) 339.
- Smith, D. Hammond (Complete hyperspace) 176.
- William E. s. Nicholas Rott 420.
- Smythe, W. R. (Charged right circular cylinder) 438.
- Šnol' (Shnol), É. (E.) (Müntz' theorem and orthogonal expansions) 57.
- Sobolev, V. I. (Funktionen von Elementen eines halbgeordneten Ringes) 93.
- — V. (Übertragung von Strahlungsenergie) 461.
- Sobolevskij, P. E. s. M. A. Krasnosel'skij 104.
- Socio, Marialuisa de (Onde elettromagnetiche in un gas ionizzato) 443.
- Sofronov, I. D. (Singular operators) 324; (Singular integral equations) 325.
- Soglio, Letizia Dal (Punti uniti per trasformazioni plurivalenti di 3-celle) 182.
- Sokolov, A. (Relativistic motion of electrons in magnetic fields) 442.
- Solian, Alexandru (n -Vollständigkeit in Gruppen) 13.
- Solodovnikov, A. S. (Geodesic classes of $V(K)$ spaces) 171.
- Soloŭev, L. S. s. É. L. Burštejn 75.
- (Soloviev), V. G. (Nucleon propagator) 449.
- Solymár, L. s. M. Uzsoy 219.
- Sondheimer, E. H. (Electron-phonon equilibrium) 457.
- Southard, Thomas H. (Evertt's formula) 112.
- Špaček, Antonín (Regularitätseigenschaften zufälliger Transformationen) 353.
- Spampinato, Nicolò (Superficie approssimante una falda di Halphen) 381; (Falda dell' S_3) 381.
- Sprinkle, H. D. (Cardinals in "consistency of continuum hypothesis") 252.
- Srivastav, R. P. (Derivatives of integral functions) 294.
- Srivastava, Krishna Ji (Hypergeometric integrals) 61.
- St-Pierre, J. and A. Zinger (Difference between two largest sample values) 143.
- Stachowiak, Henryk (Distribution functions of electron-photon cascades) 454.
- Stammberger, A. (Nogramm zur Umwandlung kartesischer Koordinaten) 343; (Spezifischer Leitungswiderstand von Metallen) 457.
- Stampacchia, Guido (Equazioni di tipo ellittico) 320.
- Stapp, Henry P. (Polarization phenomena) 447.
- Stečkin, S. B. (Extremalproblem für Polynome) 291.
- — s. S. I. Zuchovickij 51.
- Steel, W. H. and Joan Y. Ward (Incomplete Bessel and Struve functions) 60.
- Stein, Charles (Admissibility of Hotelling's T^2 -test) 143; (Mean of a multivariate normal distribution) 356.
- Steinberg, Robert (Prime power representations of groups) 15.
- Stewartson, K. (Motion of a sphere through a conducting fluid) 443.
- Stippes, M. (Simply-supported plate) 409.
- Stoka, Marius I. (Mesure de l'ensemble des coniques du plan) 395.
- Stoker, J. J. (Surface waves in water) 432.

- Stone, A. P. (Wigner coefficients) 227.
- Storrer, F. (Procédé de division numérique) 122.
- Stulen, F. B. and F. G. Lehman (Inhomogeneous linear simultaneous equations) 108.
- Sumitomo, Takeshi (Transformations of Riemannian spaces) 172.
- Sumner, D. B. (Averaging operator) 64.
- Sundara Raja Iyengar, K. T. s. Iyengar, K. T. Sundara Raja 406.
- Supino, Giulio (Piastre elastiche) 190; (Onde di ampiezza crescente) 433.
- Suvorov, I. F. (Mathematik für technische Lehranstalten) 35.
- Suzuki, Yukio (Optimal machine setting) 364.
- Svejgaard, Bj. s. T. Krarup 113.
- Swift, J. D. s. Irving Reiner 16.
- Dean s. Marshall Hall jr. 365.
- Sz. Nagy (S.-Nad'), B. (Transformationen des Hilbertschen Raumes) 95.
- et A. Korányi (Problème de Nevanlinna et Pick) 95.
- Szász, F. (Groups every cyclic subgroup of which is a power of the group) 257; (Gruppen, deren Potenzen zyklische Untergruppen sind) 257; (Cyclic groups) 257; (Rings every subring of which is a multiple of the ring) 260.
- G. (Rédei'sche schiefe Produkte von Halbverbänden) 18.
- Szegő, G. (Different capacity concepts) 321.
- Szépfolusy, P. (Interaction between nucleons) 452.
- Table of circular normal probabilities 134.
- of square roots of complex numbers 346.
- Tables of Whittaker functions 345.
- Tabueva, V. A. (Successive approximations in finding separatrices) 108.
- Tait, J. H. (Neutron diffusion theory) 453.
- Takács, Lajos (Sequence of events) 132.
- Takahashi, Shigeru (Random Riemann-sums) 351.
- Takano, Kinsaku (Multidimensional central limit criterion) 126; (Central convergence criterion) 127.
- Takashima, Michio (Evolutionary processes) 351.
- Takasu, Tsurusaburo (Kugelgeometrische Relativitätstheorie) 224.
- Takeda, Gyo s. R. H. Capps 231.
- Takeno, Hyōitirō (Einstein's generalized theory of gravitation) 444; (Addendum to "wave solutions of Einstein's generalized theory of gravitation") 444; (Plane wave solutions of non-symmetric unified field theories) 444.
- Taketani, Mitsuo s. Kazuhiko Inoue 449.
- Tamadjan, A. P. s. M. M. Džrbašjan 290.
- Tamura, Jirō (Riemann surface) 301.
- Takayuki (Construction of finite semigroups. I.) 10; (Semilattice) 18.
- Tanaka, Tadashi (Locally connected continua) 180.
- Tannaka, Tadao (Principal ideal theorem) 263.
- Tanzi Cattabianchi, Luigi (Formula di Taylor-Cauchy) 46.
- Tarski, Alfred (Equationally complete rings) 246.
- Taussky, O. and John Todd (Commuting bilinear transformations) 8.
- s. T. Kato 9.
- Taylor, H. S. s. B. Lewis 417.
- J. C. (Divergencies in quantum electrodynamics) 448.
- Tchen, Chan-Mou (Interfacial waves between two streams) 212.
- Tchudakoff, N. G. (Characters of number semigroups) 268.
- Tedeschi, Bruno (Capitali accumulate) 155.
- Teleman, Silviu (Orthogonal projection in the theory of elasticity) 405.
- Temperley, H. N. V. (Changes of state) 188.
- Tenza, Luigi (Lettere di Carlo Rinaldini) 3.
- Teraï, Masaaki s. Takeshi Watanabe 103.
- Terechova, N. P. (Vollständigkeit des Raumes der Teilmengen) 176.
- Terracini, Alessandro (Sistemi infiniti di piani) 166.
- Tevlin, A. M. s. N. F. Četveruchin 403.
- Theil, H. and J. van Yzeren (Wald's method of fitting straight lines) 361.
- Theis, W. R. (Potentiale zu gegebenen Streufunktionen geladener Teilchen) 227.
- Theodorescu, Radu (Équation rencontrée dans la théorie des processus stochastiques) 350; (Théorème ergodique) 350.
- Thiruvengkatachar, V. R. (Stress waves produced by impulse) 201.
- Thomas, R. H. s. J. G. Oldroyd 202.
- T. Y. (Isotropic materials) 198.
- Thomasian, A. J. (Espaces de variables aléatoires) 347.
- Thomé, P. s. A.-A. Iliouchine 412.
- Thyssen, M. (Problème de Dirichlet-Neumann pour $-A + z$) 82.
- Tiberti, Maria Rosaria (Universo di Boole) 6.
- Tibiletti, Cesarina Marchionna s. Marchionna Tibiletti, Cesarina 161.
- Tipei, N. (Lubrification hydrodynamique) 422.
- Tjotta, S. s. J. Holtmark 431.
- Toda, Hiroshi (Double suspension E^2) 183.
- Todd, John s. O. Taussky 8.
- Tolhoek, H. A. (Electron polarization) 232.
- Tominaga, Akira (m -connectedness of plane Peano continua) 180.
- Tonolo, Angelo (Spazi riemanniani normali) 387; (Campo elettromagnetico all'interno di un conduttore. II.) 438.
- Toraldo di Francia, Giuliano (Metodo variazionale di Levine e Schwinger) 441.
- Tóth, L. Fejes s. Fejes Tóth, L. 175, 393.
- Tournarie, Max (Histographie des fonctions) 403.
- Toyoda, Toshiyuki s. Kazuhiko Inoue 449.
- Transue, William s. Marston Morse 273.
- Trautman, A. (Killing's equations) 224.

- Treloar, L. R. G. (Deformations in rubberlike materials) 406.
- Tricomi, Francesco G. (Funzioni ortogonali di Laguerre) 121; (Funzioni speciali) 286.
- Triebel, Franz (Rechen-Resultate) 121.
- Trjitzinsky, W. J. (Aspects topologiques de la théorie des fonctions réelles) 285.
- Truckenbrodt, E. (Tragflügel-aerodynamik) 204; (Laminare Reibungsschicht mit Absaugung) 420.
- Tsao, Chia Kuei (Distribution of the sum in random samples) 354.
- Tseng, Ja. Ju. (Virtuelle Lösungen) 96.
- Tsuji, Masatsugu (Neumann's problem) 83.
- Tumanjan, S. Ch. (Tumanyan, S. H.) (Asymptotic distribution of χ^2 criterion) 138.
- Turán, P. (Paper of J. W. S. Cassels) 107.
- Turri, Tullio (Trasformazioni involutorie) 156; (Trasformazioni birazionali involutorie dello spazio) 157; (Nota di De Jonquières) 157.
- Uchiyama, Moritune s. Keizo Yoneda 151.
- Saburô (Multiple exponential sum) 268.
- Uhlenbeck, G. E. s. G. W. Ford 186.
- Umegaki, Hisaharu s. Masahiro Nakamura 333.
- Urabe, Minoru and Yasutaka Sibuya (Center of higher dimensions) 310.
- Urbanik, K. (Stochastic processes) 127.
- Utz, W. R. (Third order differential equation) 76.
- Uzawa, Hirofumi (Leontief's dynamic input-output system) 363.
- Uzsoy, M. and L. Solymár (Super-directive linear arrays) 219.
- Vacca, Maria Teresa (Onde magneto idrodinamiche) 442.
- Vagner, V. V. (Tangential-räume) 167.
- Vajenberg, M. M. (Variationsmethoden zur Untersuchung nicht-linearer Operatoren) 103.
- Válcovici, Victor (Fluides barotropes) 201.
- Vasilach, Serge (Problème de Cauchy) 317.
- Velasco de Pando, M. (Plastizität) 413.
- Venticos, Greg. (Minimum angles of two linear subspaces) 371.
- Vesentini, Edoardo (Campi di elementi lineari complessi) 184.
- Videnskij, V. S. (Gleichmäßige Annäherung in der komplexen Ebene) 290.
- Vijayaraghavan, T. and K. Padmavally (Question of J. M. Whittaker) 63.
- Vincensini, Paul (Méthode géométrique à l'étude de certains ensembles de corps convexes) 392.
- Vinogradov, I. M. s. Carl Friedrich Gauß 3.
- Viola, Tullio (Concetti fondamentali della geometria) 2; (Insegnamento della matematica) 241.
- Višik, M. I. and O. A. Ladyženskaja (Randwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen) 99.
- — und L. A. Ljusternik (Stabilisierung von Lösungen parabolischer Gleichungen) 81.
- Vladimirov, V. S. (Application of Monte Carlo method) 110.
- Voelker, Dietrich (Anwendung der Laplace-Transformation auf Beugung an Gittern) 441.
- Voinea, Radu (Stabilité élastique des constructions hyperstatiques) 407.
- Vorovič, I. I. (Periodical solutions) 96.
- Voss, K. (Differentialgeometrische Kongruenzsätze) 384.
- Vrănceanu, G. (Invariants intrinsèques d'un espace non holonome) 388.
- Vučković, Vladeta (Méthodes de limitation) 48; (Satz über reelle Folgen) 49; (Mercersche Sätze) 49.
- Wada, Hidekazu (Space of mappings of a sphere on itself) 398.
- W. s. K. A. Brueckner 234.
- Waerden, B. L. van der (Rational equivalence of cycles on a variety) 373.
- Wait, James R. (Radiation from an electric dipole) 219.
- Wajiki, Isamu, Teruaki Kawashiro and Yoshikatsu Watanabe (Compound normal distributions) 135.
- Walker, Marshall J. (Quaternions as 4-vectors) 163.
- Robert J. s. Marshall Hall jr. 365.
- Wallace, Andrew H. (Homology theory of algebraic varieties. I.) 158.
- Wallisch, W. (Einfluß der Schubverzerrung auf die Eigenschwingungen von Platten) 414.
- Wang, A. J. s. E. H. Lee 200.
- Hsien-Chung (Discrete subgroups of solvable Lie groups. I.) 258.
- Ward, Joan Y. s. W. H. Steel 60.
- Warschawski, S. E. (Numerical methods of conformal mapping) 110.
- Wasow, Wolfgang (Nonlinear differential equations) 71.
- Watanabe, Hisao (Poisson distribution) 352.
- Shiguo (Charakteristische Parameter eines Kernresonanzniveaus. II.) 234.
- Takeshi, Masaaki Terai and Isae Shimoda (Power series in abstract spaces) 103.
- Yoshikatsu s. Isamu Wajiki 135.
- Watari, Chinami (Haar functions) 57.
- Waters jr., William E. (Coaxial-torus capacitor) 438.
- Watson, G. S. and E. J. Williams (Significance tests on the circle) 145.
- K. M. (Applications of scattering theory to quantum statistical mechanics) 228.
- Weber, Ernst (Linear transient analysis. II.) 218.
- Gerhard s. Gerhard Heber 226.
- H. E. (Boundary layer inside a conical surface) 208.
- Wegner, L. H. (Two-sample tests) 143.
- Udo (Teilweise eingespannte Platten) 409.
- Wehrle, Philippe (Univers aléatoire) 226.
- Weibull, Waloddi und Folke K. G. Odqvist (Ermüdungsfestigkeit) 197.

- Weidenmüller, Hans-Arwed (Lokalisierte Funktionen und ebene Wellen für Elektronen mit Wechselwirkung) 239.
- Weier, Josef (Zerlegung eindimensionaler Nullstellengebilde) 182; (Lokale Wesentlichkeit von Abbildungen) 182; (Abbildungen zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten in Kugelfläche) 182; (Offene Euklidische Mengen) 398.
- Weil, André (Idèle-class group) 263; (Abstract versus classical algebraic geometry) 373.
- Weinberger, H. F. s. L. E. Payne 82.
- Weingarten, Harry (Deviations for sums of chance variables) 125.
- Weinstein, A. (Symmetric problems) 315.
- Weiss, Lionel (Tests of fit) 145; (Wald sequential tests) 357.
- Welch, B. L. (Criticisms by Sir R. Fisher) 357.
- Whaples, G. s. R. E. MacKenzie 264.
- Whitehead, George W. (Homotopy groups of joins) 183. — J. H. C. (Duality in topology) 397.
- Whitham, G. B. (Propagation of weak shock waves) 211.
- Widom, Harold (Approximately finite algebras) 94.
- Wilder, R. L. (Problem of Alexandroff) 180.
- Wilets, Lawrence s. David H. Frisch 223.
- Willcox, Alfred B. (Structure theorems for Banach algebras) 330.
- Williams, E. J. s. G. S. Watson 145. — Ernest s. E. P. Miles jr. 315. — R. F. (Reduction of open mappings) 179.
- Winkler, Helmut (Multiplikation nichtsinusförmiger Spannungen) 114.
- Winther, Aage s. Kurt Alder 122.
- Wintner, A. (Principle of subordination) 71; (Équations différentielles ordinaires) 71; (Non-oscillatory differential equations) 74; (Dernier théorème de géométrie de Poincaré) 181; (Expansion of solutions of ordinary differential equations) 308.
- Wippermann, Friedrich (Rechenautomaten für die Wettervorhersage) 344.
- Wirth, Eva Maria (Typus einer Riemannschen Fläche) 69.
- Wise, J. (Regression analysis) 360.
- Wishart, David M. G. (Queueing system with χ^2 service-time distribution) 132.
- Wislicenus, G. F. (Axial durchströmte Kreiselräder) 204.
- Wittmeyer, H. (Drillungswiderstand eines Hohlprismas) 410.
- Wojtasiewicz, Olgierd s. Henryk Greniewski 4.
- Wolf, Paul (Galoissche Algebren) 25.
- Wolfowitz, J. s. A. Dvoretzky 146. — — s. J. Kiefer 147.
- Wolfson, J. L. and H. S. Gellman (Tables for conversion of electron momentum to electron kinetic energy) 403.
- Woods, A. C. (Anomaly of convex bodies) 33.
- Woude, W. van der (Group of rotations in R_0) 371.
- Wu, Tai Tsun (High-frequency scattering) 440.
- Wurster, Hermann (Neutralpunkt des Flugzeuges) 207.
- Wynn, P. (Cubically convergent process for determining zeros of functions) 107.
- Yamada, Masami s. Takashi Kikuta 233. — Miyuki (Compositions of semigroups) 11.
- Yamashita, Jiro (Electron multiplication in silicon) 458.
- Yang, C. T. s. D. Montgomery 17.
- Yano, K. s. N. H. Kuiper 171. — Kentaro (Pseudo-Hermitian manifolds) 172. — Shigeki (Approximation by trigonometric polynomials) 53.
- Yaqub, Adil (Ring-logics) 22.
- Yen, Ti (Isomorphism of unitary groups in AW^* -algebras) 332.
- Yih, C. S. s. L. Landweber 419.
- Yoneda, Keizo and Moritune Uchiyama (Large class intervals) 151.
- Yood, Bertram s. Paul Civin 92.
- Yoshida, Michio (Theorem on Zariski rings) 26.
- Yukawa, Jiro (Radiative K-capture. I.) 231.
- Yzeren, J. van s. H. Theil 361.
- Zaidman, Samuel (Représentation des fonctions vectorielles) 86.
- Zajcev (Zaitsev), G. A. (Dirac's equation for the electron) 446.
- Zalgaller, V. A. (Deformationen eines Vielecks) 393.
- Zaubek, Othmar (Stetigkeitskriterium) 278.
- Zel'dovič (Seldowitsch), Ja. B. (Théorie des β -Zerfalls) 235.
- Zelinsky, Daniel (Cohomology of function fields) 27.
- Zeuli, Tino (Equilibrio radiativo di una massa gassosa stellare) 462.
- Ževakin (Zhevakin), S. A. and V. M. Fajn (Fain) (Nonlinear effects in the ionosphere) 440.
- Zickel, John (Pretwisted beams and columns) 411.
- Zil'berman, G. E. (Thermal and galvanometric effects in strong fields) 240.
- Ziman, J. M. (Variational principle of transport theory) 457.
- Zindler, R. E. (On Reizin's paper) 77.
- Zinger, A. s. J. St.-Pierre 143.
- Žirnov (Zhirnov), V. A. (Rayski's bilocal field theory) 229.
- Zoller, K. (Grammelsche Verfahren bei Eigenschwingungsaufgaben) 405.
- Zubov, V. I. (Equilibrium position neighbourhood for differential equations) 75.
- Zuchovickij (Zukhovitsky), S. I. (Approximation reeller Funktionen) 50. — — — and S. B. Stečkin (Stechkin) (Approximation of abstract functions) 51.
- Zuckerbrodt, P. s. A. Bellemans 236.
- Zwinggi, Ernst (Premi addizionali per rischi aggravati) 154.
- Zygmund, A. (Hilbert transforms in E^n) 327.
- Zypkin, Ya. Z. (Analyzing intermittent regulating systems) 118.

Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Institut für Reine Mathematik.
Herausgeber: E. Pannwitz, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg. — Printed in Germany.
V/12/6. Gen.-Nr. 721/33/58.